श्रीजानकीवल्लभो विजयते

चलराशिकलन।

जिसे

बनारससंस्कृतकालेज के प्रधानगणितशास्त्राध्यापक

महामहोपाध्याय श्रीसुधाकरद्विवेदी ने बनाया

A TREATISE

ON THE

INTEGRAL CALCULUS

BY

MAHÁMAHÓPÁDHYÁYA SUDHÁKAR DVIVEDI,
PROFESSOR OF MATHEMATICS AND ASTRONOMY,
SANSKRIT COLLEGE, BENARES AND FELLOW
OF ALLAHABAD UNIVERSITY.

इलाहाबाद

गवर्नमेण्ट प्रेस

सन् १८९५ ई०

Price Re. 1-8-0

With the author's best compliments
+ regards.
Sudhákara Dvivedi
27-12-96

श्रीजानकीवल्लभो विजयते

चलराशिकलन।

जिसे

बनारससंस्कृतकालेज के प्रधानगणित शास्त्राध्यापकमहामहो-

पाध्याय श्रीसुधाकरद्विवेदी ने बनाया।

A TREATISE

ON THE

INTEGRAL CALCULUS

BY

MAHÁMAHÓPÁDHYÁYA SUDHÁKARA DVIVEDÍ,
PROFESSOR OF MATHEMATICS AND ASTRONOMY,
SANSKRIT COLLEGE, BENARES AND FELLOW
OF ALLAHABAD UNIVERSITY.

Ilāhāvād
इलाहाबाद
gavarnāment prés.
गवर्नमेण्ट प्रेस

सन् १८९५ ई०
1895

PREFACE.

A SUFFICIENT account has been already given in the preface of my Differential Calculus * of the gradual development of Differential and Integral Calculus in Europe, and also in whose mind the notion of this science first arose in India. Therefore, here I only wish to say that the learned public may not think it to be a mere translation or an abstract of some European book, but as a new treatise on the subject. I have shown, as far as possible, all the important theorems together with numerous examples, so that the students may be able to grasp the methods thoroughly and thereby solve problems without the least doubt.

Many new methods are described in different portions of this book, which will be found simpler than those of Europeans. For instance, Mr. Todhunter in his Integral Calculus, article 14, for the integration of $\frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$ assumed $\sqrt{x^2 \pm a^2} = z - x$. The same assumption was described by Mr. Williamson. Mr. Hymers putting $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ into the form $\frac{(\sqrt{x^2 \pm a^2})\ (x + \sqrt{x^2 \pm a^2})}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}}$ deduced the integral.

Professor De Morgan worked thus :

Let $\sqrt{x^2 \pm a^2} = y$, then $x^2 \pm a^2 = y^2$.

$\therefore 2\,x\,dx = 2\,y\,dy$ or $x\,dx = y\,dy$.

Therefore, $x\,dx + y\,dx = y\,dy + y\,dx$.

$\therefore dx = \frac{y\,(dy + dx)}{x + y}$, by substituting $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm y^2}} =$

$$\int \frac{y\,(dy + dx)}{y\,(x + y)} = \int \frac{dx + dy}{x + y} = \operatorname{Log}(x + y) = \operatorname{Log}(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}).$$

Professor De Morgan deduced a second method of $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ also, by employing an imaginary quantity, thus :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - (x\sqrt{-1})^2}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \int \frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{a^2 - (x\sqrt{-1})^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}} \operatorname{Sin}^{-1} \frac{x\sqrt{-1}}{a}.$$

---

*Named Chalana-Kalana, which is dedicated to His Honor Sir Alfred Lyall, K. C. B., C. I. E., late Lieutenant-Governor of the North-Western Provinces and Chief Commissioner of Oudh, and published by the order of Government in 1886.

Extracts from newspapers and journals.

But by De Moiver's Theorem

$$\text{Cos } 0 - \text{Sin } 0 \sqrt{-1} = e^{-\theta\sqrt{-1}}$$

A HINDI TREATISE ON THE DIFFERENTIAL CALCULUS.*

OPINIONS OF THE PRESS.

It has long been regretted that, notwithstanding the vast amount of tuition constantly given in India and the undoubted intelligence of the people, that country has contributed nothing to the general stock of scientific knowledge. We have to go back a thousand years to reach a period of independent scientific research ; and from that remote time to these a period of intellectual stagnation appears to have supervened. At last that reproach has been removed ; for a scholar has arisen with sufficient mental force to grasp the highest problems of both Western and Eastern science, and with sufficient originality to weave the two together into an harmonious system, while criticising and improving on both. The book to which we are now calling attention is, therefore, a remarkable one, and calls for special notice as the first forward step which India has made in this department of study for centuries. But the chief point to note in the book is that it is written in the Hindî language, which not only affords another demonstration of the increasing prominence which that language is attaining, but enables the book to give to thousands of Indian mathematicians who are unfamiliar with the English language the means of carrying their studies to a very high point. This is a most important fact, because it is well known that a scientist is not often at the same time a linguist ; still less is i given to mortals to gain such power over a foreign language as to permit them not only to acquire what that foreign language has to teach, but to carry on independent research beyond that point. The work before us removes that obstacle by presenting to Indian scholars in their own vernacular the highest facts of Western science. The author has, furthermore, had the judgment to unite with those facts the really correct processes of ancient Indian mathematicians ; and, in this way, he grafts on to the Indian mind the additional knowledge of Europe. To do this, it is clear he had to originate processes of his own ; for, in a subject like the Differential Calculus, resting on the nicest discrimination of the reasoning faculty, mere translation of the ideas of one people into the language of another people would have been simply futile. The author has proved himself to possess a masterly knowledge of mathematics by the skill with which he has transfused—not translated—European ideas into Indian language, and there can be no doubt that his valuable work will give a real impetus to original scientific research among his countrymen.

It is not generally known that the old Indian mathematician Bhâskrâchâry,a so long ago as A.D. 1150 had devised a method of calculation practically identical with the Differential Calculus ; and the term *tâtkâlikìgati*, which he applied to the increment he used, has much the same significance as that employed in the Differential Calculus. He was right in his method, but wrong in his proof ; and his accuracy is seen by the fact that he was able to demonstrate that when a variable attains the maximum value its differential vanishes, and that when a planet is

* "Chalana-Kalana" by Pandit Sudhâkara Dvîvedî. Benares: Lazarus and Co., 1886.

$$\text{or } -0\sqrt{-1} = \text{Log}\ (\text{Cos}\ 0 - \text{Sin}\ 0\ \sqrt{-1}).$$

either in apogee or in perigee the equation of centre vanishes. He was aware that the increment vanishes in some intermediate position, and from this the principle of continuous function follows in due course, which is the basis of the proof of Taylor's theorem. The learned Pandit makes use of these and other facts to interweave Western with Eastern science, and to lead his country-men to move onward from the basis of truth they already possess. Pandit Sudhâkara Dvivedî has done something to advance scientific knowledge in India; and it is to be hoped that he will be encouraged to redeem his promise and complete a series of works on Analytical Geometry, the Integral Calculus, and Quaternions. The Indian Government would do wisely by circulating this admirable book among the native students at colleges, and especially among private students in the Hindí area of Northern India. —*The Overland Mail, Feb.* 4, 1887.

A REALLY remarkable book on the Differential Calculus has just been published at Benares, which ought to be made known to Europe. It is called *Chalana–Kalana,* and it is written by Pandit Sudhâkara Dvîvedî, of the Sanskrit College, Benares.

It is the first forward step that India has made in independent scientific research in modern times; and the author deserves the highest praise for the masterly manner in which he has dealt with his difficult subject. He has placed it in the power of Indian mathematicians to carry their studies to a very high point in their native Hindî; and he has done this, not by merely translating an English mathematical work, but by writing an entirely new treatise, deduced from the discoveries of Descartes, Newton, Leibnitz, Bhâskarâchârya and others. The methods of these authorities are transfused into Indian processes, thereby enabling native scholars to follow Western methods and reasoning with confidence and intelligence. He utilises a method of dealing with variables, devised by Bhâskarâchârya, which is practically identical with that of the differential calculus; and he cites other correct processes which that admirable old astronomer was able to formulate. In this skilful way the author grafts Western science on to the Indian mind; while, in the general plan of his work, he follows Todhunter's well-known treatise. Originality is likewise shown by the author's simplification of Todhunter's method of treating vanishing fractions; and in the sections he has appended on analytical geometry and conic sections—additions rendered necessary by the fact that no treatise on them exists inthe H ind language.

The Pandit promises a series of works on the higher branches of mathematics, dealing fully with analytical geometry, the integral calculus, and quaternions. He has shown in the present work that he thoroughly understands his subject; and it is to be hoped, for the advancement of science, that he will succeed in directing the acute reasoning powers of Indians to the mathematical and scientific problems of the Western world.—*The Academy, Feb.* 12, 1887. F. P.

In view of the aptitude for numerical calculation which the Hindus are acknowledged to possess in a marked degree, it seems singular that India, in modern days, and especially

Let $\text{Sin}\,0 = \frac{x}{a}\sqrt{-1}$, $\text{Cos}\,0 = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}$, $-\sqrt{-1} = \frac{1}{\sqrt{-1}}$,

$0 = \text{Sin}^{-1}\frac{x\sqrt{-1}}{a}$ or $\frac{1}{\sqrt{-1}}\,\text{Sin}^{-1}\frac{x\sqrt{-1}}{a} =$

$$\text{Log}\left\{\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} - \frac{x}{a}(\sqrt{-1})^2\right\} = \text{Log}\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$$

where we omit the constant quantity Log a.

All the above assumptions that are described by the mathematicians can hardly be apprehended unless it is known that

$$\int\frac{d\,x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \text{Log}\,(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}).$$

Therefore I have described a new method in article 9, thus :

Let $\int\frac{d\,x}{f\,(x)} = \text{Log}\left\{y + f\,(x)\right\}$ where y is a function of x, here the

---

during the period in which it has been subject to the English, with their free-handed educational encouragement, should have contributed so little to the development of mathematical science. It was not destined, however, that Bhâskarâchârya, Brahmagupta, and their compeers of ages far remote should be wholly without their nineteenth century successors. Râmachandra, a native of Delhi, besides translating numerous works on mathematics, including the higher, from English into Urdû produced, a generation ago, at least one work in the same language, distinguished by accredited originality. Reference is here intended to his 'Problems of Maxima and Minima,' the second edition of which, prefaced by the late Prof. De Morgan, was published in London in 1859, under the auspices of the Court of Directors, who signified their appreciation of it by presenting its author with £200, after their liberal fashion. And now we have to announce the appearance, last year, of a kindred treatise, but one of much ampler scope, 'Chalana-kalana,' bearing the alternative title of " A Hindî Treatise on the Differential Calculus." This admirably printed volume, extending to nearly 500 pages, has for its author Pandit Sudhâkara Dvîvedi, Librarian of the Sanskrit College at Benares. The learned Pandit, already favorably known as a mathematician by what he has written, in Sanskrit, on the properties of the ellipse, lays claim to the introduction of many new methods, over and above demonstrating the validity of a certain method which had previously been pronounced unsound. In an English preface, abounding with interesting facts and criticisms, he gives it as his opinion that Bhâskarâchârya, who, though he flourished in the twelfth century, is supposed to have been indebted for nothing to European sources, "was in no way inferior to Archimedes, in respect of his methods of differential calculus." As the Pandit expresses himself with perfect clearness in our language, it is due to his reputation that he should render into it those portions of his treatise in which, as he alleges, he has improved on what has been accomplished by his predecessors—Mr. Todhunter and Mr. Hall, in particular.— *The Nation, Feb.* 10, 1887.

form of $f(x)$ is to be found.

By differentiating the above equation with respect to x

$$\frac{dx}{(x)} = \frac{f'(x)\,dx + dy.}{f(x) + y}$$

$$\therefore f(x)\,dx + y\,dx = f(x) f'(x)\,dx + f(x)\,dy.$$

By transposing

$$f(x)\,dx - f(x)\,dy = \{f(x)\}\{dx - dy\} = f(x) f'(x)\,dx - y\,dx$$
$$= \{f(x) f'(x) - y\}\,dx.$$

By division

$$\frac{dx}{f(x)} = \frac{dx - dy}{f(x)f'(x) - y} = \frac{dx - dy}{x - y},$$

if $f(x) f'(x) = x$,

$$\therefore \int \frac{dx - dy}{x - y} = \int \frac{dx}{f(x)} = \operatorname{Log}(x - y) = \operatorname{Log}\{f(x) + y\}.$$

$$\therefore x - y = f(x) + y \text{ or } y = \frac{x - f(x)}{2} \text{ and } \int \frac{dx}{f(x)} = \operatorname{Log}\left\{f(x) + y\right\}$$

$$= \operatorname{Log}\left\{\frac{f(x) + x}{2}\right\} = \operatorname{Log}\left\{f(x) + x\right\},$$

where the constant Log 2 is omitted.

Thus a theorem has been framed that when $f(x) \times f'(x) = x$ then

$$\int \frac{dx}{f(x)} = \operatorname{Log}\left\{f(x) + x\right\}.$$

As $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$ here $f(x) = \sqrt{x^2 \pm a^2}$

$$\therefore f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \text{ and } f(x) f'(x) = x$$

$$\therefore \int \frac{dx}{f(x)} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

$= \operatorname{Log}\{f(x) + x\} = \operatorname{Log}(\sqrt{x^2 \pm a^2} + x)$, by my method.

In like manner many other new methods have been described.

I have added many important theorems with numerous interesting examples regarding the Calculus of Variation and Dynamics of a Particle at the end of this book.

It is advisable for the beginners first to read carefully the Differential Calculus, then to begin the Integral Calculus, otherwise it is impossible for them to understand the latter.

In conclusion, I earnestly request all learned gentlemen to understand, that the book is not written to show off talent, but to encourage and incite our own countrymen towards the cultivation of Western science. Why should we not improve our own language and advance our own countrymen with the aid of Western science to the attainment of which we are applying our heart and soul?

Now-a-days there being more mutual communication between Europeans and Indians, the Europeans are very much interested in the study of Sanskrit and Hindi. Therefore this treatise will be also useful to those Europeans who are interested in the history and development of Indian Mathematics.

I shall consider my labour not to have been in vain, even if my treatise should have no other result than to incite others to criticise my work and to produce more perfect treatises on the subject.

SUDHÁKARA DVÎVEDÍ.

भूमिका ।

चलनकलन (Differential calculus) की भूमिका में विशेष रूप से लिख आये हैं कि यूरप में यह विद्या कैसे फैली और भारतवर्ष में सब से पहले किस विद्वान् के ग्रन्थ में चलनकलन (Differential Calculus और चलराशिकलन (Integral Calculus) संबन्धी सिद्धान्त पाये जाते हैं। यहां पर इतनाही आवश्यक समझ कर लिखा जाता है कि विद्वान लोग यह न समझें कि यह ग्रन्थ किसी अङ्गरेज़ी ग्रन्थ का अनुवाद और संक्षिप्त रूप है किन्तु जिस में पढ़ने वालों को सब सिद्धान्तों से भली भांति परिचय हो जाय और उदाहरणों के उत्तर निकालने में संशय न हो इस लिये इस में थोड़ा बहुत जहां तक हो सका है चलराशिकलन (Integral Calculus) संबन्धी सभी सिद्धान्तों को उदाहरण समेत यूरप की युक्ति और अपनी कल्पना के बल से नूतन लघुप्रकार से दिखलाया है।

जैसे $\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2}}$ इस की सिद्धि के लिये टाड्हण्टर (Todhunter) साहब और विलियम्सन (Williamson) साहब ने $\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2} = \text{ल} - \text{य}$, यह कल्पना किया। हाइमर्स (Hymers) ने $\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2}$

$$= \frac{(\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2})\ (\text{य} + \sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2})}{\text{य} + \sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2}}$$ ऐसा कर तब चलराशि को सिद्ध किया। प्रोफ़ेसर डिमार्गन (Demorgan) ने पहले $\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2} = \text{र}$ तब $\text{य}^2 \pm \text{अ}^2 = \text{र}^2$ $\therefore$ २य ताय = २र तार वा यताय = रतार इस लिये यताय + रताय = र तार + र ताय $\therefore$ ताय = $\frac{\text{र}\ (\text{तार} + \text{ताय})}{\text{य} + \text{र}}$

इस का उत्थापन देने से

$$\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2}} = \int \frac{\text{र}\,(\text{तार} + \text{ताय})}{\text{र}\,(\text{य} + \text{र})} = \int \frac{\text{ताय} + \text{तार}}{\text{य} + \text{र}} = \text{ला}\,(\text{य} + \text{र})$$

प्रोफ़ेसर डिमार्गन (Demorgan) ने असंभव संख्या का भी उत्थापन दे कर $\int \frac{\text{ताय}}{\text{य}^2 + \text{अ}^2}$ इस का मान इस प्रकार से सिद्ध किया है कि

$$\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^2 + \text{अ}^2}} = \int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{अ}^2 - (\text{य}\sqrt{-1})^2}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \int \frac{\text{ताय}\sqrt{-1}}{\sqrt{\text{अ}^2 - (\text{य}\sqrt{-1})^2}}$$

$= \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\text{ज्या}^{-1}\,\frac{\text{य}\sqrt{-1}}{\text{अ}}$ परन्तु डेमाइवर के सिद्धान्त से

$\text{कोज्याष} - \text{ज्याष}\sqrt{-1} = \text{इ}^{-\text{ष}\sqrt{-1}}$

वा, $-\text{ष}\sqrt{-1} = \text{ला}\,(\text{कोज्याष} - \text{ज्याष}\sqrt{-1})$

कल्पना करो कि

$\text{ज्याष} = \frac{\text{य}}{\text{अ}}\sqrt{-1}$, $\text{कोज्याष} = \sqrt{1 + \frac{\text{य}^2}{\text{अ}^2}}$ । $-\sqrt{-1} = \frac{1}{\sqrt{-1}}$, $\text{ष} = \text{ज्या}^{-1}\,\frac{\text{य}\sqrt{-1}}{\text{अ}}$,

वा $\frac{1}{\sqrt{-1}}\,\text{ज्या}^{-1}\,\frac{\text{य}\sqrt{-1}}{\text{अ}} = \text{ला}\left(\sqrt{1 + \frac{\text{य}^2}{\text{अ}^2}} - \frac{\text{य}}{\text{अ}}(\sqrt{-1})^2\right)$

$= \text{ला}\,(\sqrt{\text{अ}^2 + \text{य}^2} + \text{य}) - \text{ला}\,\text{अ}$ स्थिराङ्क को निकाल देने से पहिले ही के ऐसा फल उत्पन्न हुआ ।

ऊपर जितनी युक्तियां दिखलाई गई हैं वे कभी मन में नहीं आ सकतीं जब तक यह ज्ञान न हो कि $\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2}} = \text{ला}\,(\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2} + \text{य})$ इस लिये यहां पर हमने नया यह प्रकार ८वें प्रक्रम में लिखा है कि

कल्पना करो कि $\int \frac{\text{ताय}}{\text{फ}\,(\text{य})} = \text{ला}\,\{\text{फ}\,(\text{य}) + \text{र}\}$ जहां र, य का कोई फल है तो तात्कालिक गति से $\frac{\text{ताय}}{\text{फ}(\text{य})} = \frac{\text{फ}'(\text{य})\,\text{ताय} + \text{तार}}{\text{फ}(\text{य}) + \text{र}}$ $\therefore \text{फ}(\text{य})\,\text{ताय} + \text{तायर}$

= फं (य) ताय फ(य) + तार फ(य) पक्षान्तरनयन और परस्पर भाग देने से $\frac{\text{ताय—तार}}{\text{फं(य)फ(य)—र}}=\frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}}$ अब यहां यदि फं(य)फ(य)=य तो

$$\frac{\text{ताय—तार}}{\text{य—र}}=\frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}} \therefore \int\frac{\text{ताय—तार}}{\text{य—र}}=\int\frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}}$$

वा ला(य—र)=ला{फ(य)+र}

∴ य—र=फ(य)+र

$\text{र}=\frac{\text{य—फ(य)}}{२}$ और

$\text{फ(य)+र}=\frac{\text{य+फ(य)}}{२}$

इस लिये $\int\frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}}=\text{ला}\left(\frac{\text{य+फ(य)}}{२}\right)=\text{ला}\{\text{य+फ(य)}\}\text{—ला २}$

ला २ स्थिराङ्क को निकास देने से

$\int\frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}}=\text{ला}\{\text{य+फ(य)}\}$ यह एक सिद्धान्त उत्पन्न हुआ अर्थात् $\int\frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}}$ इस का मान अवश्य ला {य+फ(य)} इसके तुल्य होगा यदि फ(य)फं(य)=य हो तो।

गणितज्ञों के बीच स्पष्ट है कि मेरा प्रकार एक प्रकार का सिद्धान्त है जो कि नियम से दिखलाता है कि जहां जहां फ(य) फं(य)=य ऐसा होगा तहां तहां ही चलराशि का मान ला{य+फ(य)} यह होगा।

इसी प्रकार इस ग्रन्थ में बहुत नई युक्तियां दिखलाई गई हैं।

इस के अन्त में वैशेषिककलन (Calculus of variations) और एक परमाणु की गतिविद्या (Dynamics of a particle) के भी अनेक सिद्धान्त लिखे गये हैं जिनके बल से अनेक चमत्कृत उदाहरण के उत्तर सहज में निकल आते हैं।

विद्यार्थियों के अभ्यास के लिये इस में अनेक उदाहरण लिखे गये हैं जिनके अभ्यास से सब सिद्धान्तों से भली भांति परिचय हो सकता है।

विद्यार्थियों को चाहिये कि पहले चलनकलन (Differential Calculus) को अच्छी तरह से सीखकर तब इसको पढ़ें अन्यथा इस का आना अत्यन्त दुर्घट है।

अन्त में विद्वानों से यह सविनय प्रार्थना है कि मैं ने अपनी पाण्डित्य दिखलाने के लिये इस ग्रन्थ को नहीं बनाया है किन्तु अपने देश बासियों के हृदय में यूरोप के विद्या का विशेष उत्साह दिलाने के लिये कि आप लोग कठिन परिश्रम से तन धन मन देकर जो यूरोप की विद्या सीखो उस से क्यों नहीं अपनी भाषा की पुष्टि कर अपने देश भाइयों का उपकार करते।

भारतवर्ष में यूरप के लोगों का अब विशेष संबन्ध होने से यूरप के विद्वान लोग भी संस्कृत और हिन्दी के ओर विशेष ध्यान देने लगे इस लिये यूरप के लोगों को भी हिन्दी में यह नया ग्रन्थ यूरोपियन रीति से कहां कहां विशेष बातें प्रकाश करता है इसका परिचय करने के लिये इस ग्रन्थ को पढ़ने से विशेष उपकार होगा।

यदि विद्वान लोग खण्डन की बुद्धि से भी मेरे ग्रन्थ को एक बेर आद्यन्त पढ़ेंगे तो भी मैं अपने परिश्रम को सफल समझूंगा।

दोहा।

गणित पयोनिधि सविधि मथि काढ़ी सुधा सुहीर।
भणित सुधाकर नहिं सुधा वसुधा मधि हे धीर॥ १॥
(१) (२) (३)
कल न परत निज कलन सों कलन बिना जों तात।
(४) (५) (६) (७)
कल न कहहु कल कलन हित कलन देहु येहि प्रात॥ २॥

सुधाकर द्विवेदी।

---

(१) कल = विश्राम, = आराम = चैन।
(२) कलन= करन = कर (हाथ) का बहुवचन।
(३) कलन= कलना= गणना=हिसाब करना।
(४) कल = दूसरा आनेवाला दिन।
(५) कल =सुन्दर=बढ़ियां।
(६) कलन=चलराशिकलन=यह ग्रन्थ।
(७) कलन=करन=कर्ण=कान।

विषयसूचनिका (Contents)

विशेषवर्णन।

अध्याय १।

द्वितीयाध्याय २।

प्रक्रम ।   पृष्ठ ।

तृतीयाध्याय ३ ।

चतुर्थाध्याय ४ ।

पञ्चमाध्याय ५ ।

प्रक्रम । पृष्ठ ।

प्रक्रम । पृष्ठ ।

इति विशेषवर्णन ।

श्रीः ।

श्रीजानकीवल्लभो विजयते ।

चलराशिकलन ।

श्लोक ।

यल्लीला विमला विलोक्य विपुलप्रालेयबालालये
भूपालेन्द्रललाटलालनकलालेपाङ्कितक्ष्मातले ।
उल्लङ्घ्य स्वकुलालिकूलकलितां लज्जानदीं मैथिली
यल्लोकाऽऽकुलिता चचाल चलवद्रामाय तस्मै नमः ॥१॥

१ प्र० । जैसे चलनकलन में स्वतन्त्रराशि के फलों पर से उनकी तात्कालिकी गति जानने के लिये अनेक प्रकार का वर्णन है उसी प्रकार से इस चलराशिकलन में फलों की तात्कालिकी गति पर से उन फलों के जानने के लिये अनेक प्रकार लिखे हैं। ऐसी दशा में चलराशिकलन को चलनकलन का उलटा कह सकते हैं॥

२ । कल्पना करो कि फ(य) का तात्कालिक संबंध फा(य) है तो चलनकलन से $\frac{फ(य+च)-फ(य)}{च}$ = फा(य)+$अ_1$ (यहां जब च=0 हो जाय तो $अ_1$=0) इस लिये

$$फ(य+च)-फ(य)=च\{फा(य)+अ_1\}$$

$$फ(य+२च)-फ(य+च)=च\{फा(य+च)+अ_2\}$$

$$फ(य+३च)-फ(य+२च)=च\{फा(य+२च)+अ_3\}$$

.. ..

$$फ(य+नच)-फ\{य+(न-१)च\}=च[फा\{य+(न-१)च\}+अ_न]$$

दोनों पक्षों को जोड़ने से

$$फ(य+न च)-फ(य)=च\{फा(य)+फा(य+च)+\cdots\}$$
$$+च(अ_1+अ_2+अ_3+\cdots\}$$

इस में य, य+च, य+२ च,····य+नच, इत्यादि के स्थान में अ,इ, उ,····क इत्यादि का उत्थापन देने से

$$फ(क)-फ(अ)=च\{फा(अ)+फा(इ)+फा(उ)\cdots+\}च+(अ_1+अ_2+\cdots)$$

अब यहां यदि च=० अर्थात् ताय के समान कल्पना करो तो

फ (क)—फ(अ)=फा (अ) ता य+फा (इ) ता य+फा (उ) ता य+··· ऐसा होगा। यहां जब य+नच=क और य=अ ∴ $\frac{क-अ}{न}$=च इससे यह सिद्ध होता है कि फल के तात्कालिक संबंध में स्वतन्त्र राशि के स्थान में क्रम से अ, अ+ $\frac{क-अ}{न}$, अ+२ $\frac{क-अ}{न}$, अ+३ $\frac{क-अ}{न}$,··· क—च,

का उत्थापन देकर अलग अलग मान ले आवो फिर उन मानों को च से गुणकर जोड़ दो, योग में च के स्थान में शून्य अर्थात् ताय का उत्थापन दो तो योग, फल के उन दो मानों के अन्तर तुल्य होगा जो कि स्वतन्त्रराशि के स्थान में अ, और क के उत्थापन से उत्पन्न होंगे। इस योग को संस्कृत में आद्य भी कहते हैं इसलिये लाघव से आद्य के आदि अक्षर को लुप्ताऽकार के रूप में लिखने से पूर्व योग को $\int_{अ}^{क}$ फा (य)ताय ऐसे लिख सकते हैं। यहां $\int_{अ}^{क}$ फा (य) ताय इस से यह समझना चाहिये कि फा(य)ताय के य के स्थान में अ, अ+ताय, अ+२ ताय, अ+३ ताय, ··· क—च, का उत्थापन देने से, जितने मान हैं उन सब का योग है। इस लिये प्रकारान्तर से जो योग पहले सिद्ध हुआ है इसे उसके समान करने से फ(क)—फ (अ)= $\int_{अ}^{क}$फा(य)ताय ऐसा हुआ। इस में यदि क के स्थान में य, और अ के स्थान में शून्य का उत्थापन दें तो फ (य)—फ (०)= $\int_{0}^{य}$ फा(य) ताय ··· (१)

३। चलनकलन से सिद्ध है कि फ(य) में केवल य चलराशि है और स्थिराङ्क हैं इस लिये फ(य) में य के स्थान में शून्य का उत्थापन

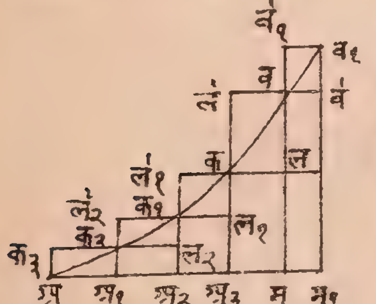
देने से फ(0) यह अवश्य शून्य वा किसी स्थिराङ्क के तुल्य होगा। इस स्थिराङ्क को यदि स्थि कहो तो दूसरे प्रक्रम का (१) समीकरण फ(य)—स्थि= $\int_0^{य}$ फा(य)ताय ऐसा हुआ इस में पक्षान्तरानयन से फ(य)= $\int_0^{य}$ फा(य)ताय+स्थि इसे लाघव से फ(य)= $\int$ फा(य) ताय+स्थि ऐसा लिखते हैं।

४। जब फ(य)= $\int$ फा(य)ताय+स्थि तो दोनों की तात्कालिकी गति निकालने से ता{फ(य)}=फा(य) ताय=ता{ $\int$ फा(य) ताय+स्थि} =ता{ $\int$ फा(य)ताय}+ता स्थि=ता { $\int$ फा(य) ताय} इस लिये

$\int$ फा(य) ताय यह अवश्य फ(य) के समान हुआ। इस पर से यह भी कह सकते हो कि जिस फल की तात्कालिकी गति फा(य)ताय है वह फल $\int$ फा(य)ताय के समान है वा $\int$ फा(य)ताय+स्थि इसके समान है।

चलराशिकलन का अभिप्राय।

५। नीचे लिखे हुए उदाहरण से विद्यार्थियों को स्पष्ट जान पड़ेगा कि चलनकलन और चलराशिकलन में क्या भेद है?।



कल्पना करो कि अ $क_2$ $क_1$ एक ऐसा वक्र है (जिस में अ म=य, और व म=र,) कि जिसके भुज, कोटि और चाप से जो वक्र त्रिभुज उत्पन्न होता है उस का क्षेत्रफल सर्वदा इ गुणित भुजघन के समान होता है तो बतावो कि य भुज में कोटि का क्या मान है? यहां इ कोई स्थिर संख्या है।

कल्पना करो कि अम=य, वम=र, तो अवम वक्रत्रिभुज का फल प्रश्न के अनुसार इ$य^3$ और अ$व_1$$म_1$ का क्षेत्रफल इ(य+म$म_1$)^3 होगा इस लिये इन दोनों का अन्तर, तुल्य हुआ $व_1$ व म $म_1$ के, अधिक हुआ वव′$म_1$म आयत से और अल्प हुआ व′$_1$$व_1$$म_1$ म आयत से तब

इ (य+म$म_1$)^3—इ·$य^3$ $>$ वम×म$म_1$ और $<$ व$_1$$म_1$×म$म_1$

म $म_1$ का भाग दे देने से $व_1 म_1 \angle इ \left\{ \frac{(य+मम_1)^3 - य^3}{मम_1} \right\} \angle वम$, इसमें

यदि $मम_1 = 0$ तो $व_1 म_1 = वम$ और $इ \left\{ \frac{(य+मम_1)^3 - य^3}{मम_1} \right\} = \frac{ता}{ताय}(इय^3)$

चलनकलन से । इस लिये चलनकलन से यह बात सिद्ध होती है कि फल के तात्कालिकसंबंध के समान र का मान है अर्थात् $र = ३ इ य^2$। इस प्रकार इस प्रश्न का उत्तर चलनकलन से सिद्ध हुआ।

अब इसी वक्र में यदि ऐसा प्रश्न किया जाय कि एक वक्रक्षेत्र की कोटि इ गुणित त्रिगुणितभुजवर्ग के तुल्य है ते। भुज, कोटि और वक्र के चाप से जो त्रिभुज होगा उस का क्या क्षेत्रफल होगा?। इस का क्षेत्रफल जानने के लिये अ म=य का न तुल्य समान विभाग करो और माने। कि उन विभागें का मान क्रम से अ $अ_1$, $अ_1 अ_2$, $अ_2 अ_3$, $अ_3$ म, हैं जहां $\frac{न}{य} = अ\, अ_1 = अ_1\, अ_2 = अ_2\, अ_3 = अ_3\, म$, ते। वक्रक्षेत्र के लक्षण से

$क_2\, अ_1 = ३ इ \left(\frac{य}{न}\right)^2,\ क_1\, अ_2 = ३ इ \left(\frac{२ य}{न}\right)^2, \cdots,\ व म = ३ इ \left(\frac{न.य}{न}\right)^2$, इन सब को $\frac{य}{न}$ से गुण कर जोड़ देने से, $क_3\, अ_1$, $ल'_2\, अ_2$, इत्यादि आयतें के क्षेत्रफल का येाग

$$= ३ इ \frac{य}{न}\left(\frac{य}{न}\right)^2 + ३ इ \frac{य}{न}\left(\frac{२ य}{न}\right)^2 + \cdots + ३ इ \frac{य}{न}\left(\frac{नय}{न}\right)^2$$

$$= ३ इ \frac{य^3}{न^3}(१+४+९+\cdots+न^2) = ३ इ \frac{य^3}{न^3}\ \frac{न}{२}(न+१)\ \frac{(२न+१)}{३}$$

$$= ३ इ \frac{य^3}{२न^2}\left\{\frac{२ न^2 + ३न + १}{३}\right\} = इ\frac{य^3}{२}\left\{२ + \frac{३}{न} + \frac{१}{न^2}\right\}$$

इस समीकरण में ज्यों ज्यों न की संख्या बढ़ाते जायगे त्यों त्यों $क_3$, $ल'_2$, $ल'_1$ इत्यादि वक्र के पास पास आते जायंगे इस लिये यदि $न = \frac{१}{०}$ तो ठीक वक्रत्रिभुज का फल=$इय^3$ हुआ परन्तु यदि इस का तात्कालिक संबंध निकालेा तो $\frac{ता}{ताय}(इ य^3) = ३ इ य^2$ यह तात्कालिक संबंध वक्र की कोटि के समान होता है इसलिये ४प्रक्रम से $इय^3 = \int ३ इ य^2 ताय$ ऐसा हुआ ।

इस से यह सिद्ध होता है कि यदि तात्कालिक संबंध को उस वक्र की कोटि कल्पना करें जो कि मूलविन्दु में होकर जाता हो तो जिस फल का यह तात्कालिक संबंध है वह फल उस वक्र त्रिभुज का फल होगा जो कि भुज, कोटि और वक्र के चाप से बनता है। अब जिस प्रकार से

$३ इय^२ ताय$ पर से $इय^३$ का मान निकले उस प्रकार का जो वर्णन करे उसको चलराशिकलन कहते हैं। इस उदाहरण से स्पष्ट है कि यदि चलनकलन, और चलराशिकलन का लक्षण लाघव से कहें तो ऐसा होगा कि स्वतन्त्रराशि के फल पर से उसकी तात्कालिको गति ले आवे उसे चलनकलन और तात्कालिको गति पर से जो स्वतन्त्रराशि का फल ले आवे उसे चलराशिकलन कहना चाहिये।

६। चलनकलन से सिद्ध है कि $ता\{फ(य)+स्थि\} = ताफ(य)$ इस लिये $\int ताफ(य)= फ(य)$, वा $फ (य)+स्थि$ इस से यह समझना चाहिये कि तात्कालिको गति पर से जो फल निकलता है उसमें यदि स्थिर संख्या जोड़ दें तो जोड़े हुए फल की भी वही तात्कालिकी गति आवेगी परन्तु चलराशिकलन से तात्कालिकी गति पर से जो फल आते हैं वे शुद्ध विना स्थिर के जोड़े आते हैं विद्यार्थियों को चाहिये कि सर्वत्र जहां तात्कालिकी गति पर से चलराशिकलन के प्रकार से फल सिद्ध हो वहां उस फल में कोई स्थिरसंख्या भी जोड़ें जिस स्थिर का मान, फल में स्वतन्त्रराशि के स्थान में शून्य का वा किसी विशेष संख्या का उत्थापन देने से, ज्ञात हो सकता है। जैसे ५ प्रक्रम के उदाहरण में $फल=\int ३ इय^२ ताय=फ+स्थि=इ\cdot य^३$। अब $फ+स्थि=इय^३$ इस समीकरण में यदि $य=0$ तो क्षेत्र देखने से स्पष्ट है कि क्षेत्रफल शून्य होगा $\therefore 0+स्थि=इ\ (0)^३ \therefore स्थि=0$, इसी प्रकार स्वतन्त्रराशि में ऐसी संख्या का उत्थापन देना चाहिये जिसमें फल का मान व्यक्त हो फिर उस मान पर से स्थिराङ्क का ज्ञान शीघ्र हो जायगा।

७। चलनकलन की विपरीत क्रिया से स्पष्ट है कि,

$\int स्थिफ(य)ताय=स्थि\int फ(य)\ ताय$ ....

$$\int\{\text{फ}(\text{य})\text{ताय}+\text{फा}(\text{य})\text{ताय}\}=\int\text{फ}(\text{य})\text{ताय}+\int\text{फा}(\text{य})\text{ताय}$$

$$\int\text{य}^{\text{म}}\text{ताय}=\frac{\text{य}^{\text{म}+१}}{\text{म}+१},\quad\int\frac{\text{ताय}}{\text{य}}=\text{लाय}\text{ ।}$$

$$\int\text{अ}^{\text{य}}\text{ताय}=\frac{\text{अ}^{\text{य}}}{\text{ला}_{\text{इ}}\text{अ}},\quad\int\text{इ}^{\text{य}}\text{ताय}=\text{इ}^{\text{य}}\text{ ।}$$

$$\int\text{ज्याय}\text{ताय}=-\text{कोज्याय},\quad\int\text{कोज्याय}\text{ताय}=\text{ज्याय}\text{ ।}$$

$$\int\frac{\text{ताय}}{\text{कोज्या}^{२}\text{य}}=\text{स्प य},\quad\int\frac{\text{ताय}}{\text{ज्या}^{२}\text{य}}=-\text{कोस्पय}\text{ ।}$$

$$\int\frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{अ}^{२}-\text{य}^{२}}}=\text{ज्या}^{-१}\frac{\text{य}}{\text{अ}}\quad\text{वा}=-\text{कोज्या}^{-१}\frac{\text{य}}{\text{अ}}$$

$$\int\frac{\text{ताय}}{\text{अ}^{२}+\text{य}^{२}}=\frac{१}{\text{अ}}\text{स्प}^{-१}\frac{\text{य}}{\text{अ}}\text{ वा}=-\frac{१}{\text{अ}}\text{कोस्प}^{-१}\frac{\text{य}}{\text{अ}}$$

८ । इनका स्मरण होने के लिये श्लोक और दोहे ।

श्लोक ।

चल: स्थिरघ्नविहृतश्चलो ऽन्यो यदि तद्गति: ।
तुल्याऽऽद्यचलगत्या स्यात् स्थिरघ्नहृतया तया ॥ १ ॥
यद्गतिर्भुक्तियोगेन समा स्याद्यच तन्मिति: ।
भुक्त्युत्थचलयोगेन समाना चलकोविद ॥ २ ॥
सैकघातश्चलस्याप्त: सैकतद्घातसंख्यया ।
चलोऽन्यो यद्गती राशिघातराशिजवाहति : ॥ ३ ॥
यस्य भुक्तौ हरगतिर्लवमानं भवेद्धि स: ।
हरस्य लघुरिक्थेन समानो भवति ध्रुवम् ॥ ४ ॥

चलराशिसमः स्थिराङ्कघातः
प्रथमस्तद्गुतराशिभुक्तिरस्ति ।
अपरस्य गतिस्तदा स्थिराङ्क—
लघुरिकथाप्र इहाऽऽद्य एव चान्यः ॥ ५ ॥
चलज्या गुणिता भुक्तिर्यद्गतिस्तन्मितिर्भवेत् ।
चलकोटिज्यया तुल्या चयगा चलयुक्तितः ॥ ६ ॥
चलकोटिज्यया निघ्नी भुक्तिर्यस्य गतिर्भवेत् ।
चलजीवासमानं तन्मानं ज्ञेयं मनीषिभिः ॥ ७ ॥
चलकोटिज्यकावर्गभक्ता भुक्तिर्हि यद्गतिः ।
चलजस्पर्शरेखैव तन्मानं स्याच्चलोक्तितः ॥ ८ ॥
चलज्याकृतिसंभक्ता भुक्तिर्यस्य गतिर्भवेत् ।
तन्मानं चलजा कोटिस्पर्शरेखा चयात्मिका ॥ ९ ॥
राशिवर्गानितस्थैर्यवर्गमूलहृता गतिः ।
यद्गतिस्तन्मितिः स्थैर्यभक्तराशेर्धनुर्भवेत् ॥ १० ॥
स्थिरचक्तनवर्गयोगभक्ता
गतिरस्तीह गतिर्यदान्यराशेः ।
स्थिरभक्तचलस्य यद्धनुर्भा—
शकलैस्ततस्थिरभक्तमन्यमानम् ॥ ११ ॥

दोहा।

जो चल थिर से गुणित वा भाजित हो चल आन।
आदि गती स्थिरगुणित वा भाजित ता गति जान ॥ १ ॥
कइ गति के युति तुल्य हो जाकी गति ता मान ।
सब गति के चल योगसम जानहु सकल सुजान ॥ २ ॥
राशिघातहत राशिगति जाको गति सो जान ।
सैकघात हृत राशि को सैकघातसम मान ॥ ३ ॥
जाकी गति में हर गती अंशमान जो होय ।
इ अधार लघुरिक्थ जो हर को है वह सोय ॥ ४ ॥

चौपाई ।

चलराशीसम थिर को घाता । आदि सो गुणित राशि गति ताता ॥
जाकी गति सो आदि प्रमाना । थिर लघुरिक्थ विभाजित जाना॥ ५ ॥

दोहा ।

चलजीवा से गुणित चलगति जाको गति होय ।
चलकोटिज्या के करहु ऋण तुम जानहु सोय ॥ ६ ॥
चलकोटिज्यागुणित चलगति जाकी गति होय ।
चलजीवा के तुल्य तेहि कहहु युक्ति जिय जोय ॥ ७ ॥
चलकोटिज्यावर्गहृत चलगति जाकी भुक्ति ।
स्पर्शरेखिका चलहि को ताहि कहहु लखि सूक्ति ॥ ८ ॥
चलजीवाकृतिभक्त जो चलगति जाकी भुक्ति ।
चल को कोटिस्पर्श ऋण रेखा कहु लखि युक्ति ॥ ९ ॥
स्थिरकृति में चलवर्ग ऋण तेहि पदहृत गति होय ।
जाकी स्थिरहृत चलहि को चाप कहहु तुम सोय ॥ १० ॥

चौपाई ।

स्थिरचञ्चलकृतियोगविभाजित ।
चलगति जाकी गति सो साधित ॥
स्थिरहृत चल को चाप बनावहु ।
स्पर्शखण्ड से सो स्थिर भाजहु ॥ ११ ॥

८ । इस प्रक्रम में पूर्व प्रकारों का अभ्यास होने के लिये कुछ उदाहरण दिखाते हैं ।

उदाहरण ।

(१) $\frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}}}$ इस गति की चलराशि ले आवो? ।

यहां $\frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}}} = \text{ताय}\cdot\text{य}^{-\frac{१}{२}} \therefore \int \text{ताय}\cdot\text{य}^{-\frac{१}{२}} = \text{२ य}^{\frac{१}{२}}$, (३ सूत्र से)

२। ताय $(\text{क}+\text{अ य}^{\text{न}})^{\text{म}}\cdot\text{य}^{\text{ग}}$, इस की चलराशि ले आवो ?।

यहां द्वियुक्पदसिद्धान्त से

$$(\text{क}+\text{अ य}^{\text{न}})^{\text{म}} = \text{क}^{\text{म}} + \text{म क}^{\text{म}-१}(\text{अ य}^{\text{न}}) + \frac{\text{म}(\text{म}-१)}{\lfloor\underline{२}}\text{क}^{\text{म}-२}(\text{अ य}^{\text{न}})^{२} + \cdots$$

$$\therefore \text{ताय}(\text{क}+\text{अ}\cdot\text{य}^{\text{न}})^{\text{म}}\text{य}^{\text{ग}} = \text{क}^{\text{म}}\text{य}^{\text{ग}}\text{ताय} + \text{अ म क}^{\text{म}-१}\text{य}^{\text{न}+\text{ग}}\text{ताय}$$

$$+\text{अ}^{२}\frac{\text{म}(\text{म}-१)}{\lfloor\underline{२}}\text{क}^{\text{म}-२}\text{य}^{२\text{न}+\text{ग}}\text{ताय} + \cdots$$

$$\therefore \int \text{ताय}(\text{क}+\text{अ य}^{\text{न}})^{\text{म}}\text{य}^{\text{ग}} = \int \text{क}^{\text{म}}\text{य}^{\text{ग}}\text{ताय} + \int \text{अ म क}^{\text{म}-१}\text{य}^{\text{न}+\text{ग}}\text{ताय} + \cdots$$

$$= \text{क}^{\text{म}}\int \text{य}^{\text{ग}}\text{ताय} + \text{अ म क}^{\text{म}-१}\int \text{य}^{\text{न}+\text{ग}}\text{ताय}$$

$$+\text{अ}^{२}\frac{\text{म}(\text{म}-१)}{\lfloor\underline{२}}\text{क}^{\text{म}-२}\int \text{य}^{२\text{न}+\text{ग}}\text{ताय} + \cdots \qquad \text{(२ सूत्र से)}$$

$$= \frac{\text{क}^{\text{म}}}{\text{ग}+१}\text{य}^{\text{ग}+१} + \frac{\text{अ म क}^{\text{म}-१}}{\text{न}+\text{ग}+१}\text{य}^{\text{न}+\text{ग}+१} +$$

$$\frac{\text{अ}^{२}\cdot\text{म}(\text{म}-१)\text{क}^{\text{म}-२}}{(२\text{न}+\text{ग}+१)\lfloor\underline{२}} + \cdots \quad \text{(३ सूत्र से)}$$

३। $\frac{\text{य}^{\text{म}}\cdot\text{ताय}}{(\text{अ}+\text{क य})^{\text{न}}}$ इस की चलराशि बतावो ?। यहां म और न दोनों अभिन्न और धन संख्या हैं।

यहां कल्पना करो कि अ+क य=ल $\therefore \text{य} = \frac{\text{ल}-\text{अ}}{\text{क}}$, और $\text{ताय} = \frac{\text{ताल}}{\text{क}}$ ।

इन का उत्थापन देने से $\frac{\text{य}^{\text{म}}\cdot\text{ताय}}{(\text{अ}+\text{कय})^{\text{न}}} = \frac{\text{य}^{\text{म}}\,\text{ताल}}{\text{क}\cdot\text{ल}^{\text{न}}} = \frac{(\text{ल}-\text{अ})^{\text{म}}\,\text{ताल}}{\text{क}^{\text{म}+१}\text{ल}^{\text{न}}}$

$$\therefore \int \frac{\text{य}^{\text{म}}\text{ताय}}{(\text{अ}+\text{क य})} = \int \frac{(\text{ल}-\text{अ})^{\text{म}}\,\text{ताल}}{\text{क}^{\text{म}+१}\text{ल}^{\text{न}}} = \frac{१}{\text{क}^{\text{म}+१}}\int \frac{(\text{ल}-\text{अ})^{\text{म}}\,\text{ताल}}{\text{ल}^{\text{म}}},$$

अब इस पर से (द्वियुक्पदसिद्धान्त से) चलराशि जान सकते हो ।

४ । कोज्या^{२}य· ताय, ज्या^{२}यताय इन की चलराशि क्या हैं ? ।

यहां त्रिकोणमिति से कोज्या^{२}य$=\frac{१+\text{कोज्या}\,२\,य}{२}$, इस लिये

$$\text{कोज्या}^{२}य\,ताय=\frac{१+\text{कोज्या}\,२\,य}{२}ताय,\ \text{यहां यदि}\ २य=र,\ \text{तो}\ ताय=\frac{तार}{२}$$

$$\therefore \text{कोज्या}^{२}य\,ताय=\int\left\{\frac{१+\text{कोज्या}२य}{२}ताय\right\}=\int\left\{\frac{तार}{४}+\frac{\text{कोज्या}\,र}{४}तार\right\}$$

$$=\tfrac{१}{४}\int तार+\tfrac{१}{४}\int \text{कोज्या}र\,तार=\frac{र+\text{ज्या}र}{४}=\frac{२य+\text{ज्या}\,२\,य}{४}(\text{७ सूत्र से})$$

इसी प्रकार

$$\text{ज्या}^{२}य\,ताय=\frac{१-\text{कोज्या}\,२\,य}{२}ताय\ \therefore\int \text{ज्या}^{२}य\ ताय=\frac{२य-\text{ज्या}२य}{४}$$

५ । $\frac{ताय}{\sqrt{२अय-य^{२}}}$ इस की चलराशि क्या है ? ।

कल्पना करो कि य=अ−ल ∴ ताय=−ताल,

और $\sqrt{२अय-य^{२}}=\sqrt{२अ(अ-ल)-(अ-ल)^{२}}=\sqrt{अ^{२}-ल^{२}}$

$$\therefore\int\frac{ताय}{\sqrt{२अय-य^{२}}}=\int-\frac{ताल}{\sqrt{अ^{२}-ल^{२}}}=\text{कोज्या}^{-१}\frac{ल}{अ}=\text{कोज्या}^{-१}\frac{अ-य}{अ}$$

$$=\text{उज्या}^{-१}\frac{य}{अ}(\text{१० सूत्र से})$$

६ । $\frac{ताय}{\sqrt{य^{२}+अ^{२}}}$ इस की चलसंख्या बतावो ? ।

कल्पना करो कि $\sqrt{य^2+अ^2}=ल-य \therefore य^2-२यल+ल^2=य^2+अ^2$

और $य=\frac{ल^2-अ^2}{२ल} \therefore ताय=\frac{४ल^2 ताल-२ताल(ल^2-अ^2)}{४ल^2}$

$=\frac{२ताल(ल^2+अ^2)}{४ल^2}=\frac{ताल(ल^2+अ^2)}{२ल^2}$, और जब $य=\frac{ल^2-अ^2}{२ल}$

$\therefore ल-य=ल-\frac{ल^2-अ^2}{२ल}=\frac{ल^2+अ^2}{२ल}$ इन का उत्थापन देने से

$$\int\frac{ताय}{\sqrt{य^2+अ^2}}=\int\frac{\frac{ताल(ल^2+अ^2)}{२ल^2}}{\frac{ल^2+अ^2}{२ल}}=\int\frac{ताल}{ल}=लाल$$

$=ला(\sqrt{य^2+अ^2}+य)$ (४ सूत्र से)

७। $\frac{ताय}{कोज्याय}$ इस की चलसंख्या बतावो ?।

$$\int\frac{ताय}{कोज्याय}=\frac{कोज्यायताय}{कोज्या^2य}=\int\frac{कोज्यायताय}{१-ज्या^2य}=\int\frac{ताल}{१-ल^2}\ (यदि\ ल=ज्याय)$$

$$=\int\tfrac{१}{२}\left\{\frac{ताल}{१-ल}+\frac{ताल}{१+ल}\right\}=\tfrac{१}{२}\left\{\int\frac{ताल}{१+ल}-\int\frac{-ताल}{१-ल}\right\}$$

$$=\tfrac{१}{२}\left\{ला(१+ल)-ला(१-ल)\right\}=ला\sqrt{\frac{१+ज्याय}{१-ज्याय}}$$

$$=लाकोस्प\left(\frac{\pi}{४}-\frac{य}{२}\right)$$

इसी प्रकार $\int\frac{ताय}{ज्याय}=लास्प\frac{य}{२}$,

८ । $\frac{\text{ताय}}{१^२-\text{य}^२}$ इस की चलसंख्या क्या है ?।

$$\frac{\text{ताय}}{१^२-\text{य}^२}=\frac{१}{२}\left(\frac{\text{ताय}}{१-\text{य}}+\frac{\text{ताय}}{१+\text{य}}\right) \quad \therefore \text{ ७ उदाहरण के ऐसा}$$

$$\int\frac{\text{ताय}}{१^२-\text{य}^२}=\frac{१}{२}\text{ला }\frac{१+\text{य}}{१-\text{य}}, \text{ इस में यदि य=य}\sqrt{-१}$$

$$\text{तो}\int\frac{\text{ताय}\sqrt{-१}}{१+\text{य}^२}=\frac{१}{२}\text{ला}\frac{१+\text{य}\sqrt{-१}}{१-\text{य}\sqrt{-१}} \text{ वा } \int\frac{\text{ताय}}{१+\text{य}^२}=\frac{१}{२\sqrt{-१}}\text{ला }\frac{१+\text{य}\sqrt{-१}}{१-\text{य}\sqrt{-१}}$$

$$\text{परन्तु ११ सूत्र से }\int\frac{\text{ताय}}{१+\text{य}^२}=\text{स्प}^{-१}\text{य}$$

$$\therefore \quad \text{स्प}^{-१}\text{ य}=\frac{१}{२\sqrt{-१}}\text{ला }\frac{१+\text{य}\sqrt{-१}}{१-\text{य}\sqrt{-१}}$$

$$\text{वा, स्प}^{-१}\text{य}=\frac{१}{२\sqrt{-१}}\text{ला }\frac{१+\text{य}\sqrt{-१}}{१-\text{य}\sqrt{-१}}+\text{स्थि}$$

यहां कल्पना करो कि $\text{य}=\text{स्प प} \therefore \text{स्प}^{-१}\text{य}=\text{प}$

$$\text{इस लिये प}=\frac{१}{२\sqrt{-१}}\text{ ला }\frac{१+\text{य}\sqrt{-१}}{१-\text{य}\sqrt{-१}}+\text{स्थि, यदि प=0, तो य=0}\therefore\text{स्थि=0}$$

$$\text{तब प}=\frac{१}{२\sqrt{-१}}\text{ला}\frac{१+\text{य}\sqrt{-१}}{१-\text{य}\sqrt{-१}}$$

$$\text{वा इ}^{२\text{प}\sqrt{-१}}=\frac{१+\text{स्प प}\sqrt{-१}}{१-\text{स्पप}\sqrt{-१}}=\frac{\text{को ज्या प+ज्या प}\sqrt{-१}}{\text{को ज्या प}-\text{ज्या प}\sqrt{-१}}$$

$$=\left\{\text{को ज्या प+ज्याप}\sqrt{-१}\right\}^२$$

$\therefore$ इ$^{\text{प}\sqrt{-1}}$ = कोज्याप + ज्याप$\sqrt{-1}$, वा इ$^{-\text{प}\sqrt{-1}}$
= कोज्याप − ज्याप$\sqrt{-1}$ (चलनकलन में डेमाइवर का सिद्धान्त देखो)

९। $\dfrac{\text{ताय}}{\text{य}\sqrt{२\,\text{अ}\,\text{य}-\text{अ}^२}}$ इस की चलसंख्या क्या है ?।

कल्पना करो कि २ अ य − अ^२ = ल^२ $\therefore \dfrac{\text{ल}^२+\text{अ}^२}{२\,\text{अ}} = \text{य}$

और ताय $= \dfrac{२\,\text{लताल}}{२\,\text{अ}} = \dfrac{\text{लताल}}{\text{अ}}$

इस लिये $\int \dfrac{\text{ताय}}{\text{य}\sqrt{२\,\text{अ}\,\text{य}-\text{अ}\,२}} = \int \dfrac{\frac{\text{लताल}}{\text{अ}}}{\frac{\text{ल}^२+\text{अ}^२}{२\,\text{अ}}\cdot\text{ल}} = \int \dfrac{२\,\text{ताल}}{\text{अ}^२+\text{ल}^२}$

$= २\int \dfrac{\text{ताल}}{\text{अ}^२+\text{ल}^२} = \dfrac{२}{\text{अ}}\text{स्प}^{-१}\dfrac{\text{ल}}{\text{अ}} = \dfrac{२}{\text{अ}}\text{स्प}^{-१}\dfrac{\sqrt{२\text{य}-\text{अ}^२}}{\text{अ}}$ (११ सूत्र से)

१०। $\dfrac{\text{ताय}}{\text{अ}+\text{क}\,\text{य}^२}$ इस की चलसंख्या क्या है ?।

$\int\dfrac{\text{ताय}}{\text{अ}+\text{क}\text{य}^२} = \dfrac{१}{\text{अ}}\int\dfrac{\text{ताय}}{१+\frac{\text{क}}{\text{अ}}\text{य}^२}$, यहां यदि ल = य$\sqrt{\frac{\text{क}}{\text{अ}}}$ तो य = ल$\sqrt{\frac{\text{अ}}{\text{क}}}$

$\therefore$ ताय = ताल$\sqrt{\frac{\text{अ}}{\text{क}}}$

इस लिये $\dfrac{१}{\text{अ}}\int\dfrac{\text{ताय}}{१+\frac{\text{क}}{\text{अ}}\text{य}^२} = \dfrac{१}{\text{अ}}\int\dfrac{\text{ताल}\sqrt{\frac{\text{अ}}{\text{क}}}}{१+\text{ल}^२} = \dfrac{\sqrt{\text{अ}}}{\text{अ}\sqrt{\text{क}}}\int\dfrac{\text{ताल}}{१+\text{ल}^२} = \dfrac{१}{\sqrt{\text{अ}\,\text{क}}}$

स्प$^{-१}$ ल $= \dfrac{१}{\sqrt{\text{अ}\,\text{क}}}\text{स्प}^{-१}\left\{\text{य}\sqrt{\frac{\text{क}}{\text{अ}}}\right\}$

११। $\dfrac{\text{ताय}\cdot\text{य}^५}{१+\text{य}^२}$ इस की चलसंख्या क्या है ?।

$$\frac{\text{य}^{५}}{१+\text{य}^{२}} = \text{य}^{३} - \text{य} + \frac{\text{य}}{१+\text{य}^{२}}$$

इस लिये $\int \frac{\text{य}^{५}\,\text{ताय}}{१+\text{य}^{२}} = \int \text{य}^{३}\,\text{ताय} - \int \text{यताय} + \int \frac{\text{यताय}}{१+\text{य}^{२}}$

$$= \frac{\text{य}^{४}}{४} - \frac{\text{य}^{२}}{२} + \frac{१}{२}\text{ला}\,(१+\text{य}^{२})$$

१२। $\frac{(\text{अ}+\text{क})\,\text{ताय}}{\text{अ}\,\text{य}^{४}+\text{क}\,\text{य}^{२}}$ इस की चलसंख्या क्या है?।

कल्पना करो कि $\text{य} = \frac{१}{\text{र}} \therefore \text{ताय} = -\frac{\text{तार}}{\text{र}^{२}}$

इस लिये $\frac{(\text{अ}+\text{क})\text{ताय}}{\text{अ}\,\text{य}^{४}+\text{क}\,\text{य}^{२}} = -\frac{(\text{अ}+\text{क})\,\text{तार}}{\text{र}^{२}\cdot\text{य}^{२}(\text{अ}\,\text{य}^{२}+\text{क})} = -\frac{(\text{अ}+\text{क})\,\text{तार}}{(\text{अ}\,\text{य}^{२}+\text{क})}$

$$= -\frac{(\text{अ}+\text{क})\,\text{तार}}{\frac{\text{अ}+\text{क}\text{र}^{२}}{\text{र}^{२}}} = -\frac{(\text{अ}+\text{क})\,\text{र}^{२}\,\text{तार}}{\text{अ}+\text{क}\text{र}^{२}}$$

$$\therefore \int \frac{\text{ताय}\,(\text{अ}+\text{क})}{\text{अ}\,\text{य}^{४}+\text{क}\text{य}^{२}} = -(\text{अ}+\text{क})\int \frac{\text{र}^{२}\,\text{तार}}{\text{अ}+\text{क}\cdot\text{र}^{२}} = -\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{क}}\int \frac{\text{र}^{२}\text{तार}}{\frac{\text{अ}}{\text{क}}+\text{र}^{२}}$$

$$= -\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{क}}\int\left\{\text{तार} - \frac{\frac{\text{अ}}{\text{क}}\,\text{तार}}{\frac{\text{अ}}{\text{क}}+\text{र}^{२}}\right\} = -\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{क}}\left\{\int\text{तार} - \frac{\text{अ}}{\text{क}}\int\frac{\text{तार}}{\frac{\text{अ}}{\text{क}}+\text{र}^{२}}\right\}$$

$$= -\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{क}}\left\{\text{र} - \frac{\text{अ}}{\text{क}}\sqrt{\frac{\text{क}}{\text{अ}}}\,\text{स्प}^{-१}\left(\frac{\text{र}\sqrt{\text{क}}}{\sqrt{\text{अ}}}\right)\right\} = -\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{क}}\left\{\text{र} - \sqrt{\frac{\text{अ}}{\text{क}}}\,\text{स्प}^{-१}\,\text{र}\sqrt{\frac{\text{क}}{\text{अ}}}\right\}$$

$$= -\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{क}}\left\{\frac{१}{\text{य}} - \frac{\text{अ}}{\text{क}}\,\text{स्प}^{-१}\,\frac{\sqrt{\text{क}}}{\text{य}\sqrt{\text{अ}}}\right\}$$

अभ्यास के लिये और प्रश्न ।

(१) $\int \frac{\text{ज्यायताय}}{\text{कोज्याय}}$, उ० लाछे य।

(२) $\int \frac{\text{ताय}}{\text{अय}+\text{क}\sqrt{\text{य}}}$ .. .. उ० $\frac{\text{२}}{\text{अ}}\text{ला}(\text{अ}\sqrt{\text{य}}+\text{क})$

(३) $\int \text{ताय}\left(\sqrt{\text{य}}+\sqrt[3]{\text{य}}\right)$ .. .. उ० $\frac{\text{२ य}^{\frac{3}{2}}}{\text{३}}+\frac{\text{३}}{\text{४}}\text{य}^{\frac{4}{3}}$

(४) $\int \text{ताय}(\text{य}^{-3}+\text{य}^{-1}+\text{अ})$ .. उ० $\frac{\text{२अ य}^{3}+\text{२य}^{2}\,\text{ला य}-\text{१}}{\text{२ य}^{2}}$

(५) $\int \frac{\text{ताय}}{\text{अ}^{2}-\text{य}^{2}}$ .. उ०, $\frac{\text{१}}{\text{२ अ}}\,\text{ला}\frac{\text{अ}+\text{य}}{\text{अ}-\text{य}}$,

(६) $\int \frac{\text{ताय}\cdot\text{क}}{\text{यलाय}}$ .. .. उ०, क· ला (लाय)

(७) $\int \text{कोस्पयताय}$ .. उ० लाज्याय

(८) $\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{४}-\text{य}^{2}}}$ .. .. उ० $\text{ज्या}^{-1}\frac{\text{य}}{\text{२}}$

(९) $\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{८}-\text{२य}-\text{य}^{2}}}$ .. .. उ० $\text{ज्या}^{-1}\frac{\text{१}+\text{य}}{\text{२}}$

(१०) $\int \frac{\text{ताय}}{\text{१०}+\text{२ य}+\text{य}^{2}}$ .. .. उ०, $\frac{\text{१}}{\text{३}}\text{स्प}^{-1}\frac{\text{य}+\text{१}}{\text{३}}$

(११) $\int \frac{\text{ताय}\cdot\text{य}^{७}}{\text{य}^{२}+४} \quad .. \quad \text{उ०}, \frac{\text{य}^{६}}{६} - \text{य}^{४} + ८\text{य}^{२} - ३२\,\text{ला}(\text{य}^{२}+४)$

(१२) $\int \frac{५\,\text{ताय}}{४\,\text{य}^{४}+\text{य}^{२}} \quad .. \quad \text{उ०}\ ५(२\,\text{स्प}^{-१}\frac{१}{२\,\text{य}} - \frac{१}{\text{य}})$

(१३) $\int \frac{\text{ताय}}{\text{अ}+\text{क}\,\text{य}} \quad .. \quad \text{उ०}\ \text{ला}\,(\text{क}\sqrt{\text{अ}+\text{क}\,\text{य}})$

(१४) $\int \frac{(१०\,\text{य}^{९}+६\,\text{य}^{८})\,\text{ता}\,\text{य}}{(\text{य}^{१०}+\text{य}^{६})^{\frac{४}{७}}} \quad \text{उ०}\ \frac{७}{३}(\text{य}^{१०}+\text{य}^{६})^{\frac{३}{७}}$

(१५) $\int \frac{\left\{\frac{\text{न}\cdot\text{य}^{\text{न}-१}+(\text{न}-१)\,\text{य}^{\text{न}-२}}{\text{न}}\right\}\text{ताय}}{(\text{य}^{\text{न}}+\text{य}^{\text{न}-१})^{\frac{\text{अ}}{\text{क}}}} \quad \text{उ०}\ \frac{\text{क}(\text{य}^{\text{न}}+\text{य}^{\text{न}-१})^{\frac{\text{क}-\text{अ}}{\text{क}}}}{\text{न}\,(\text{क}-\text{अ})}$

(१६) $\int \frac{(\sqrt{\text{य}^{२}+६}+\text{य})^{२}\,\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^{२}+६}}, \quad \text{उ०}\ \frac{१}{२}\,(\text{य}+\sqrt{\text{य}^{२}+६})^{२}$

(१७) $\int \frac{२\text{य}\,\text{ताय}}{(\text{य}^{२}+१)^{२}} \quad .. \quad \text{उ०}, -\frac{१}{\text{य}^{२}+१}$

(१८) $\int \frac{\text{क}\cdot\text{य}^{५}\text{ता}\,\text{य}}{\text{य}^{२}+१} \quad .. \quad \text{उ०}, \text{क}\left\{\frac{\text{य}^{४}}{४} - \frac{\text{य}^{२}}{२} + \text{ल}\sqrt{\text{य}^{२}+१}\right\}$

(१९) $\int (\text{अ}+\text{य}^{२})\,(\text{अ}+\text{य})\,\text{ताय} \ .. \ \text{उ०},\ \text{अ}^{२}\text{य}+\frac{\text{अ}\cdot\text{य}^{२}}{२}+\frac{\text{अ}\cdot\text{य}^{३}}{३}+\frac{\text{य}^{४}}{४}$

(२०) $\int (\text{अ}^{२}+\text{य}^{२})(\text{अ}+\text{य})\,\text{य}\,\text{ताय}, \ .. \ \text{उ०},\ \frac{\text{अ}^{३}\text{य}^{२}}{२}+\frac{\text{अ}^{२}\cdot\text{य}^{३}}{३}+\frac{\text{अ}\cdot\text{य}^{४}}{४}+\frac{\text{य}^{५}}{५}$

(२१) $\int \frac{(१+\text{य})^{२}\,(१-\text{य})\,\text{ता}\,\text{य}}{\text{य}^{२}}, \ .. \ \text{उ०},\ \text{ला}\text{य} - \text{य} - \frac{\text{य}^{२}}{२} - \frac{१}{\text{य}}$ ।

(२२) $\int \frac{\text{य}^{२} \sqrt{\text{य}}\, \text{ताय}}{१+\text{य}}$, उ०, $\frac{२}{५}\text{य}^{\frac{५}{२}} - \frac{२}{३}\text{य}^{\frac{३}{२}} + २\text{य}^{\frac{१}{२}} - २\text{स्प}^{-१}\text{य}^{\frac{१}{२}}$,

(२३) $\int (\text{अ}+\text{क}\,\text{य}^{\text{न}})^{\text{म}}\,\text{न}\,\text{क}\cdot\text{य}^{\text{न}-१}\,\text{ताय}$, उ०, $\frac{(\text{अ}+\text{क}\,\text{य}^{\text{न}})^{\text{म}+१}}{\text{म}+१}$,

उदाहरण

(२४) एक चोर अ स्थान से एक हीरे को चुरा कर भागा। जब अ स्थान से पौन मील दूर जा चुका तब उस को पकड़ने के लिये एक सिपाही अ स्थान से दौड़ा इस सिपाही के प्रतिक्षण की गति चोर की गति से अ स्थान से चोर की दूरी जो हो उतनी गुणित है तो बतावो कि अ स्थान से कितनी दूर पर चोर पकड़ा गया ?। उत्तर, $२\frac{१}{४}$ मील।

(२५) एक हीरे के मोल की बाढ़ एक राजा के आमदनी की बाढ़ से आमदनी के वर्ग को गुणने से जो हो सो होती है तो बतावो कि जब राजा की आमदनी तीन लाख हो तो हीरे का क्या मोल होगा ?।

उत्तर, ९×१०^{१५} हीरे का मोल।

९। कल्पना करो कि $\int \frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}} = \text{ला}\{\text{फ(य)}+\text{र}\}$ जहां र, य का कोई फल है तो तात्कालिक गति बनाने से

$\frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}} = \frac{\text{फ}'\text{(य)ताय}+\text{तार}}{\text{फ(य)}+\text{र}} \therefore \text{फ(य)ताय} + \text{ताय}\cdot\text{र}$

$= \text{फ}'\text{(य)ताय फ(य)} + \text{तार फ(य)}$ पक्षान्तरनयन से और परस्पर भाग देने से

$\frac{\text{ताय}-\text{तार}}{\text{फ(य)}\,\text{फ}'\text{(य)}-\text{र}} = \frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}}$ यहां यदि $\text{फ}'\text{(य)फ(य)} = \text{य}$, तो

$\frac{\text{ताय}-\text{तार}}{\text{य}-\text{र}} = \frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}} \therefore \int\frac{\text{ताय}-\text{तार}}{\text{य}-\text{र}} = \int\frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}}$

$\therefore \text{ला(य}-\text{र)} = \text{ला}\{\text{फ(य)}+\text{र}\} \therefore \text{य}-\text{र} = \text{फ(य)}+\text{र}$

तब $\text{र} = \frac{\text{य}-\text{फ(य)}}{२}$ और $\text{फ(य)}+\text{र} = \frac{\text{य}+\text{फ(य)}}{२}$

इस लिये $\int \frac{ताय}{फ(य)} = ला \left(\frac{य+फ(य)}{२}\right) = ला \{य+फ(य)\} - ला_{२}$

स्थिराङ्क को छोड़ देने से $\int \frac{ताय}{फ(य)} = ला \{य+फ(य)\}$

जैसे (१) उदाहरण, $\int \frac{ताय}{य}$ यहां $फ(य) = य$, और $फ'(य) = १$

$\therefore$ $फ(य)\ फ'(य) = य$, इस लिये $\int \frac{ताय}{य} = ला \{य+फ(य)\} = ला\,२\,य$

$= लाय + ला_{२}$ स्थिराङ्क को निकास लेने से $\int \frac{ताय}{य} = लाय$ ।

ऐसा ही पहले भी सिद्ध है ।

(२) उदाहरण, $\int \frac{ताय}{\sqrt{य^{२} \pm अ^{२}}}$ यहां $फ(य) = \sqrt{य^{२} \pm अ^{२}}$

इस लिये $फ'(य) = \frac{य}{\sqrt{य^{२} \pm अ^{२}}}$ और $फ(य)\ फ'(य) = य$, इस लिये

ऊपर की युक्ति से $\int \frac{ताय}{\sqrt{य^{२} \pm अ^{२}}} = ला \left(य + \sqrt{य^{२} \pm अ^{२}}\right)$ यही पहले भी

सिद्ध हुआ है ।

(३) उदाहरण, $\int \frac{ताय}{\sqrt{(य^{२} \pm २अय}} = \int \frac{ताय}{\sqrt{(य \pm अ)^{२} - अ^{२}}} = \int \frac{तार}{\sqrt{र^{२} - अ^{२}}}$

यदि $र = य \pm अ$, ।

तब दूसरे उदाहरण से $\int \frac{तार}{\sqrt{र^{२} - अर}} = \int \frac{ताय}{\sqrt{य^{२} \pm २अय}}$

$= ला(र + र\sqrt{^{२}अर}) = ला\left(य \pm अ + \sqrt{य^{२} \pm २अय}\right)$

(२) उदाहरण की सिद्धि के लिये टाड् हण्टर (Todhunter) और विलिअमसन् (Williamson) साहब ने $\sqrt{य^{२} \pm अ^{२}} = ल - य$, यह कल्पना किया ।

हाइमर्स (Hymers) ने $\sqrt{य^2 \pm अ^2} = \frac{(\sqrt{य^2 \pm अ^2})(य + \sqrt{य^2 \pm अ^2})}{य + \sqrt{य^2 \pm अ^2}}$

ऐसा कर तब चलराशि सिद्ध किया, डिमार्गन (Demorgan) ने पहले $\sqrt{य^2 \pm अ^2} = र$ तब $य^2 \pm अ^2 = र^2$ $\therefore$ २ सताय = २ रतार और वा, यताय = रतार इस लिये य·ताय+र·ताय =रतार+रताय

$\therefore$ $ताय = \frac{र(ताय + तार)}{य + र}$ इस का उत्थापन देने से

$$\int \frac{ताय}{\sqrt{य^2 \pm अ^2}} = \int \frac{र(ताय + तार)}{र(य + र)} = \int \frac{ताय + तार}{य + र} = ला(य + र)$$

$= ला(य + \sqrt{य^2 \pm अ^2})$ ऐसा सिद्ध किया,

डिमार्गन साहब ने असंभव संख्या का भी उत्थापन देकर चलराशि ले आने के लिये एक दूसरी रीति लिखी है परन्तु ये सब कल्पनायें शीघ्र मन में नहीं आ सकतीं जब तक कि पहले से यह ज्ञान न हो कि $\int \frac{ताय}{\sqrt{य^2 \pm अ^2}} = ला(य + \sqrt{य^2 \pm अ^2})$ ऐसा होता है इस लिये हमारी समझ में इस प्रक्रम के आदि में हमने जो सिद्धान्त लिखा है उस से बहुत ही सहज में चलराशि सिद्ध हो जाता है।

१०। चलनकलन से सिद्ध है कि ता (च×ज) = ताच·ज+च·ताज

$\therefore \int ता(च \times ज) = \int ताच \cdot ज + \int च \cdot ताज$

$\therefore \int ताचज = च \cdot ज - \int च \cdot ताज$ इसे खण्डचलानयन कहते हैं इस पर से अनेक उदाहरण की सिद्धि बड़े लाघव से हो जाती है जैसे।

(१) उदाहरण, $\int ज्या^{-1} य \; ताय$ यहां यदि ताय = ताच और $ज्या^{-1} य = ज$ तो च=य, और $ताज = \frac{ताय}{\sqrt{1 - य^2}}$,

इस लिये $\int ज्या^{-1}य \; ताय = च \cdot ज - \int च \cdot ताज$

$$= य \cdot ज्या^{-1}य - \int \frac{य \; ताय}{\sqrt{१-य^{2}}} = य \cdot ज्या^{-1}य + \sqrt{१-य^{2}}$$

(२) उदाहरण, $\int ताय\sqrt{य^{2} \pm अ^{2}}$ यहां ताय= ताच $\therefore$ य = च

और $\sqrt{य^{2} \pm अ^{2}} = ज \;\therefore\; \frac{य \cdot ताय}{\sqrt{य^{2} \pm अ^{2}}} = ताज$,

इस लिये, $\int ताय\sqrt{य^{2} \pm अ^{2}} = य\sqrt{य^{2} \pm अ^{2}} - \int \frac{य^{2} ताय}{\sqrt{य^{2} \pm अ^{2}}}$

$$= य\sqrt{य^{2} \pm अ^{2}} - \int \frac{ताय \; (य^{2} \pm अ^{2} \pm अ^{2})}{\sqrt{य^{2} \pm अ^{2}}}$$

$$= य\sqrt{य^{2} \pm अ^{2}} - \int ताय\sqrt{य^{2} \pm अ^{2}} \int \pm अ^{2} \int \frac{ताय}{\sqrt{य^{2} \pm अ^{2}}}$$

पक्षान्तरनयन से और ६ प्रक्रम से .

$$२ \int ताय\sqrt{य^{2} \pm अ^{2}} = य\sqrt{य^{2} \pm अ^{2}} \pm \frac{अ^{2}}{२} ला \; (य + \sqrt{य^{2} \pm अ^{2}})$$

$$\therefore \int ताय\sqrt{य^{2} \pm अ^{2}} = \frac{य}{२}\sqrt{य^{2} \pm अ^{2}} \pm \frac{अ^{2}}{२} ला \; (य + \sqrt{य^{2} \pm अ^{2}})।$$

(३) उदाहरण, $\int यकोज्याअय \cdot ताय$ यहां ताच = कोज्याअय·ताय

$\therefore$ च $= \frac{ज्याअय}{अ}$ और ज = य $\therefore$ ताज = ताय

इस लिये, $\int यकोज्याअय \; ताय = \frac{य \cdot ज्याअय}{अ} - \int \frac{ज्याअय \cdot ताय}{अ}$

$$= \frac{यज्याअय}{अ} + \frac{कोज्याअय}{अ^{2}}$$

यदि $\int$ य^{2}कोज्याअयताय तो पूर्व युक्ति से

$$\int य^{2} कोज्याअय ताय = \frac{य^{2}\cdot ज्याअय}{अ} - \frac{२}{अ}\int य ज्याअय ताय$$

$$= \frac{य^{2}\cdot ज्याअय}{अ} + \frac{२}{अ}\left[\frac{य कोज्याअय}{अ} - \frac{ज्याअय}{अ^{२}}\right]$$

$$= \frac{य^{2} ज्याअय}{अ} + \frac{२ य कोज्याअय}{अ^{२}} + \frac{ज्याअय}{अ^{३}}$$

(४) उदाहरण, $\int$ य^{न}कोज्याअयताय यहां भी ताच =कोज्याअयताय ज=य^{न} मानने से ·

$$\int य^{न} कोज्याअयताय = \frac{य^{न} ज्याअय}{अ} - \frac{१}{अ}\int न\cdot य^{न-१} ज्याअयताय$$

$$= \frac{य^{न}\cdot ज्याअय}{अ} - \frac{न}{अ}\int य^{न-१} ज्याअयताय$$

फिर $\int$ य$^{न-१}$ज्याअयताय

$$= -\frac{य^{न-१} कोज्याअय}{अ} + \int (न-१) य^{न-२} कोज्याअय$$

$$= -\frac{य^{न-१} कोज्याअय}{अ} + \frac{न-१}{अ}\int य^{न-२} कोज्याअय$$

यों बार बार क्रिया करने से $\int$ य^{न}कोज्याअयताय इस का मान आजायगा ।

(५) $\int$ इ^{कय} ज्याअयताय $= \int \left\{ \frac{ज्याअय}{क} \cdot ता(इ^{कय}) \right\}$

$$= \frac{ज्याअय}{क} इ^{कय} - \int \frac{अ\cdot कोज्याअय}{क} इ^{कय} ताय$$

$$=\frac{\text{ज्याअय}}{\text{क}}\cdot\text{इ}^{\text{कय}}-\int\left\{\frac{\text{अ}\cdot\text{कोज्याअय}}{\text{क}^2}\text{ता}\left(\text{इ}^{\text{कय}}\right)\right\}$$

$$=\frac{\text{ज्याअय}}{\text{क}}\text{इ}^{\text{कय}}-\frac{\text{अकोज्याअय}}{\text{क}^2}\text{इ}^{\text{कय}}-\int\frac{\text{अ}\cdot^2\text{ज्याअय}}{\text{क}^2}\text{इ}^{\text{कय}}\,\text{ताय}$$

पक्षान्तरानयन से

$$\int\text{इ}^{\text{कय}}\text{ज्याअयताय}+\frac{\text{अ}^2}{\text{क}^2}\int\text{इ}^{\text{कय}}\text{ज्याअयताय}$$

$$=\frac{\text{अ}^2+\text{क}^2}{\text{क}^2}\int\text{इ}^{\text{कय}}\text{ज्याअयताय}=\frac{\text{इ}^{\text{कय}}}{\text{क}}\left\{\text{ज्याअय}-\frac{\text{अ}\cdot\text{कोज्याअय}}{\text{क}}\right\}$$

$$\therefore\int\text{इ}^{\text{कय}}\text{ज्याअय ताय}=\frac{\text{इ}^{\text{कय}}(\text{क ज्याअय}-\text{अकोज्याअय})}{\text{अ}^2+\text{क}^2},$$

११ । यह चलनकलन से सिद्ध है कि $\text{ता}\left(\frac{\text{च}}{\text{ज}}\right)=\frac{\text{ज}\cdot\text{ताच}-\text{चताज}}{\text{ज}^2}$

(जहां च, और ज दोनों य स्वतन्त्रराशि के फल हैं)

इस लिये $\int\text{ता}\left(\frac{\text{च}}{\text{ज}}\right)=\int\frac{\text{जताच}-\text{चताज}}{\text{ज}^2}=\int\frac{\text{ताच}}{\text{ज}}-\int\frac{\text{च}\cdot\text{ताज}}{\text{ज}^2}$

$$=\int\frac{\text{ताच}}{\text{ज}}+\int\text{च}\cdot\text{ता}\left(\frac{1}{\text{ज}}\right)$$

$\therefore\ \frac{\text{च}}{\text{ज}}-\int\frac{\text{ताच}}{\text{ज}}=\int\text{च}\cdot\text{ता}\left(\frac{1}{\text{ज}}\right)$ यह भी एक दूसरे प्रकार का खण्ड-

चलानयन है । इस को $\int\frac{\text{ताच}}{\text{ज}}=\frac{\text{च}}{\text{ज}}+\int\frac{\text{च}\cdot\text{ताज}}{\text{ज}^2}$ ऐसे भी लिख सक्ते हो ।

१२ । स्वतन्त्रराशि का चाहे जैसा फल हो परन्तु चलनकलन से उसका तात्कालिक सम्बन्ध ज्ञान सक्ते हो परन्तु यदि तात्कालिक सम्बन्ध ज्ञात हो तो चलराशिकलन से साक्षात् उसी तात्कालिक सम्बन्ध से प्रायः फल का ज्ञान नहीं होता जैसे $\frac{1}{\sqrt{य^2 \pm २अय}}$ इस तात्कालिक सम्बन्ध में जब तक एक दूसरा स्वतन्त्रराशि $र_1$=य±अ ऐसा न मानोगे तब तक चलसंख्या का जानना कठिन है । एक स्वतन्त्रराशि के स्थान में क्या जोड़ घटा वा किससे गुण भाग कर दूसरी स्वतन्त्रराशि कल्पना करें जिसमें तात्कालिक सम्बन्ध वा तात्कालिकी गति पर से सहज में चलसंख्या सिद्ध हो जाय इस के लिये अनेक उदाहरणों के क्रियाओं का जानना और अभ्यास करना इन को छोड़ और कोई उपाय नहीं है । इस लिये विद्यार्थियों को अभ्यास करने के लिये हम यहां पर कुछ उदाहरणों को क्रिया समेत दिखाते हैं ॥

उदाहरणों के करने के पहले खण्डचलानयन की क्रिया समझने के लिये नीचे लिखे हुये श्लोक वा दोहे को अभ्यास कर रक्खो ।

श्लोक ।

इष्टाग्रभुक्तिं परिकल्प्य भुक्तिं
तज्जं चलं चैकमथाहतिर्या ।
एकेष्टयोरिष्टजवाहतैक-
गतेश्चलोना स्वगतेश्चलः स्यात् ॥ १२ ॥

दोहा

इष्टभक्त गति मानि गति जो चल सो है एक ।
एक इष्ट को घात करि राखहु धारि विवेक ॥
इष्टभुक्ति हत एक को मानि भुक्ति चल लाय ।
तामें याको हीन करि गतिचल कहो बनाय ॥ १२ ॥

उदाहरण ।

(१) $य\sqrt{य+अ}\ ताय = \int (य+अ-अ)\sqrt{य+अ}\ ताय$

$$=\int (य+अ)\ (य+अ)^{\frac{१}{२}} ताय - \int अ\sqrt{य+अ}\ ताय$$

$$=\int (य+अ)^{\frac{३}{२}} ताय - अ \int ताय\ (य+अ)^{\frac{१}{२}}$$

$$=\frac{२}{५}(य+अ)^{\frac{५}{२}} - \frac{२}{३}अ\ (य+अ)^{\frac{३}{२}}\ ।$$

(२) $$\frac{ताय}{\sqrt{य+अ}+\sqrt{य+क}} = \int \frac{ताय\sqrt{य+अ} - ताय\sqrt{य+क}}{अ-क}$$

$$= \frac{२\{(य+अ)^{\frac{३}{२}} - (य+क)^{\frac{३}{२}}\}}{३(अ-क)}$$ दोनों उदाहरणों में र=य+अ कल्पना करने से भी चलराशि सिद्ध हुये हैं

(३) $$\int \frac{य\cdot ताय}{य^{८}-अ^{८}} = \frac{१}{२अ^{४}}\int \left(\frac{यताय}{य^{४}-अ^{४}} - \frac{यताय}{य^{४}+अ^{४}}\right)$$

$$= \frac{१}{२अ^{४}} \int \left\{ \frac{१}{४अ^{२}} \left(\frac{२\ ताय\cdot य}{य^{२}-अ^{२}} - \frac{२\ तायय}{य^{२}+अ^{२}}\right) - \frac{यताय}{य^{४}+अ^{४}} \right\}$$

$$= \frac{१}{८अ^{६}}\ ला\ \frac{य^{२}-अ^{२}}{य^{२}+अ^{२}} - \frac{१}{२अ^{४}} \int \frac{य\cdot ताय}{य^{४}+अ^{४}}$$

$$= \frac{१}{८अ^{६}}\ ला\ \frac{य^{२}-अ^{२}}{य^{२}+अ^{२}} - \frac{१}{४अ^{४}} \int \frac{२यताय}{य^{४}+अ^{४}}$$

$$= \frac{१}{८अ^{६}}\ ला\ \frac{य^{२}-अ^{२}}{य^{२}+अ^{२}} - \frac{१}{४अ^{६}}\ स्प^{-१}\frac{य^{२}}{अ^{२}},$$

(४) $\int (अ+कय^{न})^{\frac{प}{ब}} य^{म-१} ताय = \int य^{न-१} (अ+कय^{न})^{\frac{प}{ब}} य^{म-न} ताय$

$= \int य^{न-१} (अ+कय^{न})^{\frac{प}{ब}} (य^{न})^{\frac{म}{न}-१} ताय$

$= \int क^{१-\frac{म}{न}} क^{\frac{म}{न}-१} य^{न-१} (अ+कय^{न})^{\frac{प}{ब}} (य^{न})^{\frac{म}{न}-१} ताय$

$= क^{१-\frac{म}{न}} \int य^{न-१} (अ+कय^{न})^{\frac{प}{ब}} . क^{\frac{म}{न}-१} (य^{न})^{\frac{म}{न}-१} ताय$

$= क^{१-\frac{म}{न}} \int य^{न-१} (अ+कय^{न})^{\frac{प}{ब}} (कय^{न})^{\frac{म}{न}-१} ताय$

$= क^{१-\frac{म}{न}} \int य^{न-१} (अ+कय^{न})^{\frac{प}{ब}} (अ+कय^{न}-अ)^{\frac{म}{न}-१} ताय$। अब यहां मानो कि $र = अ+कय^{न}$ $\therefore$ $तार = न \cdot कय^{न-१} ताय$ और

$ताय = \frac{तार}{नक \cdot य^{न-१}}$

इस लिये $क^{१-\frac{म}{न}} \int य^{न-१} (अ+कय^{न})^{\frac{प}{ब}} (अ+कय^{न}-अ)^{\frac{म}{न}-१} ताय$

$= क^{१-\frac{म}{न}} \int य^{न-१} (अ+कय^{न})^{\frac{प}{ब}} (अ+कय^{न}-अ)^{\frac{म}{न}-१} \frac{तार}{नकय^{न-१}}$

$= \frac{क^{१-\frac{म}{न}}}{नक} \int र^{\frac{प}{ब}} (र-अ)^{\frac{म}{न}-१} तार$। अब यहां यदि $\frac{म}{न}$ यह अभिन्न और धन हो तो द्वियुक्पद सिद्धान्त से $(र-अ)^{\frac{म}{न}-१}$ इस का मान फैला कर उसे $र^{\frac{प}{ब}}$ तार इस से गुण फिर सहज में चलराशि जान सकते हो।

जैसे $\int य^{२} \sqrt{अ+य}$ ताय यहां $न=१, \frac{प}{ब} = \frac{१}{२}$, $क = १$, और $म-१=२$

$\therefore \frac{म}{न} = \frac{३}{१} = ३$, और $र = अ+य$, तब

$\frac{क^{१-\frac{म}{न}}}{नक} \int र^{\frac{प}{ब}} (र-अ)^{\frac{म}{न}-१} तार = \frac{१^{-२}}{१ \times १} \int र^{\frac{१}{२}} (र-अ)^{२} तार$

$$= \int \text{र}^{\frac{1}{2}}(\text{र}^2 - 2\text{र}\text{अ} + \text{अ}^2)\text{तार} = \int \text{र}^{\frac{5}{2}}\text{तार} - 2\text{अ}\int \text{र}^{\frac{3}{2}}\text{तार} + \text{अ}^2\int \text{र}^{\frac{1}{2}}\text{तार}$$

$$= \frac{2}{7}\text{र}^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}\text{अ}\cdot\text{र}^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}\text{अ}^2\text{र}^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{7}(\text{अ}+\text{य})^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}\text{अ}(\text{अ}+\text{य})^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}\text{अ}^2(\text{अ}+\text{य})^{\frac{3}{2}}।$$

और $\int \text{य}^3(\text{अ}+\text{कय}^2)^{\frac{2}{3}}$ ताय। यहां न = २, म − १ = ३, $\frac{\text{प}}{\text{ब}} = \frac{2}{3}$

∴ $\frac{\text{म}}{\text{न}} = 2$, र = अ + कय²

इस लिये,
$$\frac{\text{क}^{1-\frac{\text{म}}{\text{न}}}}{\text{कन}}\int \text{र}^{\frac{\text{प}}{\text{ब}}}(\text{र}-\text{अ})^{\frac{\text{म}}{\text{न}}-1}\text{तार} = \frac{1}{2\text{क}^2}\int \text{र}^{\frac{2}{3}}(\text{र}-\text{अ})^{1}\text{तार}$$

$$= \frac{1}{2\text{क}^2}\left(\frac{3}{8}\text{र}^{\frac{8}{3}} - \frac{3}{5}\text{अ}\text{र}^{\frac{5}{3}}\right) = \frac{3}{16\text{क}^2}(\text{अ}+\text{कय})^{\frac{8}{3}} - \frac{3\text{अ}}{10\text{क}^2}(\text{अ}+\text{कय})^{\frac{5}{3}}।$$

अथवा, $\int (\text{अ}+\text{कय}^{\text{न}})^{\frac{\text{प}}{\text{ब}}}\text{य}^{\text{म}-1}\times\text{ताय}$

$$= \int (\text{अय}^{-\text{न}}+\text{क})^{\frac{\text{प}}{\text{ब}}}\text{य}^{\frac{\text{नप}}{\text{ब}}+\text{म}-1}\times\text{ताय}$$

$$= \int \text{य}^{-\text{न}-1}(\text{अय}^{-\text{न}}+\text{क})^{\frac{\text{प}}{\text{ब}}}\text{य}^{\frac{\text{नप}}{\text{ब}}+\text{म}+\text{न}}\times\text{ताय}$$

$$= \int \text{अ}^{\frac{\text{म}}{\text{न}}+\frac{\text{प}}{\text{ब}}+1}\times\text{य}^{-\text{न}-1}(\text{अय}^{-\text{न}}+\text{क})^{\frac{\text{प}}{\text{ब}}}(\text{अय}^{-\text{न}}+\text{क}-\text{क})^{-\left(\frac{\text{म}}{\text{न}}+\frac{\text{प}}{\text{ब}}+1\right)}\times\text{ताय}$$

यहां भी यदि र = $\text{अय}^{-\text{न}}+\text{क}$ तो तार = $-\text{अनय}^{-\text{न}-1}\times\text{ताय}$

∴ ताय = $-\frac{\text{तार}}{\text{अनय}^{-\text{न}-1}}$

इस लिये

$$\int \text{अ}^{\frac{\text{म}}{\text{न}}+\frac{\text{प}}{\text{ब}}+1}\times\text{य}^{-\text{न}-1}(\text{अय}^{-\text{न}}+\text{क}-\text{क})^{-\left(\frac{\text{म}}{\text{न}}+\frac{\text{प}}{\text{ब}}+1\right)}\times\text{ताय}(\text{अय}^{-\text{न}}+\text{क})^{\frac{\text{प}}{\text{ब}}}$$

$$= -\frac{\text{अ}^{\frac{\text{म}}{\text{न}}+\frac{\text{प}}{\text{ब}}+1}}{\text{अन}}\int \text{र}^{\frac{\text{प}}{\text{ब}}}(\text{र}-\text{क})^{-\left(\frac{\text{म}}{\text{न}}+\frac{\text{प}}{\text{ब}}+1\right)}\times\text{तार}$$ । यहां यदि

$\frac{म}{न}+\frac{प}{ब}$ यह ऋणात्मक अभिन्न संख्या हो तो द्वियुक्पद से चलराशि जान सकते हो

जैसे $\int \frac{ताय}{य^{२}\sqrt{अ+य^{२}}} = \int य^{-२}(अ+य^{२})^{-\frac{१}{२}}ताय$

यहां $म - १ = -२ \therefore म = -१, न = २,$ और $\frac{प}{ब} = -\frac{१}{२}$

$\therefore \frac{म}{न}+\frac{प}{ब} = -\frac{१}{२} - \frac{१}{२} = -१$ और $क = १,$

$$इस लिये - \frac{अ^{\frac{म}{न}+\frac{प}{ब}+१}}{अन} \int र^{\frac{प}{ब}}(र-क)^{-(\frac{म}{न}+\frac{प}{ब}+१)} \times तार$$

$$= -\frac{अ^{0}}{२अ}\int र^{-\frac{१}{२}}(र-क)^{0} \times तार = -\frac{१}{२अ}\int र^{-\frac{१}{२}} तार$$

$$= \frac{१}{अ}\cdot र^{\frac{१}{२}} \text{ यहां } र = अय^{-२}+१,$$

$$और \int \frac{ताय}{(अ^{२}+य^{२})^{\frac{३}{२}}} = \int य^{0}(अ^{२}+य^{२})^{-\frac{३}{२}} ताय$$

यहां $म - १ = 0 \therefore म = १, \frac{प}{ब} = -\frac{३}{२}$

$न = २, \frac{म}{न} + \frac{प}{ब} = \frac{१}{२} - \frac{३}{२} = -१$ और $अ^{२} = अ, र = (अ^{२}य^{-२}+१)$

$$इस लिये - \frac{अ^{\frac{म}{न}+\frac{प}{ब}+१}}{अन}\int र^{\frac{प}{ब}}(र-क)^{-(\frac{म}{न}+\frac{प}{ब}+१)} \times तार$$

$$= -\frac{१}{२अ^{२}}\int र^{-\frac{३}{२}}(र-क)^{0} तार$$

$$= -\frac{१}{२अ^{२}}\int र^{-\frac{३}{२}}तार = -\frac{१}{२अ^{२}} \times -\frac{२}{१}र^{-\frac{१}{२}} = \frac{१}{अ^{२}\sqrt{र}}$$

$$= \frac{१}{अ^{२}\sqrt{अ^{२}य^{-२}+१}} = \frac{य}{अ^{२}\sqrt{अ^{२}+य^{२}}}।$$

(४) $\int \frac{य^{म}ताय}{(अ+कय)^{न}} = \frac{१}{क^{म}}\int \frac{(अ+कय-अ)^{म}}{(अ+कय)^{न}}ताय$

$$= \frac{१}{क^{म}}\int \frac{(र-अ)^{म}}{र^{न}}\,\frac{तार}{क},\ \text{यदि } र = अ + कय,$$

$$= \frac{१}{क^{म+१}}\int \frac{र^{म} - मअ\cdot र^{म-१} + अ^{२}\cdot\frac{म(म-१)}{\lfloor २}\,र^{म-२} - \cdots}{र^{न}}\cdot तार$$

$$= \frac{१}{क^{म+१}}\int \left(र^{म-न} - मअर^{म-न-१} + अ^{२}\frac{म(म-१)}{\lfloor २}\,र^{म-न-२} - \cdots\right)तार$$

$$= \frac{१}{क^{म+१}}\left\{\frac{र^{म-न+१}}{म-न+१} - \frac{मअ}{म-न}\,र^{म-न} + अ^{२}\frac{म(म-१)}{\lfloor २}\cdot\frac{र^{म-न-१}}{म-न-१} - \cdots\right\}।$$

(६) $$\int \frac{ताय}{अ+कय+गय^{२}} = \int \frac{४ग\cdot ताय}{४अग+४कगय+४ग^{२}य^{२}}$$

$$= \int \frac{४गताय}{(२गय+क)^{२}+४अग-क^{२}}$$

$$= \int \frac{४गताय}{र^{२}+४अग-क^{२}} = \int \frac{२तार}{र^{२}+४अग-क^{२}}\ (\text{यदि } २गय+क=र)$$

$$\frac{२}{\sqrt{४अग-क^{२}}}\,स्प^{-१}\frac{र}{\sqrt{४अग-क^{२}}}$$

यदि $४अग > क^{२}$ और अ, क, ग सब धन हों

$$\text{वा, } \int \frac{२तार}{र^{२}+४अग-क^{२}} = २\int \frac{१}{२ख}\left(\frac{तार}{र-ख} - \frac{तार}{र+ख}\right)$$

$$= \frac{१}{ख}\,ला\,\frac{र-ख}{र+ख}$$

(यदि $ख = \sqrt{क^{२}-४अग}$ और $४अग < क^{२}$)

$$\therefore \frac{१}{ख}\,ला\,\frac{र-ख}{र+ख} = \frac{१}{\sqrt{क^{२}-४अग}}\,ला\,\frac{२गय+क-\sqrt{क^{२}-४अग}}{२गय+क+\sqrt{क^{२}-४अग}}$$

(७) $\frac{\text{ताय}}{(\text{य}+\text{अ})(\text{य}+\text{क})} = \int \frac{1}{\text{अ}-\text{क}}\left\{\frac{\text{ताय}}{\text{य}+\text{क}} - \frac{\text{ताय}}{\text{य}+\text{अ}}\right\}$

$= \frac{1}{\text{अ}-\text{क}}\int\left\{\frac{\text{ताय}}{\text{य}+\text{क}} - \frac{\text{ताय}}{\text{य}+\text{अ}}\right\} = \frac{1}{\text{अ}-\text{क}}\text{ला}\,\frac{\text{य}+\text{क}}{\text{य}+\text{अ}}$ ।

(८) $\int\frac{(\text{त}+\text{नय})\text{ताय}}{\text{अ}+\text{कय}+\text{गय}^2} = \frac{1}{2\,\text{ग}}\int\frac{\{2\text{तग}+\text{न}\,(\text{क}+2\,\text{गय}-\text{क})\}\,\text{ताय}}{\text{अ}+\text{कय}+\text{गय}^2}$

$= \frac{1}{2\text{ग}}\left\{\int\frac{\text{न}(\text{क}+2\text{गय})\text{ताय}}{\text{अ}+\text{कय}+\text{गय}^2} + \int\frac{(2\,\text{तग}-\text{नक})\text{ताय}}{\text{अ}+\text{कय}+\text{गय}^2}\right\}$

$= \frac{\text{न}}{2\text{ग}}\text{ला}(\text{अ}+\text{कय}+\text{गय}^2) + \left(\frac{2\text{तग}-\text{नक}}{2\text{ग}}\right)\int\frac{\text{ताय}}{\text{अ}+\text{कय}+\text{गय}^2}$

दूसरे खण्ड का चल ६वें उदाहरण से स्पष्ट है ।

(६) $\int\frac{(\text{अ}+\text{कय})\text{ताय}}{\text{य}^2-2\text{अ}_1\text{य}+\text{अ}_1^2+\text{क}_1^2} = \int\frac{\{\text{अ}+\text{कअ}_1+\text{क}(\text{य}-\text{अ}_1)\}\,\text{ताय}}{\text{य}^2-2\text{अ}_1\text{य}+\text{अ}_1^2+\text{क}_1^2}$

$= \int\frac{(\text{अ}+\text{कअ}_1)\text{ताय}}{(\text{य}-\text{अ}_1)^2+\text{क}_1^2} + \int\frac{\text{क}(\text{य}-\text{अ}_1)\text{ताय}}{(\text{य}-\text{अ}_1)^2+\text{क}_1^2}$

$= \frac{\text{अ}+\text{कअ}_1}{\text{क}_1}\text{स्प}^{-1}\,\frac{\text{य}-\text{अ}_1}{\text{क}_1} + \frac{\text{क}}{2}\text{ला}\{(\text{य}-\text{अ}_1)^2+\text{क}_1^2\}$

(१०) ६वें उदाहरण में यदि, $\text{अ}=1, -\text{क}=\text{अ}_1=$कोज्याइ, और $\text{क}_1=$ज्याइ

तो $\int\frac{(1-\text{कोज्याइ}\cdot\text{य})\text{ताय}}{1-2\text{कोज्याइ}\times\text{य}+\text{य}^2} = \frac{1-\text{कोज्या}^2\text{इ}}{\text{ज्याइ}}\text{स्प}^{-1}\,\frac{\text{य}-\text{कोज्याइ}}{\text{ज्याइ}}$

$- \frac{\text{कोज्याइ}}{2}\text{ला}\{(\text{य}-\text{कोज्याइ})^2+\text{ज्या}^2\text{इ}\}$

$$= \text{ज्याइ ख्प}^{-1}\frac{\text{य}-\text{कोज्याइ}}{\text{ज्याइ}} - \frac{\text{कोज्याइ}}{२}\text{ला}(\text{य}^{२}-२\text{कोज्याइ}\times\text{य}+१) ।$$

$$(११) \int \frac{(\text{अ}^{२}\pm\text{य}^{२})^{\frac{१}{२}}\text{ताय}}{\text{य}^{२}} = \int \left\{ \frac{\text{अ}^{२}\text{ताय}}{\text{य}^{२}\sqrt{\text{अ}^{२}\pm\text{य}^{२}}} \pm \frac{\text{य}^{२}\text{ताय}}{\text{य}^{२}\sqrt{\text{अ}^{२}\pm\text{य}^{२}}} \right\}$$

$$= \int \pm\text{ताय}(\text{अ}^{२}\pm\text{य}^{२})^{-\frac{१}{२}} + \int \text{अ}^{२}\text{य}^{-३}(\text{अ}^{२}\text{य}^{-२}\pm१)^{-\frac{१}{२}}\text{ताय}$$

$$= -\sqrt{\text{अ}^{२}\text{य}^{-२}+१} + \text{ला}(\text{य}+\sqrt{\text{अ}^{२}+\text{य}^{२}}) \text{ यदि धन चिन्ह हो।}$$

$$= -\sqrt{\text{अ}^{२}\text{य}^{-२}-१} - \text{ज्या}^{-१}\frac{\text{य}}{\text{अ}} \text{ यदि ऋण हो।}$$

$$(१२) \frac{\text{अ}^{२}\text{ताय}}{\text{य}\sqrt{\text{य}^{२}\pm\text{अ}^{२}}} = \int \text{अ}^{२}\text{य}^{-२}(\pm\text{अ}^{२}\text{य}^{-२}+१)^{-\frac{१}{२}}\text{ताय}$$

$$= \int (\text{अ}^{२}\text{य}^{-२}+१-१)(\text{अ}^{२}\text{य}^{-२}+१)^{-\frac{१}{२}}\text{ताय}, \text{ + चिन्ह से}$$

$$= \int (\text{अ}^{२}\text{य}^{-२}+१)^{\frac{१}{२}}\text{ताय} - \int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{अ}^{२}\text{य}^{-२}+१}} \text{ अब यहां} (\text{अ}^{२}\text{य}^{-२}+१)^{\frac{१}{२}}$$

और $\frac{१}{(\text{अ}^{२}\text{य}^{-२}+१)^{\frac{१}{२}}}$ का मान द्वियुक्त पद सिद्धान्त से ले आकर एक श्रेढी में चलराशि का मान जान सकते हो इसी प्रकार —चिन्ह से भी जान लो

$$(१३) \int \frac{\text{ताय}}{\text{य}^{२}\sqrt{\text{अ}^{२}\text{य}^{२}+१}} \cdot = \int \frac{\text{ताय}\cdot\text{य}^{-२}}{\text{य}\sqrt{\text{अ}^{२}+\text{य}^{-२}}} \cdot = \int \frac{\text{ताय}\cdot\text{य}^{-३}}{\sqrt{\text{अ}^{२}+\text{य}^{-२}}}$$

$$= -\frac{१}{२}\int -२\,\text{तायय}^{-३}(\text{अ}^{२}+\text{य}^{-२})^{-\frac{१}{२}}$$

$$= -(\text{अ}^{२}+\text{य}^{-२})^{\frac{१}{२}} ।$$

(१४) $\int \frac{\text{ताय}}{\text{अ}+\text{क}\,\text{कोज्याय}} = \int \frac{\text{ताय}}{\text{अ}(\text{ज्या}^2\frac{\text{य}}{2}+\text{कोज्या}^2\frac{\text{य}}{2})+\text{क}(\text{कोज्या}^2\frac{\text{य}}{2}-\text{ज्या}^2\frac{\text{य}}{2})}$

$= \int \frac{\text{ताय}}{(\text{अ}+\text{क})\text{कोज्या}^2\frac{\text{य}}{2}+(\text{अ}-\text{क})\text{ज्या}^2\frac{\text{य}}{2}} = \int \frac{\text{ताय}\ \text{छे}^2\frac{\text{य}}{2}}{\text{अ}+\text{क}+(\text{अ}-\text{क})\text{स्प}^2\frac{\text{य}}{2}}$

$= २\int \frac{\text{ताल}}{\text{अ}+\text{क}+(\text{अ}-\text{क})\text{ल}^2}$, यदि $\text{ल}=\text{स्प}\frac{\text{य}}{2}$

इस लिये यदि अ>क तो

$२\int \frac{\text{ताल}}{\text{अ}+\text{क}+(\text{अ}-\text{क})\text{ल}^2} = \frac{२}{\text{अ}-\text{क}}\int \frac{\text{ताल}}{\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{अ}-\text{क}}+\text{ल}^2} = \frac{२}{\text{अ}-\text{क}}\int \frac{\text{ताल}}{\text{ग}^2+\text{ल}^2}$

यदि $\text{ग}^2=\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{अ}-\text{क}}$ तो ११ सूत्र से

$\frac{२}{\text{अ}-\text{क}}\int \frac{\text{ताल}}{\text{ग}^2+\text{ल}^2} = \frac{२}{\text{अ}-\text{क}}\cdot\frac{१}{\text{ग}}\text{स्प}^{-१}\frac{\text{ल}}{\text{ग}} = \frac{२}{\text{अ}-\text{क}}\cdot\frac{\sqrt{\text{अ}-\text{क}}}{\sqrt{\text{अ}+\text{क}}}\text{स्प}^{-१}\frac{\text{ल}}{\text{ग}}$

$= \frac{२}{\sqrt{\text{अ}^2-\text{क}^2}}\text{स्प}^{-१}\left\{\sqrt{\frac{\text{अ}-\text{क}}{\text{अ}+\text{क}}}\ \text{स्प}\frac{१}{२}\text{य}\right\}$

और यदि अ∠क तो

$२\int \frac{\text{ताल}}{\text{अ}+\text{क}+(\text{अ}-\text{क})\text{ल}^2} = २\int \frac{\text{ताल}}{\text{अ}+\text{क}-(\text{क}-\text{अ})\text{ल}^2} = \frac{२}{\text{क}-\text{अ}}\int \frac{\text{ताल}}{\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{क}-\text{अ}}-\text{ल}^2}$

$= \frac{२}{\text{क}-\text{अ}}\int \frac{\text{ताल}}{\text{ग}^2-\text{ल}^2}$, यदि $\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{क}-\text{अ}}=\text{ग}^2$

$= \frac{२}{\text{क}-\text{अ}}\int \frac{१}{२\text{ग}}\left(\frac{\text{ताल}}{\text{ग}-\text{ल}}+\frac{\text{ताल}}{\text{ग}+\text{ल}}\right) = \frac{१}{\text{ग}(\text{क}-\text{अ})}\left(\int \frac{\text{ताल}}{\text{ग}-\text{ल}}+\int \frac{\text{ताल}}{\text{ग}+\text{ल}}\right)$

$= \frac{१}{\text{ग}(\text{क}-\text{अ})}\left\{-\int \frac{-\text{ताल}}{\text{ग}-\text{ल}}+\int \frac{\text{ताल}}{\text{ग}+\text{ल}}\right\}$

$= \frac{१}{\text{ग}(\text{क}-\text{अ})}\left\{\text{ला}(\text{ग}+\text{ल})-\text{ला}(\text{ग}-\text{ल})\right\}$

$$=\frac{१}{ग(क-अ)}ला\frac{ग+ल}{ग-ल}=\frac{१}{\sqrt{क^२-अ^२}}ला\frac{\sqrt{अ+क}+स्प\frac{य}{२}\sqrt{क-अ}}{\sqrt{अ+क}-स्प\frac{य}{२}\sqrt{क-अ}}$$

यदि $\sqrt{अ+क}-स्प\frac{य}{२}\sqrt{क-अ}$ यह ऋणात्मक हो तो

$$\int\frac{ताय}{अ+क\cdotकोज्याय}=\frac{१}{\sqrt{क^२-अ^२}}ला\frac{स्प\frac{य}{२}\sqrt{क-अ}+\sqrt{अ+क}}{स्प\frac{य}{२}\sqrt{क-अ}-\sqrt{अ+क}}$$

यदि यहां $\int\frac{ताय}{ग+क\cdotज्याय}$ यह जानना हो तो

$य=\frac{\pi}{२}+ल$ कल्पना करने से $\int\frac{ताय}{अ+क\cdotज्याय}=\int\frac{ताल}{अ+ककोज्याल}$ यह ठीक १४वें उदाहरण के ऐसा हो गया ।

१५। जैसे ज्याय=र तो ज्या$^{-१}$र=य अर्थात् ज्या से जिसका बोध होता है उस से उलटा ज्या$^{-१}$ से बोध होता है। इसी प्रकार कल्पना करो कि फ से जो बोध होता है उस से उलटा फ$^{-१}$ से तब फ{फ$^{-१}$(य)} =य ऐसा होगा अर्थात् फ$^{-१}$ से यदि ज्या$^{-१}$ ग्रहण करो तो इसे ऐसे बोलेंगे कि य का जो क्रमज्या खण्ड पर से चाप हो उस की क्रमज्या य के बराबर है ।

इस पर से यदि $\int$फ(य)ताय इस का ज्ञान हो तो

$\int$फ$^{-१}$(य)ताय इस का भी ज्ञान हो सक्ता है जैसे

यदि फ$^{-१}$(य)=ल तो य=फ(ल) तब

फ$^{-१}$(य) ताय $=\int ल\frac{ताय}{ताल}ताल=यल-\int यताल=यल\int फ(ल)ताल$

ऊपर जो उदाहरण दिखाये गये हैं उनके बल से हज़ारहों चलानयन कर सकते हो और जब अनन्त चल का मान आ गया तब उस में स्थिराङ्कों का उत्थापन देने से सान्तचलानयन भी सहज में कर सक्ते हो।

जैसे खण्ड चलानयन से

$$\int ज्या^{न} य ता य = -\int \frac{ता को ज्या य}{ता य} ज्या^{न-१} य ता य$$

$$= - को ज्या य ज्या^{न-१} य + (न-१) \int को ज्या^{२} य ज्या^{न-२} य ता य$$

$$= - को ज्या य ज्या^{न-१} य + (न-१) \int (१ - ज्या^{२} य) ज्या^{न-२} य ता य$$

$$= - को ज्या य ज्या^{न-१} य + (न-१) \int ज्या^{न-२} य ता य$$

$$-(न-१) \int ज्या^{न} य ता य \cdot$$

सम शोधन से

$$न \int ज्या^{न} य ता य = - को ज्या य ज्या^{न-१} य$$

$$+ (न-१) \int ज्या^{न-२} य ता य$$

$$इस लिये \int ज्या^{न} य ता य = - \frac{को ज्या य ज्या^{न-१} य}{न}$$

$$+ \frac{न-१}{न} \int ज्या^{न-२} य ता य$$

यहां पर यदि न एक से अधिक और धन हो तो स्पष्ट है कि य के स्थान में ० और $\frac{\pi}{२}$ का उत्थापन देने से

$$\int_{०}^{\frac{\pi}{२}} ज्या^{न} य ता य = \frac{न-१}{न} \int_{०}^{\frac{\pi}{२}} ज्या^{न-२} य ता य ।$$

इसी प्रकार यदि न धन और ३ से अधिक हो तो

$$\int_{०}^{\frac{\pi}{२}} ज्या^{न-२} य ता य = \frac{न-३}{न-२} \int_{०}^{\frac{\pi}{२}} ज्या^{न-४} य ता य ।$$

इसी प्रकार यदि न धन और सम हो तो लगातार यही विधि करने से

$\int_{०}^{\frac{\pi}{२}} ता य = \frac{\pi}{२}$ और यदि धन न विषम हो तो अन्त में

$\int_{०}^{\frac{\pi}{२}} ज्या य ता य = १$ यह होगा। इस लिये

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{न}\text{य} \text{ताय} = \frac{(न-१)(न-३)(न-५)\cdots १}{न(न-२)(न-४)\cdots २}\frac{\pi}{२}\cdot \text{ (यदि न सम) ।}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{न}\text{य} \text{ताय} = \frac{(न-१)(न-३)(न-५)\cdots २}{न(न-२)(न-३)\cdots ३} \text{ (यदि न विषम)।}$$

यहां कल्पना करो कि न धन और सम है तो

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{न}\text{य} \text{ताय} = \frac{न-१}{न}\cdot\frac{न-३}{न-२}\cdot\frac{न-५}{न-४}\cdots\frac{३}{४}\cdot\frac{१}{२}\cdot\frac{\pi}{२}\cdots \qquad (१)$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{न-१}\text{य} \text{ताय} = \frac{न-२}{न-१}\cdot\frac{न-४}{न-३}\cdot\frac{न-६}{न-५}\cdots\frac{२}{३}\cdots \qquad (२)$$

अब यहां स्पष्ट है कि (२) प्रक्रम से श्रेढी में यदि मान ले आवो तो $\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{न-१}\text{य} \text{ताय}$ यह $\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{न-२}\text{य} \text{ताय}$ इस से छोटा और $\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{न}\text{य} \text{ताय}$ इस से बड़ा है क्योंकि ऊपर के मान नीचे के मान से उत्तरोत्तर छोटे हैं। परन्तु पूर्व सिद्ध है

$$\text{कि } \frac{\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{न}\text{य} \text{ताय}}{\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{न-२}\text{य} \text{ताय}} = \frac{न-१}{न} \therefore \frac{\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{न}\text{य} \text{ताय}}{\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{न-१}\text{य} \text{ताय}} \text{ यह १ से}$$

छोटा और $\frac{न-१}{न}$ से बड़ा है। इस लिये (१) और (२) के दहने पक्ष का संबन्ध १ से न्यून और $\frac{न-१}{न}$ से बड़ा हुआ। इस प्रकार से

$$\frac{\pi}{२} > \frac{२.२.४.४.६.६\cdots\cdots(न-२)(न-२)}{१.३.३.५.५.७\cdots\cdots(न-३)(न-१)} \text{ और}$$

$$\frac{\pi}{२} < \frac{२.२.४.४.६.६\cdots\cdots(न-३)(न-२)}{१.३.३.५.५.७\cdots\cdots(न-२)(न-१)}\,\frac{न}{न-२} \text{ यह सिद्ध हुआ ।}$$

रूप व्यासार्द्ध की परिधि जानने के लिये इसे वालिस का सूत्र Wallis's Formula कहते हैं । इस प्रकार से अनेक चमत्कृत सिद्धान्त नये उत्पन्न हो सक्ते हैं ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण

१ । $\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{१-\text{कय}-\text{य}^२}} = \text{ज्या}^{-१} \frac{\text{क}+२\text{य}}{\sqrt{४+\text{क}^२}}$

२ । $\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{१-५\text{य}-\text{य}^२}} = \text{ज्या}^{-१} \frac{५+२\text{य}}{\sqrt{२९}}$

३ । $\int \text{क}\cdot\text{य}^{\text{न}}\, \text{लायताय} = \frac{\text{क}}{\text{न}+१}\cdot \text{य}^{\text{न}+१} \left(\text{लाय} - \frac{१}{\text{न}+१}\right)$

४ । $\int २\,\text{य}^२\, \text{लायताय} = \frac{२}{३}\,\text{य}^३ \left(\text{लाय} - \frac{१}{३}\right)$

५ । $\int \text{यलायताय} = \frac{१}{२}\,\text{य}^२ \left(\text{लाय} - \frac{१}{२}\right)$

६ । $\int \text{लायताय} = \text{य}\left(\text{लाय} - १\right)$

७ । $\int \text{अय}\sqrt{\text{य}+१} = \frac{२\text{अ}}{५}(\text{य}+१)^{\frac{५}{२}} - \frac{२\text{अ}}{३}(\text{य}+१)^{\frac{३}{२}}$

८ । $\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}+२} - \sqrt{\text{य}+१}} = \frac{२}{३}\left\{(\text{य}+२)^{\frac{३}{२}} + (\text{य}+१)^{\frac{३}{२}}\right\}$

९ । $\int \text{य}^३(३+\text{य}^२\sqrt{३})^{\frac{२}{३}}$

$= \frac{१}{१६}(३+\text{य}\sqrt{३})^{\frac{८}{३}} - \frac{३}{१०}(३+\text{य}\sqrt{३})^{\frac{५}{३}}$

१० । $\int (\text{अ}+\text{कय})^२\, \text{य}^४\, \text{ताय},$

$= \frac{१}{\text{क}^५}\left(\frac{\text{र}^७}{७} - \frac{२}{३}\text{अर}^६ + \frac{६}{५}\text{अ}^२\text{र}^५ - \text{अ}^३\text{र}^४ + \frac{\text{अ}^४}{३}\text{र}^३\right)$ यदि $\text{र}=\text{अ}+\text{कय}$

११ । $\int \frac{\text{य}^५\text{ताय}}{(१+२\text{य})^४}$

$$= \frac{१}{६४}\left\{\frac{र^{२}}{२} - \frac{५}{१}र + १० लार + \frac{१०}{र} - \frac{५}{२र^{२}} + \frac{१}{३र^{३}}\right\}$$

यदि र=१+२य ।

१२ । $\int \frac{ताय}{१+२य+३य^{२}} = \frac{१}{\sqrt{२}} स्प^{-१} \frac{३य+१}{\sqrt{२}}$

१३ । $\int \frac{ताय}{४+५य+य^{२}} = \frac{१}{३} ला \left\{\frac{य+१}{य+४}\right\}$

१४ । $\int \frac{ताय}{(य+४)(य+५)} = ला \frac{य+४}{य+५}$

१५ । $\int \frac{(१+२य)ताय}{१+२य+३य^{२}}$

$$= \frac{१}{३}\left\{ला\,(१+२य+३य^{२}) + \frac{१}{\sqrt{२}} स्प^{-१} \frac{३य+१}{\sqrt{२}}\right\}$$

१६ । $\int \frac{(१+२य)ताय}{४+५य+य^{२}} = ला\,(४+५य+य^{२}) - \frac{४}{३} ला \left\{\frac{य+१}{य+४}\right\}$

१७ । $\int \frac{(१+२य)\,ताय}{(य-अ)^{२}+क^{२}}$

$$= \frac{१+२अ}{क} स्प^{-१} \frac{य-अ}{क} + ला\left\{(य-अ)^{२}+क^{२}\right\}$$

१८ । $\int \frac{(१+२य)ताय}{य^{२}-४य+८} = \frac{५}{२} स्प^{-१} \frac{य-२}{२} + ला\left\{(य-२)^{२}+४\right\}$

१९ । $\int \frac{रताय}{र - यकोज्याइ+य^{२}}$

$$= ज्याइ\, स्प^{-१}\frac{य - कोज्याइ}{ज्याइ} - \frac{कोज्याइ}{२} ला\left\{(य-१)^२ + ४य ज्या^२ \frac{इ}{२}\right\}$$

यदि र=१−य·कोज्याइ ।

२० । $\int \frac{ताय\sqrt{१+य^२}}{य^२} = \frac{ला\,(य+\sqrt{१+य^२})^य - \sqrt{१+य^२}}{य}$

२१ । $\int \frac{ताय\sqrt{१-य^२}}{य^२} = -\frac{\sqrt{१-य^२}}{य} - ज्या^{-१}य$

२२ । सिद्ध करो कि $\int \frac{अ\cdot ताय}{य\sqrt{य^२-अ^२}} = -ज्या^{-१}\frac{अ}{य}$

वा $\int \frac{अ\cdot ताय}{\sqrt{य^२-अ^२}} = कोज्या^{-१}\frac{अ}{य}$.

२३ । सिद्ध करो कि $\int \frac{अताय}{य\sqrt{य^२+अ^२}} = ला\frac{य}{अ+\sqrt{य^२+अ^२}}$

२४ । सिद्ध करो कि $\int \frac{अताय}{य\sqrt{अ^२-य^२}} = ला\frac{य}{अ+\sqrt{अ^२-य^२}}$

२५ । $\int \frac{ताय}{य^२\sqrt{य^२+१}} = -(१+य^{-२})^{\frac{१}{२}}$

२६ । $\int \frac{ताय}{२+कोज्याय} = \frac{२}{\sqrt{३}}स्प^{-१}\left(\frac{१}{\sqrt{३}}स्प\frac{१}{२}य\right)$

२७ । $\int \frac{ताय}{१+२कोज्याय} = \frac{१}{\sqrt{३}}ला\frac{स्प\frac{१}{२}य+\sqrt{३}}{स्प\frac{१}{२}य-\sqrt{३}}$

२८ । $\int$ षज्याप· कोज्यापताष $= \frac{\text{ज्या२ष}}{८} = \frac{\text{षकोज्या२ष}}{४}$

२९ । $\int \frac{\text{इ}^{\text{कय}}\,\text{ताय}}{\text{इ}^{\text{२कय}}+१} = \frac{१}{\text{क}}\,\text{स्प}^{-१}(\text{इ}^{\text{कय}})$

३० । $\int \frac{\sqrt{\text{य}+\text{क}}}{\sqrt{\text{य}}}\,\text{ताय} = \sqrt{\text{य}^{२}+\text{कय}} + \text{क}\cdot\text{ला}(\sqrt{\text{य}+\text{क}}+\sqrt{\text{य}})$

३१ । $\int \text{ज्या}^{४}\,\tfrac{१}{२}\,\text{यताय} = \frac{\text{३य}}{८} + \frac{\text{ज्या२य}}{१६} - \frac{\text{ज्या·य}}{२}$

३२ । $\int \text{ष·स्पष छे}^{२}\,\text{षताष} = \frac{\text{छे}^{२}\text{ष}}{२}\,\text{ष} - \tfrac{१}{२}\,\text{स्पष}$

३३ । खण्डचलानयन से सिद्ध करो कि

$$\int \text{इ}^{\text{कय}}\text{कोज्याअयताय} = \frac{\text{इ}^{\text{कय}}(\text{ककोज्याअय}+\text{अज्याअय})}{\text{अ}^{२}+\text{क}^{२}}$$

३४ । सिद्ध करो कि

$$\int \text{इ}^{\text{अय}}\text{ज्यामयकोज्यानयताय}$$

$$= \frac{\text{इ}^{\text{अय}}\{\text{अज्या}(\text{म}+\text{न})\text{य}-(\text{म}+\text{न})\,\text{कोज्या}(\text{म}+\text{न})\text{य}\}}{२\{\text{अ}^{२}+(\text{म}+\text{न})^{२}\}}$$

$$+ \frac{\text{इ}^{\text{अय}}\{\text{अज्या}(\text{म}-\text{न})\,\text{य}-(\text{म}-\text{न})\,\text{कोज्या}(\text{म}-\text{न})\text{य}\}}{२\{\text{अ}^{२}+(\text{म}-\text{न})^{२}\}}$$

३५ । $\int \frac{\text{ताय}}{\text{ज्यायकोज्याय}} = \text{ला}\,(\text{स्पय})$

३६ । $\int \frac{\text{ताय}}{\text{२ज्याय}} = \text{ला}\,(\text{स्प}\,\frac{\text{य}}{२})^{\frac{१}{२}}$, और $\int \frac{\text{ताय}}{\text{२कोज्याय}}$

$$= \text{ला}\left\{\text{कोस्प}\left(\frac{\pi}{४}-\frac{\text{य}}{२}\right)\right\}^{\frac{१}{२}} = \text{ला}\left\{\text{स्प}\left(\frac{\pi}{२}+\frac{\text{य}}{२}\right)\right\}^{\frac{१}{२}}$$

३७ । $$\int \frac{\text{कयताय}}{(\text{अ}-\text{य})^{३}} = \frac{\text{अक}}{२(\text{अ}-\text{य})^{३}} - \frac{\text{क}}{\text{अ}-\text{य}}$$

३८ । $$\int \frac{२+\text{कोज्याय}}{२\text{य}+\text{ज्याय}}\,\text{ताय} = \text{ला}\,(२\text{य}+\text{ज्याय})$$

३९ । $$\int \frac{\text{ताय}(\text{लाय})^{\text{म}}}{\text{य}} = \frac{(\text{लाय})^{\text{म}+१}}{\text{म}+१}$$

४० । $$\int \frac{२\text{ताय}}{\text{कोज्याय}+\text{ज्याय}} = \sqrt{२}\;\text{ला}\left\{\text{स्प}\left(\frac{\pi}{८}+\frac{\text{य}}{२}\right)\right\}$$

४१ । $$\int \frac{२\text{य}+२\text{ज्याय}}{१+\text{कोज्याय}}\,\text{ताय} = २\text{य}\;\text{स्प}\frac{\text{य}}{२}$$

४२ । $$\int \frac{\text{ग}\cdot\text{ज्या}^{२}\text{यताय}}{\text{अ}+\text{क}\cdot\text{कोज्या}^{२}\text{य}} = \frac{\text{ग}}{\text{क}}\left(\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{अ}}\right)^{\frac{१}{२}}\text{स्प}^{-१}\frac{\text{स्पय}\sqrt{\text{अ}}}{\sqrt{\text{अ}+\text{क}}} - \frac{\text{गय}}{\text{क}}$$

४३ । $$\int \frac{\text{ताय}}{\text{अ}+\text{क}\cdot\text{ज्याय}+\text{ग}\cdot\text{कोज्याय}} = \int \frac{\text{ताय}}{\text{अ}+\text{ग}\left(\frac{\text{क}}{\text{ग}}\cdot\text{ज्याय}+\text{कोज्याय}\right)}$$

$$= \int \frac{\text{ताय}}{\text{अ}+\dfrac{\text{ग}}{\text{कोज्याइ}}\,\text{कोज्या}(\text{य}-\text{इ})} = \int \frac{\text{ताल}}{\text{अ}+\dfrac{\text{ग}}{\text{कोज्याइ}}\,\text{कोज्याल}}$$

यदि $\frac{\text{क}}{\text{ग}} = \text{स्पइ}$, $\text{य}-\text{इ}=\text{ल}$

अब १४वें उदाहरण से सिद्ध कर लो ।

४४ । $$\int \frac{\text{अ}\cdot\text{यताय}}{\sqrt{२\text{अय}-\text{य}^{२}}} = \text{अ}^{२}\text{उज्या}^{-१}\frac{\text{य}}{\text{अ}} - \text{अ}\sqrt{२\text{अय}-\text{य}^{२}}$$

४५ । $$\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^{२}-८\text{य}+२}} = \text{ला}\left\{\text{य}-४+\sqrt{\text{य}^{२}-८\text{य}+२}\right\}$$

४६ । $\int \text{तापस्प}^{\text{२न}}\,\text{ष} = \frac{\text{य}^{\text{२न}-१}}{\text{२न}-१} - \frac{\text{य}^{\text{२न}-३}}{\text{२न}-३} + \frac{\text{य}^{\text{२न}-५}}{\text{२न}-५} - \frac{\text{य}^{\text{२न}-७}}{\text{२न}-७}$

$+ \cdots\cdots - (-१)^{\text{न}}\text{य} + (-१)^{\text{न}}\,\text{ष}$

यदि $\text{य} = \text{स्पष}$

४७ । $\int \left\{\text{ला}\left(\frac{\text{य}}{\text{अ}}\right)\right\}^{\text{न}} \text{ताय} = \text{य}\left\{\text{ला}\left(\frac{\text{य}}{\text{अ}}\right)\right\}^{\text{न}} - \text{नय}\left\{\text{ला}\left(\frac{\text{य}}{\text{अ}}\right)\right\}^{\text{न}-१}$

$+ \text{न}(\text{न}-१)\text{य}\left\{\text{ला}\left(\frac{\text{य}}{\text{अ}}\right)\right\}^{\text{न}-२} - \text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२)\text{य}\left\{\text{ला}\left(\frac{\text{य}}{\text{अ}}\right)\right\}^{\text{न}-३} + \cdots\cdots$

४८ । $\int \left\{\text{ला}\left(\frac{\text{य}}{\text{अ}}\right)\right\}^{४} \text{ताय} = \text{य}\left\{\text{ला}\left(\frac{\text{य}}{\text{अ}}\right)\right\}^{४} - ४\text{य}\left\{\text{ला}\left(\frac{\text{य}}{\text{अ}}\right)\right\}^{३}$

$+ १२\text{य}\left\{\text{ला}\left(\frac{\text{य}}{\text{अ}}\right)\right\}^{२} - २४\text{य}\left\{\text{ला}\left(\frac{\text{य}}{\text{अ}}\right)\right\} + २४\text{य}$

४९ । $\frac{\text{क}\cdot \text{उज्या}^{-१}\frac{\text{य}}{\text{अ}}}{\sqrt{(\text{२अय}-\text{य}^{२})}}\,\text{ताय} = \frac{\text{क}}{२}\left(\text{उज्या}^{-१}\frac{\text{य}}{\text{क}}\right)^{२}$

५० । $\int \text{ला}\left\{(\text{लाय})^{\frac{१}{\text{य}}}\right\}\text{ताय} = \text{लाय}\left\{\text{ला}\,(\text{लाय}) - १\right\}$

५१ । सिद्ध करो कि

$$\int_{०}^{\pi} \text{अषज्यापताप} = \pi \cdot \text{अ}$$

५२ । $\int_{०}^{\text{अ}} \text{ताय}\sqrt{\text{अ}^{२} - \text{य}^{२}} = \frac{\pi\,\text{अ}^{२}}{४}$

५३ । $\int_{१}^{\text{ढ}} \frac{\text{ला}(\text{लाय})}{\text{य}}\,\text{ताय} = ०$

$$५४ ।\ \int_{0}^{\pi} इ^{-य}\,\text{कोज्या}^{३}य\,\text{ताय} = \frac{२}{१५}\left(१+इ^{-\pi}\right)$$

$$५५ ।\ \int_{0}^{\frac{\pi}{४}} \text{षस्पष}\ \text{छे}^{२}\text{षताष} = \frac{\pi}{४} - \frac{१}{२}$$

५६ । अकग वृत्तार्द्ध के क केन्द्र पर एक कीट बैठाया और दूसरा अ विन्दु पर । दूसरा परिधि के राह से और पहला कग व्यासार्द्ध के राह से ग विन्दु पर आने के लिये चला । दूसरा परिधि में अ विन्दु से जितनी चापात्मक दूरी पर पहुंचता था उसकी कोटिज्या से उस के प्रतिक्षण की गति को गुण देने और व्यासार्द्ध का भाग देने से जो हो उतना प्रतिक्षण पहला चलता था तो बतावो कि जब दूसरा ग विन्दु पर पहुंचा उस समय पहला कहां पर पहुंचा । उ० क ही विन्दु पर लौट कर फिर पहुंचा ।

५७ । एक लड़के ने एक सीधी १० हाथ की पङ्क्ति में चावलों को बिछा दिया । उन चावलों को खाने के लिये एक जोड़ा कबूतर उतरे । नर एक सिरे से खाने लगा और मादा दूसरे सिरे से । नर उस सिरे से जितना हटता जाता था उससे उसके प्रतिक्षण की गति में भाग देने से जो लब्ध हो उतनी मादे की प्रातिक्षणिकगति है तो बतावो कि उस सिरे से कितनी दूरी पर नर मादा से मिलेगा । उ०, ७.६३ हाथ

इति प्रथमाध्यायः ।

द्वितीयाध्याय ।

अकरणीगत भिन्न संबन्ध का चलानयन ।

१३ । यदि तात्कालिक सम्बन्ध का रूप

$$\frac{\text{अ}' + \text{क}'\text{य} + \text{ख}'\text{य}^{२} + \cdots + \text{प}'\text{य}^{\text{म}}}{\text{अ} + \text{क}\text{य} + \text{ख}\text{य}^{२} + \cdots + \text{प}\text{य}^{\text{न}}} \text{ ऐसा हो}$$

जहां $\text{अ}'$, $\text{क}'$, अ, क इत्यादि स्थिराङ्क हों और म, न घन और अभिन्न हों।

यहां यदि न से म बड़ा हो तो बीजगणित की साधारण भागविधि से अंश में हर का भाग देकर अभिन्न लब्धि ले आ सक्ते हो और शेष (जिस में कि सब से बड़ा य का घात न घात से अल्प रहेगा) के नीचे हर का हर लगा दो । इस प्रकार पूर्व भिन्न का रूप अभिन्न और भिन्न दो खण्डों के योग तुल्य जो होगा उस में अभिन्न का चल तो पहले अध्याय के सूत्रों से सहज में जाना जायगा परन्तु भिन्न के चलानयन के लिये पहले इस भिन्न को अनेक भिन्नों के योग के रूप में ले आने का यत्न करते हैं ।

कल्पना करो कि वह भिन्न $\frac{\text{ब}}{\text{भ}}$ है। जहां ब और भ दोनों य के फल हैं और भ के मान में य का सब से बड़ा घात न है । लाघव के लिये मान लो कि भ में $\text{य}^{\text{न}}$ का गुणक १ है ।

कल्पना करो कि

$$\text{भ}=(\text{य}-\text{अ}_{१})(\text{य}-\text{क}_{१})^{\text{त}}(\text{य}^{२}-२\text{अ}_{२}\text{य}+\text{अ}_{२}^{२}+\text{क}_{२}^{२})(\text{य}^{२}२-\text{ग}_{१}\text{य}+\text{ग}_{१}^{२}+\text{घ}_{१}^{२})^{\text{थ}}$$

अब यहां यदि भ=0 ऐसा समीकरण हो तो इस में य का

(१) एक मान $= \text{अ}_{१}$ सम्भव संख्या ।

(२) त तुल्य सम्भव मान $= \text{क}_{१}$

(३) दो असम्भव मान$=\text{अ}_{२}\pm\text{क}_{२}\sqrt{-१}$

(४) थ जोड़े असम्भव मान, हर एक $= \text{ग}_{१}\pm\text{घ}_{१}\sqrt{-१}$

समीकरणों के सिद्धान्त से स्पष्ट है कि सब खण्डों का घात अवश्य भ के तुल्य होगा जहां $१ + त + २ + २थ = न$।

मानो कि

$$\frac{ब}{भ} = \frac{आ_१}{य - अ_१} + \frac{का_१}{(य - क_१)^{त}} + \frac{का_२}{(य - क_१)^{त-१}} + \frac{का_३}{(य - क_१)^{त-२}} + \cdots$$

$$+ \frac{का_{त}}{य - क_१} + \frac{खाय + गा}{य^२ - २अ_२य + अ_२^२ + क_२^२}$$

$$+ \frac{च_१य + ज_१}{(य^२ - २ग_१य + ग_१^२ + घ_१^२)^{थ}} + \frac{च_२य + ज_२}{(य^२ - २ग_१य + ग_१^२ + घ_१^२)^{थ-१}} + \cdots$$

$$+ \frac{च_{थ}य + ज_{थ}}{य^२ - २ग_१य + ग_१^२ + घ_१^२}$$

जहां आ, $का_१$, $का_२$, खा, गा, $च_१$, $ज_१$, इत्यादि सब स्थिराङ्क हैं। यहां यदि दहिने पक्ष के सब भिन्नों का समच्छेद विधि से योग करें तो स्पष्ट है कि अंश मान ब के तुल्य होगा। अब इस सरूप समीकरण में य के समान घातों के गुणकों को समान करने से स्थिराङ्कों का मान व्यक्त हो जायगा।

१४। भ के मान में $(य - क_१)^{त}$ इसके अवशिष्ट खण्डों के घात को फा(य) कल्पना करो और ब को फ(य) मानो तो

$$\frac{ब}{भ} = \frac{फ(य)}{(य - क_१)^{त} फा(य)} = \frac{फ(य) - \frac{फ(क_१)}{फा(क_१)} फा(य)}{(य - क_१)^{त} फा(य)} + \frac{\frac{फ(क_१)}{फा(क_१)}}{(य - क_१)^{त}}$$

यहां स्पष्ट देख पड़ता है कि यदि $य = क_१$ तो

$$फ(य) - \frac{फ(क_१)}{फा(क_१)} फा(य) = 0$$

इस लिये $(य - क_१)$ इससे $फ(य) - \frac{फ(क_१)}{फा(क_१)} फा(य)$ यह निःशेष होगा।

मानो कि $य - क_१$ इस का भाग देने से लब्धि $= फि(य)$ तो

$$\frac{ब}{भ} = \frac{फ(य)}{(य-क_१)^त फा(य)} = \frac{फि(य)}{(य-क_१)^{त-१} फा(य)} + \frac{फ(क_१)}{फा(क_१)} \frac{१}{(य-क_१)^त}$$

इसी रीति से

$$\frac{फि(य)}{(य-क_१)^{त-१} फा(य)} = \frac{फि(य) - \frac{फि(क_१)}{फा(क_१)} फा(य)}{(य-क_१)^{त-१} फा(य)} + \frac{\frac{फि(क_१)}{फा(क_१)}}{(य-क_१)^{त-१}}$$

यहां भी यदि $य = क_१$ तो $य - क_१$ से $फि(य) - \frac{फि(क_१)}{फा(क_१)} फा(य)$ निःशेष होगा। मानो कि भाग देने से लब्धि $= फी(य)$ तो

$$\frac{फ(य)}{(य-क_१)^त फा(य)} = \frac{फी(य)}{(य-क_१)^{त-२} फा(य)} + \frac{फ(क_१)}{फा(क_१)} \frac{१}{(य-क_१)^त}$$
$$+ \frac{फि(क_१)}{फा(क_१) \cdot (य-क_१)^{त-१}}$$

यों बार बार क्रिया करने से भी स्पष्ट हो जायगा कि

$\frac{फ(य)}{(य-क_१)^त फा(य)}$ इस का मान अनेक खण्ड भिन्नों में ला सक्ते हैं

जिनके मान क्रम से $\frac{फ(क_१)}{फा(क_१)} \cdot \frac{१}{(य-क_१)^त}, \frac{फि(क_१)}{फा(क_१)} \frac{१}{(य-क_१)^{त-१}}$

इत्यादि हैं। यहां अत्यन्त स्पष्ट है कि $\frac{फ(क_१)}{फा(क_१)}, \frac{फि(क_१)}{फा(क_१)}$ इत्यादि स्थिराङ्क हैं इस लिये १३वें प्रक्रम में जो $आ, का_१, का_२$ इत्यादि स्थिराङ्क

कल्पना किया है वह ठीक है। इस प्रकार आ, $का_1$, $का_2$ इत्यादि को स्थिराङ्क ठहराना मिस्टर होमर्शम काक्स (Mr. Homersham Cox) ने अपने चलराशिकलन (Integral Calculus) में लिखा है। इस प्रकार अकरणीगत भिन्न को खण्ड भिन्नों के रूप में ला सक्ते हैं।

इसी तरह यदि $भ = (य - अ_1)(य - क_1)(य - ख_1)\cdots$ ऐसा हो जहां $अ_1$, $क_1$, $ख_1$, इत्यादि सब परस्पर भिन्न और सम्भाव्य संख्या हैं

तो $\frac{ब}{भ} = \frac{आ_1}{य - अ_1} + \frac{का_1}{य - क_1} + \frac{खा_1}{य - ख_1} + \cdots$ ऐसा कल्पना कर सक्ते हो फिर पूर्ववत् सरूप समीकरण से $आ_1$, $का_1$, $खा_1$ इत्यादि के मान जान सक्ते हो।

१५। लाघव से भी $आ_1$, $का_1$, इत्यादि का मान निकाल सक्ते हो कल्पना करो कि $\frac{ब}{भ} = \frac{फ(य)}{फा(य)}$ और $फा(य) = (य - अ_1)(य - क_1)\cdots$ तो

$$\frac{फ(य)}{फा(य)} = \frac{आ_1}{य - अ_1} + \frac{का_1}{य - क_1} + \frac{खा_1}{य - ख_1} + \cdots$$

इस लिये

$$फ(य) = आ_1(य - क_1)(य - ख_1)\cdots$$
$$+ का_1(य - अ_1)(य - ख_1)\cdots + खा_1(य - अ_1)(य - क_1)\cdots + $$

इस सरूप समीकरण में चाहे य का मान जो मानो परन्तु समीकरण सत्य ही रहेगा इस लिये मानो कि $य = अ_1$ तो

$$फ(अ_1) = आ_1(अ_1 - क_1)(अ_1 - ख_1)\cdots(1)$$

क्योंकि और खण्ड = ०

परन्तु $फा(य) = (य - अ_1)(य - क_1)(य - ख_1)\cdots$

इस लिये $फा'(य) = (य - क_1)(य - ख_1)\cdots + (य - अ_1)(य - ख_1)\cdots$
$+ (य - अ_1)(य - क_1)\cdots + \cdots$

य के स्थान में $अ_1$ का उत्थापन देने से

$फा' (अ_१) = (अ_१ - क_१)(अ_१ - ख_१) \cdots$

इस लिये (१) समीकरण का रूप

$$फ(अ_१) = आ_१ \; फा'(अ_१) \;\therefore\; आ_१ = \frac{फ(अ_१)}{फा'(अ_१)}$$

इसी तरह $का_१ = \frac{फ(क_१)}{फा'(क_१)}$, $खा_१ = \frac{फ(ख_१)}{फा'(ख_१)}$, इत्यादि।

(१) उदाहरण $\int \frac{५य^३ - १००य + १५१}{य^२ - ५य + ६}$ ताय इस का मान बतावो।

यहां $\frac{५य^३ - १००य + १५१}{य^२ - ५य + ६} = ५य + २५ + \frac{-५य + १}{य^२ - ५य + ६}$

$$= ५य + २५ + \frac{आ_१}{य - २} + \frac{का_१}{य - ३}$$

समच्छेद करने से, $-५य + १ = य(आ_१ + का_१) - (३आ_१ + २का_१)$

इस लिये सरूप समीकरण से

$-५ = आ_१ + का_१$, $\quad -१ = ३आ_१ + २का_१$

$\therefore आ_१ = ६$, $का_१ = -१४$, इस लिये

$$\int \frac{५य^३ - १००य + १५१}{य^२ - ५य + ६} ताय$$

$$= \int ५ \; यताय + \int २५ \; ताय + ६\int \frac{ताय}{य - २} - १४\int \frac{ताय}{य - ३}$$

$$= \frac{५}{२}य^२ + २५य + ६ \; ला(य - २) - १४ \; ला(य - ३)$$

यह तेरहवें प्रक्रम की विधि से आया है।

१५वें प्रक्रम से निकालना हो तो अभिन्न खण्ड को छोड़ कर

$$\frac{-५य + १}{य^२ - ५य + ६} = \frac{-५य + १}{(य - २)(य - ३)} = \frac{फ(य)}{फा(य)},$$ यहां $अ_१ = २, क_१ = ३,$

$फ(य) = -५य + १,\ फा(य) = (य-२)\ (य-३)$ और

$फा'(य) = २य-५$ इस लिये $आ_१ = \frac{फ(अ_१)}{फा'(अ_१)} = \frac{-५\times२+१}{२\times२-५} = \frac{-९}{-१} = ९$

और $का_१ = \frac{फ(क_१)}{फा'(क_१)} = \frac{-५\times३+१}{२\times३-५} = \frac{-१४}{१} = -१४,$

फिर पूर्ववत् क्रिया करो ।

देखो १५वें प्रक्रम से कैसा लाघव से $आ_१$ और $का_१$ का मान आया है ।

(२) उ० । $\int \frac{य^२+१}{(य-१)(य+२)(य-३)}$ ताय इस का मान जानना है ।

यहां $अ_१ = १,\ क_१ = -२,\ ख_१ = ३,\ फ(य) = य^२+१$

$फा(य) = (य-१)\ (य+२)\ (य-३),$

$फा'(य) = (य+२)\ (य-३) + (य-१)\ (य-३) + (य-१)\ (य+२)$

इस लिये

$$आ_१ = \frac{फ(अ_१)}{फा'(अ_१)} = \frac{२}{३\times-२} = -\frac{१}{३},$$

$$का_१ = \frac{फ(क_१)}{फा'(क_१)} = \frac{५}{-३\times-५} = +\frac{१}{३},$$

$$खा_१ = \frac{फ(ख_१)}{फा'(ख_१)} = \frac{१०}{२\times५} = +१$$

इन का उत्थापन देने से

$$\frac{य^२+१}{(य-१)\ (य+२)\ (य-३)} = \frac{१}{य-३} + \frac{१}{३}\cdot\frac{१}{य+२} - \frac{१}{३}\cdot\frac{१}{य-१}$$

$$\therefore \int \frac{य^२+१}{(य-१)\ (य+२)\ (य-३)}\ ताय$$

$= \text{ला}\,(\text{य}-३) + \frac{१}{३}\,\text{ला}\,(\text{य}+२) - \frac{१}{३}\,\text{ला}\,(\text{य}-१)$

१६। पूर्व भिन्न में यदि $\text{फा}(\text{य}) = (\text{य}-\text{क}_१)^{\text{न}}\,\text{फि}(\text{य})$ ऐसा हो तो पूर्ववत् कल्पना करो कि

$$\frac{\text{ब}}{\text{भ}} = \frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{फा}(\text{य})} = \frac{\text{फ}(\text{य})}{(\text{य}-\text{क}_१)^{\text{न}}\,\text{फि}(\text{य})} = \frac{\text{का}_१}{(\text{य}-\text{क}_१)^{\text{न}}} + \frac{\text{का}_२}{(\text{य}-\text{क}_१)^{\text{न}-१}} + \cdots$$

$$+ \frac{\text{का}_\text{न}}{\text{य}-\text{क}_१} + \frac{\text{फी}(\text{य})}{\text{फि}(\text{य})}$$

जहां $\frac{\text{फी}(\text{य})}{\text{फि}(\text{य})}$ यह और खण्डभिन्नों का योग है।

ऊपर के समीकरण में दोनों पक्षों को $(\text{य}-\text{क}_१)^{\text{न}}$ से गुण देने से

$$\frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{फि}(\text{य})} = \text{फ}_१(\text{य}) = \text{का}_१ + \text{का}_२\,(\text{य}-\text{क}_१) + \text{का}_३\,(\text{य}-\text{क}_१)^२ + \cdots$$

$$+ \frac{\text{फी}(\text{य})}{\text{फि}(\text{य})}\,(\text{य}-\text{क}_१)^{\text{न}}$$

य के स्थान में $\text{क}_१$ का उत्थापन देने से

$$\begin{aligned}
\text{फ}_१(\text{क}_१) &= \text{का}_१\\
\text{फ}'_१(\text{क}_१) &= \text{का}_२\\
\text{फ}''_१(\text{क}_१) &= २\,\text{का}_३\\
\text{फ}'''_१(\text{क}_१) &= २\cdot३\,\text{का}_४\\
\text{फ}^{\text{न}-१}_१(\text{क}_१) &= \underline{|\text{न}-१}\,\text{का}_\text{न}
\end{aligned}$$

(१) उदाहरण $\int \frac{११\text{य}^३+६\text{य}^२+७\text{य}+५}{\text{य}^४-५\text{य}^३+६\text{य}^२+४\text{य}-८}\,\text{ताय}$ इसका मान जानना है तो

यहां $\frac{११\text{य}^३+६\text{य}^२+७\text{य}+५}{\text{य}^४-५\text{य}^३+६\text{य}^२+४\text{य}-८} = \frac{११\text{य}^३+६\text{य}^२+७\text{य}+५}{(\text{य}-२)^३(\text{य}+१)}$, इस लिये

$क_1 = २,\ न = ३,\ फि(य) = य+१ \text{ । } फ_1(य) = \dfrac{११य^3+६य^2+७य+५}{य+१}$

$$फ'_1(य) = \frac{३३य^2+१८य+७}{य+१} - \frac{११य^3+६य^2+७य+५}{(य+१)^2}$$

$$फ''_1(य) = \frac{६६य+१८}{य+१} - \frac{२(३३य^2+१८य+७)}{(य+१)^2} + \frac{२(११य^3+६य^2+७य+५)}{(य+१)^3}$$

इस लिये $फ_1(क_1) = \dfrac{११\times८+६\times४+७\times२+५}{२+१} = \dfrac{८८+२४+१४+५}{३}$

$$= \frac{१४३}{३} = का_1$$

$$फ'_1(क_1) = \frac{३३\times४+१८\times२+७}{२+१} - \frac{१४३}{९} = \frac{१३२+३६+७}{३} - \frac{१४३}{९}$$

$$= \frac{१७५}{३} - \frac{१४३}{९} = \frac{५२५}{९} - \frac{१४३}{९} = \frac{३८२}{९} = का_2$$

और $फ''_1(क_1) = \dfrac{१५०}{३} - \dfrac{२(१३२+३६+७)}{९} + \dfrac{१४३\times२}{२७}$

$$= \frac{१३५०}{२७} - \frac{१०५०}{२७} + \frac{१४३\times२}{२७} = \frac{३००}{२७} + \frac{२८६}{२७} = \frac{५८६}{२७},\ \therefore \frac{२९३}{२७} = का_3$$

इसलिये भिन्न का रूपान्तर

$$\frac{१४३}{३}\frac{१}{(य-२)^3} + \frac{३८२}{९}\frac{१}{(य-२)^2} + \frac{२९३}{२७}\frac{१}{य-२} + \frac{४}{२७}\frac{१}{य+१}$$

तब

$$\int \frac{११य^3+६य^2+७य+५}{य^4-५य^3+६य^2+४य-८} ताय$$

$$=\frac{१४३}{३}\int\frac{ताय}{(य-२)^3}+\frac{३८२}{९}\int\frac{ताय}{(य-२)^2}+\frac{२९३}{२७}\int\frac{ताय}{य-२}+\frac{४}{२७}\int\frac{ताय}{य+१}$$

$$=\frac{२९३}{२७}ला(य-२)+\frac{४}{२७}ला(य+१)-\frac{१४३}{६(य-२)^2}-\frac{३८२}{९(य-२)}$$

१७। यदि भिन्न के हर में एक जोड़ा असम्भव राशि भी हो अर्थात् एक मान $अ+क\sqrt{-१}$ हो और दूसरा $अ-क\sqrt{-१}$ तो मानो कि

$$\frac{ब}{भ}=\frac{फ(य)}{फा(य)}=\frac{आ_१}{य-(अ+क\sqrt{-१})}+\frac{आ_२}{य-(अ-क\sqrt{-१})}+\frac{फी(य)}{फि(य)}$$

जहां $\frac{फी(य)}{फि(य)}$ और खण्डों का योग है तो समच्छेद करने से

$$फ(य)=आ_१\{य-(अ-क\sqrt{-१})\}फि(य)$$
$$+आ_२\{य-(अ+क\sqrt{-१})\}फि(य)$$
$$+फी(य)\{य-(अ+क\sqrt{-१})\}\{य-(अ-क\sqrt{-१})\}$$
$$=\{(आ_१+आ_२)य-(आ_१+आ_२)अ+क(आ_१-आ_२)\sqrt{-१}\}फि(य)$$
$$+फी(य)\{य^2-२अय+अ^2+क^2\}$$

अब यहां य के मान में $अ+क\sqrt{-१}$ वा $अ-क\sqrt{-१}$ का उत्थापन देने से स्पष्ट है कि $य^2-२अय+अ^2+क^2=0$

अर्थात् $य^2-२अय-(अ^2+क^2)$ तब ऊपर के समीकरण का रूप

$$फ(य)=\{(आ_१+आ_२)य-(आ_१+आ_२)अ+क(आ_१-आ_२)\sqrt{-१}\}फि(य)\cdots(१)$$

ऐसा होगा।

(१) इस में वार वार यदि $य^2$ के स्थान में $२अय-(अ^2+क^2)$ का उत्थापन दो तो स्पष्ट है कि अन्त में $दाय+घ=दा'य+घ'$ ऐसा स्वरूप होगा फिर इस में य के स्थान में $अ+क\sqrt{-१}$ वा $अ-क\sqrt{-१}$ उत्थापन देने से और असम्भाव्य और सम्भाव्य संख्याओं के गुणक समान

करने से दा और धा प्रगट हो जायंगे इन पर से ($आ_1$+$आ_2$) और ($आ_1$ +$आ_2$)अ भी प्रगट हो जायंगे । अथवा

$$\frac{फ(य)}{फा(य)} = \frac{आ_1}{य-(अ+क\sqrt{-1})} + \frac{आ_2}{य-(अ-क\sqrt{-1})} + \frac{फी(य)}{फि(य)}$$

$$= \frac{आ_1य-(आ_1अ-आ_1क\sqrt{-1})+आ_2य-(आ_2अ+आ_2क\sqrt{-1})}{य^2-२अय+अ^2+क^2} + \frac{फी(य)}{फि(य)}$$

$$= \frac{खाय+गा}{य^2-२अय+अ^2+क^2} + \frac{फी(य)}{फि(य)}$$ जहां य का गुणक ख है और अवशिष्ट गा हैं। अब पूर्ववत् समच्छेद करने से और य के समान घातों के गुणक समान करने से खा, और गा व्यक्त हो जायंगे ।

(१) उदाहरण $\int \frac{ताय}{अ^3+य^3}$ इस का मान जानना है ।

यहां $\frac{1}{अ^3+य^3} = \frac{1}{(अ+य)(अ^2-अय+य^2)} = \frac{आ_1}{य+अ} + \frac{खाय+गा}{य^2-अय+अ^2}$

समच्छेद कर अंश को रूप के तुल्य करने से

$१=आ_1य^2-अआ_1य+आ_1अ^2+खाय^2+अखाय+गाय+गाअ$

$=य^2(आ_1+खा)+य(अखा+गा-अआ_1)+आ_1अ^2+गाअ$

इस लिये $आ_1+खा=0$ । $अखा+गा-अआ_1=0$ ।

$१=अ(आ_1अ+गा)$

$अआ_1+अखा=0$ | $गा+२अखा=0 \therefore गा=-२अ\cdot खा$

$गा-अआ_1+अखा=0$ | $आ_1=-खा$

$अआ_1=-अखा \therefore १=अ(आ_1अ+गा)=अ(-अखा-२अखा)$

$=-३अ^2खा$

$\therefore -\frac{1}{३अ^2}=खा,\ आ_1=+\frac{1}{३अ^2}$ और $गा=-२अखा=\frac{२}{३अ}$ ।

इस लिये इनके उत्थापन से

$$\int \frac{\text{ताय}}{\text{अ}^{3}+\text{य}^{3}} = \int \frac{\text{ताय}}{\text{३अ}^{2}(\text{य}+\text{अ})} + \int \frac{-\dfrac{\text{य}}{\text{३अ}^{2}}+\dfrac{\text{२}}{\text{३अ}}}{\text{य}^{2}-\text{अय}+\text{अ}^{2}}\,\text{ताय}$$

$$= \frac{\text{१}}{\text{३अ}^{2}}\,\text{ला}\,(\text{य}+\text{अ}) - \frac{\text{१}}{\text{३अ}^{2}} \int \frac{\text{य}-\text{२अ}}{\text{य}^{2}-\text{अय}+\text{अ}^{2}}\,\text{ताय}$$

$$= \frac{\text{१}}{\text{३अ}^{2}}\,\text{ला}\,(\text{य}+\text{अ}) - \frac{\text{१}}{\text{६अ}^{2}} \int \frac{\text{२य}-\text{अ}-\text{३अ}}{\text{य}^{2}-\text{अय}+\text{अ}^{2}}\,\text{ताय}$$

$$= \frac{\text{१}}{\text{३अ}^{2}}\,\text{ला}\,(\text{य}+\text{अ}) - \frac{\text{१}}{\text{६अ}^{2}} \int \frac{\text{२य}-\text{अ}}{\text{य}^{2}-\text{अय}+\text{अ}^{2}}\,\text{ताय}$$

$$- \frac{\text{१}}{\text{६अ}^{2}} \int \frac{-\text{३अ}}{\text{य}^{2}-\text{अय}+\text{अ}^{2}}\,\text{ताय}$$

$$= \frac{\text{१}}{\text{३अ}^{2}}\,\text{ला}(\text{य}+\text{अ}) - \frac{\text{१}}{\text{६अ}^{2}}\,\text{ला}(\text{य}^{2}-\text{अय}+\text{अ}^{2}) + \frac{\text{३}}{\text{६अ}} \int \frac{\text{ताय}}{\text{य}^{2}-\text{अय}+\text{अ}^{2}}$$

$$= \frac{\text{१}}{\text{३अ}^{2}}\,\text{ला}(\text{य}+\text{अ}) - \frac{\text{१}}{\text{६अ}^{2}}\,\text{ला}(\text{य}^{2}-\text{अय}+\text{अ}^{2})$$

$$+ \frac{\text{१}}{\text{२अ}} \int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}-\frac{\text{अ}}{\text{२}})^{2}+\frac{\text{३अ}^{2}}{\text{४}}} \quad \text{यदि } \text{ल}=\text{य}-\frac{\text{अ}}{\text{२}}$$

$$= \frac{\text{१}}{\text{३अ}^{2}}\,\text{ला}\,(\text{य}+\text{अ}) - \frac{\text{१}}{\text{६अ}^{2}}\,\text{ला}(\text{य}^{2}-\text{अय}+\text{अ}^{2}) + \frac{\text{१}}{\text{२अ}} \int \frac{\text{ताल}}{\text{ल}^{2}+\frac{\text{३}}{\text{४}}\text{अ}^{2}}$$

$$= \frac{\text{१}}{\text{३अ}^{2}}\,\text{ला}(\text{य}+\text{अ}) - \frac{\text{१}}{\text{६अ}^{2}}\,\text{ला}(\text{य}^{2}-\text{अय}+\text{अ}^{2}) + \frac{\text{२}}{\text{अ}\sqrt{\text{३}}}\,\frac{\text{१}}{\text{२अ}}\,\text{स्प}^{-\text{१}}\,\frac{\text{२य}-\text{अ}}{\text{अ}\sqrt{\text{३}}}$$

$$= \frac{\text{१}}{\text{३अ}^{2}}\,\text{ला}(\text{य}+\text{अ}) - \frac{\text{१}}{\text{६अ}^{2}}\,\text{ला}(\text{य}^{2}-\text{अय}+\text{अ}^{2}) + \frac{\text{१}}{\text{अ}^{2}\sqrt{\text{३}}}\,\text{स्प}^{-\text{१}}\,\frac{\text{२य}-\text{अ}}{\text{अ}\sqrt{\text{३}}}$$

वा $१=आ_१(य^२-अय+अ^२)+(खाय+गा)(य+अ)$ इस में यदि $य=-अ$

तो $१=आ_१(अ^२+अ^२+अ^२)=३अ^२आ_१ \therefore आ_१=\frac{१}{३अ^२}$ समीकरण

में इस का उत्थापन देने से

$$३अ^२=य^२-अय+अ^२+३अ^२(खाय+गा)(य+अ)$$

समशोधन से $३अ^२(खाय+गा)(य+अ)=२अ^२+अय-य^२$

दोनों पक्षों में $य+अ$ का भाग देने से $३अ^२(खाय+गा)=२अ-य$

$\therefore खाय+गा=\frac{२अ-य}{३अ^२}$। इन पर से फिर पूर्वोक्त क्रिया करो।

अथवा इसी प्रक्रम के (१) समीकरण से यहां

$$फ(य)=१=\{(आ_१+आ_२)य-(आ_१+आ_२)अ+क(आ_१-आ_२)\sqrt{-१}\}फि(य)$$
$$=(खाय+गा)(य+अ)=खाय^२+गाय+अखाय+गाअ$$
$$=खाय^२+(गा+अखा)य+गाअ$$
$$खा(अय-अ^२)+(गा+अखा)य+गा\,अ=य(गा+२अखा)$$
$$+गाअ-अ^२खा$$

(यहां $खा=आ_१+आ_२$। $गा=(आ_१+आ_२)अ+क(आ_१-आ_२)\sqrt{-१}$

अब $य=\frac{अ+अ\sqrt{३}\sqrt{-१}}{२}$ मानने से

$$१=\frac{(अ+अ\sqrt{३}\sqrt{-१})}{२}(गा+२अखा)+गाअ-अ^२खा$$

$$=\frac{अ}{२}(गा+२अखा)+गाअ-अ^२खा+\frac{अ\sqrt{३}\sqrt{-१}}{२}(गा+२अखा)$$

सम्भाव्य और असम्भाव्य के गुणक को तुल्य करने से

$१ = \frac{अ}{२}(गा + २अखा) + गाअ - अ^२खा$ । $गा + २अखा = ०$

$\therefore १ = गाअ - अ^२खा$ और $गा = -२अखा$

$\therefore १ = गाअ - अ^२खा = -२अ^२खा - अ^२खा = -३अ^२खा$

$\therefore खा = -\frac{१}{३अ^२}$ फिर अब पूर्ववत् क्रिया करो।

१८। यदि भिन्न के हर में एक जोड़ा असम्भव मान त वार हो तो पूर्ववत्

$$\frac{ब}{भ} = \frac{फ(य)}{फा(य)} = \frac{खा_तय + गा_त}{(य^२ - दय + घ)^त} + \frac{खा_{त-१}य + गा_{त-१}}{(य^२ - दय + घ)^{त-१}} + \cdots$$

$$+ \frac{खा_१य + गा_१}{य^२ - दय + घ} + \frac{फी(य)}{फि(य)}$$ ऐसा मानने से

$फा(य) = (य^२ - दय + घ)^त फि(य)$ ऐसा हुआ फिर समच्छेद करने से

$$फ(य) = (खा_तय + गा_त)\ फि(य)$$
$$+ (खा_{त-१}य + गा_{त-१})\ (य^२ - दय + घ)\ फि(य)$$
$$+ \cdots + (य^२ - दय + घ)^त फी(य) \cdots\cdots (१)$$

अब यहां य के स्थान में इसके असम्भव मान का उत्थापन दो अर्थात् $य^२ - दय + घ = ०$ के मानो तो

तो (१) का लघुरूप

$$फ(य) = (खा_त + गा_त)\ फि(य)$$

यहां १७वें प्रक्रम से $खा_त$ और $गा_त$ का मान निकाल समशोधन करने से (१) समीकरण का रूप

$$फ(य) - (खा_त + गा_त)\ फि(य)$$
$$= (खा_{त-१} + गा_{त-१})\ (य^२ - दय + घ)\ फि(य) + \cdots$$ हुआ।

यह सरूप समीकरण है और यहां दहना पक्ष $य^२ - दय + घ$ इससे निःशेष होता है इस लिये बायां पक्ष भी निःशेष होगा कल्पना करो कि भाग देने से लब्धि $फ_१(य)$ है तो

$$फ_१(य) = (खा_{त-१} + गा_{त-१})\ फि(य)$$
$$+ (खा_{त-२} + गा_{त-२})\ (य^२ - दय + घ)\ फि(य) + \cdots\cdots (२)$$

यहां भी यदि $य^2 - दय + घ = 0$ तेा (२) का रूप

$फ_1(य) = (खा_{त-1} + गा_{त-1})\,फि(य)$ इस से १०वें प्रक्रम से

$खा_{त-1}$ और $गा_{त-1}$ निकाल फिर समशेाधन और $य^2 - दय + घ$ का देानें पक्षें में भाग देने से बायें पक्ष को $फ_2(य)$ मानने से और $य^2 - दय + घ = 0$ करने से इसी प्रकार $खा_{त-2}$, $गा_{त-2}$ इत्यादि भी व्यक्त हेा जायंगे।

(१) उदाहरण $\int \frac{क(य^2 - ३य - २)}{(य^2+य+१)^2(य+१)^2}$ ताय इसका मान जानना है तेा

$$यहां\ \frac{य^2 - ३य - २}{(य^2 + य + १)^2 (य + १)^2} = \frac{खा_2 य + गा_2}{(य^2 + य + १)^2} + \frac{खा_1 य + गा_1}{य^2 + य + १} + \frac{फी(य)}{(य+१)^2}$$

$$तब\ य^2 - ३य - २ = (खा_2 य + गा_2)(य + १)^2$$

$$+ (खा_1 य + गा_1)(य^2 + य + १)(य+१)^2 + (य^2 + य + १)^2 फी(य) \cdots\cdots\cdots (३)$$

इस में $य^2 + य + १ = 0$ करने से

$$य^2 - ३य - २ = (खा_2 य + गा_2)(य + १)^2$$

$$= (खा_2 य + गा_2)(य^2 + २य + १)$$

$य^2$ के स्थान में $- य - १$ का उत्थापन देने से

$$- ४य - ३ = (खा_2 य + गा_2)\,य$$

$$= खा_2 य^2 + गा_2 य = - खा_2 य - खा_2 + गा_2 य$$

इस लिये $- ४ = गा_2 - खा_2$ और $- ३ = - खा_2 \therefore ३ = खा_2$ और $- ४ = गा_2 - खा_2 = गा_2 - ३ \therefore - १ = गा_2$

(३) इनका उत्थापन देकर समशेाधन करने से

$$य^2 - ३य - २ - (३य - १)(य + १)^2$$

$= (\text{खा}_1\text{य} + \text{गा}_1)(\text{य}^2 + \text{य} + १)(\text{य} + १)^2 + (\text{य}^2 + \text{य} + १)^2\text{फी}(\text{य})$

दोनों पक्षों में $\text{य}^2 + \text{य} + १$ का भाग देने से

$-(३\text{य}+१) = (\text{खा}_1\text{य}+\text{गा}_1)(\text{य}+१)^2 + (\text{य}^2+\text{य}+१)\text{फी}(\text{य}) \cdots\cdots (४)$

फिर इस में $\text{य}^2 + \text{य} + १ = ०$ मानने से

$-(३\text{य}+१) = (\text{खा}_1\text{य}+\text{गा}_1)(\text{य}+१)^2 = (\text{खा}_1\text{य}+\text{गा}_1)(\text{य}^2+\text{य}+१+\text{य})$

$= (\text{खा}_1\text{य} + \text{गा}_1)\,\text{य} = -\text{खा}_1(\text{य}+१) + \text{गा}_1\text{य}$ ।

इस लिये $-३ = -\text{खा}_1 + \text{गा}_1$ और $-१ = -\text{खा}_1$ $\therefore १ = \text{खा}_1$ और $-२ = \text{गा}_1$ अब (४) में इनका उत्थापन दे समशोधन कर $\text{य}^2+\text{य}+१$ का भाग देने से $-(\text{य}-१) = \text{फी}(\text{य})$

इस लिये $\dfrac{\text{फी}(\text{य})}{(\text{य}+१)^2} = -\dfrac{\text{य}-१}{(\text{य}+१)^2} = -\dfrac{\text{य}+१}{(\text{य}+१)^2} + \dfrac{२}{(\text{य}+१)^2}$

$= -\dfrac{१}{\text{य}+१} + \dfrac{२}{(\text{य}^2+१)^2}$

तब

$$\int \frac{\text{य}^2-३\text{य}-२}{(\text{य}^2+\text{य}+१)^2(\text{य}+१)^2}\text{ताय} = \int\frac{३\text{य}-१}{(\text{य}^2+\text{य}+१)^2}\text{ताय}$$

$$+\int\frac{\text{य}-२}{\text{य}^2+\text{य}+१}\text{ताय} + \int\frac{२\text{ताय}}{(\text{य}+१)^2} - \int\frac{\text{ताय}}{\text{य}+१}$$

यहां बारहवें प्रक्रम से सब का मान जान सक्ते हो पहले खण्ड का यदि मान व्यक्त हो तो। पहले का मान जानने के लिये पहले मानो कि $\int\dfrac{\text{तार}}{(\text{र}^2+\text{अ}^2)^\text{न}}$ इस का मान जानना है तो

$$\frac{\text{तार}}{(\text{र}^2+\text{अ}^2)^\text{न}} = \frac{१}{\text{अ}^2}\cdot\frac{(\text{र}^2+\text{अ}^2-\text{र}^2)\text{तार}}{(\text{र}^2+\text{अ}^2)^\text{न}} = \frac{१}{\text{अ}^2}\cdot\frac{\text{तार}}{(\text{र}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}-१}}$$

$$-\frac{१}{\text{अ}^2}\cdot\frac{\text{रतार}\cdot\text{र}}{(\text{र}^2+\text{अ}^2)^\text{न}}$$

परन्तु खण्ड चलानयन से $\frac{\text{१}}{\text{अ}^{\text{२}}}\int\frac{\text{२र तार}\cdot\text{र}}{\text{२}(\text{र}^{\text{२}}+\text{अ}^{\text{२}})^{\text{न}}}$

$$= -\frac{\text{१}}{\text{अ}^{\text{२}}}\frac{\text{१}}{\text{२}(\text{न}-\text{१})}\frac{\text{र}}{(\text{र}^{\text{२}}+\text{अ}^{\text{२}})^{\text{न}-\text{१}}} + \frac{\text{१}}{\text{अ}^{\text{२}}}\cdot\frac{\text{१}}{\text{२}(\text{न}-\text{१})}\int\frac{\text{तार}}{(\text{र}^{\text{२}}+\text{अ}^{\text{२}})^{\text{न}-\text{१}}}$$

इस लिये $\int\frac{\text{तार}}{(\text{र}^{\text{२}}+\text{अ}^{\text{२}})^{\text{न}}} = \frac{\text{१}}{\text{अ}^{\text{२}}}\frac{\text{१}}{\text{२}(\text{न}-\text{१})}\frac{\text{र}}{(\text{र}^{\text{२}}+\text{अ}^{\text{२}})^{\text{न}-\text{१}}}$

$$+\frac{\text{१}}{\text{अ}^{\text{२}}}\cdot\frac{\text{२न}-\text{३}}{\text{२}(\text{न}-\text{१})}\int\frac{\text{तार}}{(\text{र}^{\text{२}}+\text{अ}^{\text{२}})^{\text{न}-\text{१}}} \cdots (\text{अ})$$

इस (अ) सिद्धान्त को अच्छी तरह से सीखो।

ऊपर के उदाहरण में $\frac{\text{३य}-\text{१}}{(\text{य}^{\text{२}}+\text{य}+\text{१})^{\text{२}}} = \frac{\text{३}(\text{य}-\frac{\text{१}}{\text{३}})}{(\text{य}^{\text{२}}+\text{य}+\text{१})^{\text{२}}}$

$$= \frac{\frac{\text{३}}{\text{२}}(\text{२य}+\text{१}-\text{१}-\frac{\text{२}}{\text{३}})}{(\text{य}^{\text{२}}+\text{य}+\text{१})^{\text{२}}} = \frac{\frac{\text{३}}{\text{२}}(\text{२य}+\text{१})}{(\text{य}^{\text{२}}+\text{य}+\text{१})^{\text{२}}} - \frac{\text{५}}{\text{२}}\frac{\text{१}}{(\text{य}^{\text{२}}+\text{य}+\text{१})^{\text{२}}}$$

इस लिये $\int\frac{\text{३य}-\text{१}}{(\text{य}^{\text{२}}+\text{य}+\text{१})^{\text{२}}}\text{ताय}$

$$= \frac{\text{३}}{\text{२}}\int(\text{२य}+\text{१})\,\text{ताय}\,(\text{य}^{\text{२}}+\text{य}+\text{१})^{-\text{२}} - \frac{\text{५}}{\text{२}}\int\frac{\text{ताय}}{(\text{य}^{\text{२}}+\text{य}+\text{१})^{\text{२}}}$$

$$= -\frac{\text{३}}{\text{२}}\frac{\text{१}}{\text{य}^{\text{२}}+\text{य}+\text{१}} - \frac{\text{५}}{\text{२}}\int\frac{\text{ताय}}{(\text{य}^{\text{२}}+\text{य}+\text{१})^{\text{२}}}\text{ ।}$$

$\frac{\text{ताय}}{(\text{य}^{\text{२}}+\text{य}+\text{१})^{\text{२}}} = \frac{\text{ताय}}{\{(\text{य}+\frac{\text{१}}{\text{२}})^{\text{२}}+\frac{\text{३}}{\text{४}}\}^{\text{२}}} = \frac{\text{तार}}{(\text{र}^{\text{२}}+\text{अ}^{\text{२}})^{\text{२}}}$, यदि $\text{र} = \text{य}+\frac{\text{१}}{\text{२}}$

और $\frac{\text{३}}{\text{४}} = \text{अ}^{\text{२}}$

(अ) सिद्धान्त से

$$\int\frac{\text{ताय}}{(\text{य}^२+\text{य}+१)^२}=\int\frac{\text{तार}}{(\text{र}^२+\text{अ}^२)^२}=\frac{४}{३}\cdot\frac{१}{२}\cdot\frac{२\text{य}+१}{२(\text{र}^२+\text{अ}^२)}$$

$$+\frac{४}{३}\cdot\frac{१}{२}\int\frac{\text{तार}}{\text{र}^२+\text{अ}^२}$$

$$=\frac{१}{३}\;\frac{२\text{य}+१}{\text{य}^२+\text{य}+१}+\frac{२}{३}\int\frac{\text{ताय}}{\text{य}^२+\text{य}+१}=\frac{१}{३}\frac{२\text{य}+१}{\text{य}^२+\text{य}+१}+\frac{२}{३}\frac{२}{\sqrt{३}}\text{स्प}^{-१}\frac{२\text{य}+१}{\sqrt{३}}$$

और $\frac{\text{य}-२}{\text{य}^२+\text{य}+१}=\frac{\frac{१}{२}(२\text{य}-४)}{\text{य}^२+\text{य}+१}=\frac{\frac{१}{२}(२\text{य}+१-५)}{\text{य}^२+\text{य}+१}=\frac{\frac{१}{२}(\text{य}+१)}{\text{य}^२+\text{य}+१}-\frac{५}{२}\frac{१}{\text{य}^२+\text{य}+१}$

इसलिये

$$\int\frac{\text{य}-२}{\text{य}^२+\text{य}+१}\text{ताय}=\frac{१}{२}\int(२\text{य}+१)\text{ताय}\div(\text{य}^२+\text{य}+१)-\frac{५}{२}\int\frac{\text{ताय}}{\text{य}^२+\text{य}+१}$$

$$=\frac{१}{२}\text{ला}(\text{य}^२+\text{य}+१)-\frac{५}{२}\int\frac{\text{तार}}{\text{र}^२+\text{अ}^२}=\frac{१}{२}\text{ला}(\text{य}^२+\text{य}+१)-\frac{५}{२}\cdot\frac{२}{\sqrt{३}}\text{स्प}^{-१}\frac{२\text{य}+१}{\sqrt{३}}\text{ ।}$$

$२\int\frac{\text{ताय}}{(\text{य}+१)^२}=\frac{-२}{\text{य}+१}$ । और $\int\frac{\text{ताय}}{\text{य}+१}=\text{ला}(\text{य}+१)$ इन सबको इकट्ठा करने से

$$\int\frac{३\text{य}-१}{(\text{य}^२+\text{य}+१)^२}\text{ताय}$$

$$=-\frac{३}{२(\text{य}^२+\text{य}+१)}-\frac{५}{६}\frac{२\text{य}+१}{\text{य}^२+\text{य}+१}-\frac{५}{३}\frac{२}{\sqrt{३}}\text{स्प}^{-१}\frac{२\text{य}+१}{\sqrt{३}}$$

$$\int\frac{\text{य}-२}{\text{य}^२+\text{य}+१}=\frac{१}{२}\text{ला}(\text{य}^२+\text{य}+१)-\frac{५}{२}\;\frac{२}{\sqrt{३}}\text{स्प}^{-१}\;\frac{२\text{य}+१}{\sqrt{३}}$$

$$\int\frac{२\text{ताय}}{(\text{य}+१)^२}=-\frac{२}{\text{य}+१}$$

$$\int \frac{\text{ताय}}{\text{य}+१} = \text{ला}(\text{य}+१)$$

इस लिये

$$\int \frac{३\text{य}-१}{(\text{य}^२+\text{य}+१)^२}\text{ताय} + \int \frac{\text{य}-२}{\text{य}^२+\text{य}+१}\text{ताय} + \int \frac{२\text{ताय}}{(\text{य}+१)^२} - \int \frac{\text{ताय}}{\text{य}+१}$$

$$= -\frac{३}{२(\text{य}^२+\text{य}+१)} - \frac{५}{६}\,\frac{२\text{य}+१}{\text{य}^२+\text{य}+१} - \frac{२५}{३}\,\frac{१}{\sqrt{३}}\,\text{स्प}^{-१}\frac{२\text{य}+१}{\sqrt{३}}$$

$$+ \frac{१}{२}\,\text{ला}(\text{य}^२+\text{य}+१) - \frac{२}{\text{य}+१} - \text{ला}(\text{य}+१)\ ।$$

$\int \frac{\text{तार}}{(\text{र}^२+\text{अ}^२)^\text{न}}$ इस में यदि अ· स्पप=र तो $\frac{\text{अ}\cdot\text{ताप}}{\text{कोज्या}^२\text{प}} = \text{तार}$

और $(\text{र}^२+\text{अ}^२) = \text{अ}^२\,\text{स्प}^२\,\text{प}+\text{अ}^२ = \text{अ}^२\,(\text{छे}^२\text{प}) = \frac{\text{अ}^२}{\text{कोज्या}^२\text{प}}$

इस लिये $\frac{\text{तार}}{(\text{र}^२+\text{अ}^२)^\text{न}} = \int \frac{\text{अ}\cdot\text{ताप}}{\text{कोज्या}^२\text{प}\left(\frac{\text{अ}^२}{\text{कोज्या}^२\text{प}}\right)^\text{न}} = \int \frac{\text{अ}\cdot\text{ताप}\cdot\text{कोज्या}^{२\text{न}}\text{प}}{\text{अ}^{२\text{न}}\text{कोज्या}^२\text{प}}$

$$= \frac{१}{\text{अ}^{२\text{न}-१}} \int \text{तापकोज्या}^{२\text{न}-२}\text{प}$$

$$= \frac{\text{ज्याप}}{\text{मअ}^{२-\text{न}१}}\left\{\text{कोज्या}^{\text{म}-१}\text{प} + \frac{\text{म}-१}{\text{म}-२}\text{कोज्या}^{\text{म}-३}\text{प} + \frac{(\text{म}-१)(\text{म}-३)}{(\text{म}-२)(\text{म}-४)}\text{कोज्या}^{\text{म}-५}\text{प} + \cdots\right\}$$

$$+ \frac{(\text{म}-१)(\text{म}-३)(\text{म}-५)\cdots१}{\text{अ}^{२\text{न}-१}\text{म}(\text{म}-२)(\text{म}-४)\cdots\cdots२}\text{प}$$

१२वें प्रक्रम के १५वें उदाहरण की विधि से । यहां २न—२=म ।

इस तरह से भी $\int \frac{\text{तार}}{(\text{र}^२+\text{अ}^२)^\text{न}}$ इसका मान जान सकते हो।

१६। ऊपर के प्रक्रमों से स्पष्ट है कि किसी अकरणीगत भिन्न सम्बन्ध के चलानयन के लिये जो खण्ड भिन्न किये गये हैं उनका चार प्रकार का रूप होता है

$$(१)\ \frac{\text{आ}_१ \text{ताय}}{\text{य}-\text{अ}_१},\quad (२)\ \frac{\text{का}_१ \text{ताय}}{(\text{य}-\text{क}_१)^{\text{त}}},$$

$$(३)\ \frac{(\text{खाय}+\text{गा})\text{ताय}}{\text{य}^२-२\text{अ}_२\text{य}+\text{अ}_२^२+\text{क}_२^२} = \frac{\text{खाय}+\text{गा}}{(\text{य}-\text{अ}_२)^२+\text{क}_२^२}\text{ताय}$$

$$(४)\ \frac{\text{च}_१\text{य}+\text{ज}_१}{\{(\text{य}-\text{ग}_१)^२+\text{घ}_१^२\}^{\text{थ}}}\text{ताय}$$ इन में (१), (२), (३) का चलानयन तो पहले कर आये हैं रहा चौथा उसको यदि

$$\frac{\text{च}_१\text{य}+\text{ज}_१}{\{(\text{य}-\text{ग}_१)^२+\text{घ}_१^२\}^{\text{थ}}}\text{ताय} = \frac{\text{च}_१\text{य}-\text{च}_१\text{ग}_१+\text{च}_१\text{ग}_१+\text{ज}_१}{\{(\text{य}-\text{ग}_१)^२+\text{घ}_१^२\}^{\text{थ}}}\text{ताय}$$

$$= \frac{\text{च}_१(\text{य}-\text{ग}_१)\text{ताय}}{\{(\text{य}-\text{ग}_१)^२+\text{घ}_१^२\}^{\text{थ}}} + \frac{\text{च}_१\text{ग}_१+\text{ज}_१}{\{(\text{य}-\text{ग}_१)^२+\text{घ}_१^२\}^{\text{थ}}}\text{ताय}$$

यहां पहले खण्ड का चल पिछले प्रक्रमों से स्पष्ट है कि

$$\frac{-\text{च}_१}{२(\text{थ}-१)\{(\text{य}-\text{ग}_१)^२+\text{घ}_१^२\}^{\text{थ}-१}}$$ यह है

दूसरे खण्ड में यदि $\text{य}-\text{ग}_१=\text{र}$ तो

$$\frac{\text{च}_१\text{ग}_१+\text{ज}_१}{\{(\text{य}-\text{ग}_१)^२+\text{घ}_१^२\}^{\text{थ}}}\text{ताय} = \frac{\text{स्थिताr}}{(\text{र}^२+\text{घ}_१^२)^{\text{थ}}}$$ । इसका मान १८वें प्रक्रम के

(अ) सिद्धान्त से स्पष्ट है यहां $\text{च}_१\text{ग}_१+\text{ज}_१=\text{स्थि}$ ।

अब इन चारों भेदों के चल से अकरणीगत भिन्न सम्बन्ध का चलानयन कर सक्ते हो।

२० । ऊपर के प्रकारों के बल से अनेक चलनयन कर सक्ते हो। जैसे यदि $\int \frac{फ(य^2)ताय}{फा(य^2)}$ इस का मान जानना हो तो यदि र=य ^{2} तो तार=२यताय

इस लिये ताय=$\frac{तार}{२य}$ और $\int \frac{फ(य^2)}{फा(य^2)} = \frac{फ(र)}{फा(र)}$ अब यहां यदि र के मान सब सम्भव और परस्पर भिन्न हों तो खण्ड भिन्न का कोई मान

$\frac{फ(अ_1)}{फा'(अ_1)} \cdot \frac{1}{र-अ_1} = \frac{फ(अ_1)}{फा'(अ_1)} \frac{1}{य^2-अ_1}$ ऐसा होगा जहां $अ_1$, र का कोई मान है।

इस पर से $\int \frac{फ(अ_1)}{फा'(अ_1)} \frac{ताय}{य^2-अ_1} = \frac{फ(अ_1)}{फा'(अ_1)} \int \frac{ताय}{य^2-अ_1}$

यहां चाहे $अ_1$ धनात्मक वा ऋणात्मक हो १२वें प्रक्रम से $\int \frac{ताय}{य^2-अ_1}$ का मान जान सक्ते हो।

यदि र के मान में एक जोड़ा असम्भाव्य राशि हो जिनका मान $अ+क\sqrt{-1}$ और $अ-क\sqrt{-1}$ हो तो इनके वश से खण्ड भिन्न संबंध का मान $= \frac{(खाय^2+गा)ताय}{(य^2-अ)^2+क^2} = \frac{(खाय^2+गा)ताय}{य^4-२अय^2+ग^2}$, जहां $ग^2=अ^2+क^2$। यहां यदि

अ=गकोज्या२इ तो इस भिन्न का रूप$=\frac{(खाय^2+गा)ताय}{य^4-२गय^2कोज्या२इ+ग^2}$

$$= \frac{(खाय^2+गा)ताय}{(य^2-२य\sqrt{ग}\ कोज्याइ+ग)(य^2+२य\sqrt{ग}\ कोज्याइ+ग)}$$

इस लिये पूर्ववत् कल्पना करो कि

$$\frac{खाय^2+गा}{य^4-२य^2गकोज्या२इ+ग^2} = \frac{खा_1य+गा_1}{य^2-२य\sqrt{ग}\ कोज्याइ+ग}$$

$$+\frac{खा_2 य+गा_2}{य^2+2य\sqrt{ग}\ कोज्याइ+ग}$$ इस पर से पूर्ववत् स्पष्ट है कि

$$खा_1=-खा_2=\frac{खाग-गा}{8ग^{\frac{3}{2}}कोज्याइ},\ गा_1=गा_2=\frac{गा}{2ग}$$ इनका उत्थापन ऊपर के

खण्ड भिन्नों में देने से और थोड़ा सा परिवर्त्तन करने से

$$\int\frac{(खाय^2+गा)ताय}{य^4-2अय^2+ग^2}=\frac{खाग-गा}{8ग^{\frac{3}{2}}कोज्याइ}\ ला\left\{\frac{य^2-2य\sqrt{ग}\ कोज्याइ+ग}{य^2+2य\sqrt{ग}\ कोज्याइ+ग}\right\}$$

$$+\frac{खाग+गा}{4ग^{\frac{3}{2}}ज्याइ}स्प^{-1}\left\{\frac{2य\sqrt{ग}\ ज्याइ}{ग^2-य^2}\right\}$$

२१। यदि $\frac{ताय}{(य-अ)^म(य-क)^न}$ इस का चल जानना हो तो इसे खण्ड भिन्नों के रूप में न ला कर भी नीचे की युक्ति से सहज में चल मान जान सक्ते हो।

कल्पना करो कि $य-अ=(य-क)र$ तो $य=\frac{अ-कर}{1-र}$

$\therefore य-अ=\frac{(अ-क)र}{1-र},\ य-क=\frac{अ-क}{1-र}$ और $ताय=\frac{(अ-क)तार}{(1-र)^2}$ ऊपर के मान में इनका उत्थापन देने से $\int\frac{ताय}{(य-अ)^म(य-क)^न}=\int\frac{(1-र)^{म+न-2}}{र^म(अ-क)^{म+न-1}}तार$

इस का मान अब द्वियुक्पद सिद्धान्त से सहज में जान सक्ते हो।

जैसे $\int\frac{ताय}{(य-अ)(य-क)^3}$ यहां म=१। न=३, म+न-२=२। म+न-१=३

इस लिये $\int\frac{ताय}{(य-अ)(य-क)^3}=\int\frac{(1-र)^{म+न-2}}{र^म(अ-क)^{म+न-1}}तार=\int\frac{(1-र)^2}{र(अ-क)^3}तार$

$= \int \frac{१ - २र + र^२}{र(अ - क)^३} तार = \frac{१}{(अ - क)^३} \left\{ लार - २र + \frac{र^२}{२} \right\}$ इस में र के स्थान में $\frac{य - अ}{य - क}$ का उत्थापन देने से य के रूप में ऊपर का चल सिद्ध हो जायगा।

यहां यदि अ=क तो ऊपर के सिद्धान्त का व्यभिचार होगा।

२२। $\frac{य^{२म+१} ताय}{(अ + गय^२)^न}$ इस के चलानयन के लिये जहां म और न अभिन्न संख्या हैं और $य^२ = \frac{र - अ}{ग}$

मानो कि $अ + गय^२ = र$ तो $तार = २ गयताय \; \therefore \; ताय = \frac{तार}{२ गय}$।

इन का उत्थापन देने से

$$\frac{य^{२म+१} ताय}{(अ + गय^२)^न} = \frac{य^{२म} \times यताय}{र^न} = \frac{य^{२म} \cdot तार}{२गर^न} = \frac{(य^२)^म तार}{२गर^न}$$

$= \frac{(र - अ)^म तार}{२ग^{म+१} र^न}$ यह ऐसे रूप में आ गया जिस का चल द्वियुक् पद सिद्धान्त से ला सक्ते हो।

ऊपर की युक्ति से स्पष्ट है कि $\frac{फ(य^२)\, यताय}{(अ + गय^२)^न}$ इस का चलानयन भी अत्यन्त सुगम है यदि $फ(य^२)$ में $य^२$ का कोई अभिन्न ही घात हो तो।

२३। $\frac{ताय}{य^न - १}$ इस के चलानयन के लिये जहां न धन और अभिन्न है मानो कि $य^न - १ = ०$ इस समीकरण से य का एक असम्भव मान $अ_२$ है तो दूसरा असम्भव मान $अ_२^{-१}$ यह होगा यहां

$अ_२ = कोज्या \frac{२त\pi}{न} + ज्या \frac{२त\pi}{न} \sqrt{-१}$ है

(चलनकलन का ८८वां प्रक्रम देखो वा डेमाइवर का सिद्धान्त) जहां त का मान १, २, ३ इत्यादि धन संख्या है।

यहां १४वें प्रक्रम से $य^{न} - १$ इस के एक खण्ड भिन्न का मान जब

$य = अ_{२}$ तो $\frac{१}{नअ_{२}^{न-१}} \; \frac{१}{(य - अ_{२})} = \frac{अ_{२}}{नअ_{२}^{न} \; (य - अ_{२})}$

$= \frac{अ_{२}}{न(य - अ_{२})}$ यह होगा और दूसरे का $\frac{अ_{२}^{-१}}{न(य - अ_{२}^{-१})}$ यह

जहां $य = अ_{२}^{-१}$ इन दोनों खण्डभिन्नों का योग करने से

$$योग = \frac{१}{न} \left\{ \frac{अ_{२}}{य - अ_{२}} + \frac{अ_{२}^{-१}}{य - अ_{२}^{-१}} \right\}$$

$$= \frac{१}{न} \left\{ \frac{(अ_{२} + अ_{२}^{-१})य - २}{य^{२} - (अ_{२} + अ_{२}^{-१})य + १} \right\}$$ ऐसा हुआ।

इस में $अ_{२} + अ_{२}^{-१} =$ के स्थान में $२कोज्या\frac{२त\pi}{न}$ का उत्थापन देने से और $\frac{२त\pi}{न} = प$ मानने से $योग = \frac{२}{न} \; \frac{यकोज्याप - १}{य^{२} - २यकोज्याप + १}$ ऐसा होगा

जिस का चल १२वें प्रक्रम के १०वें उदाहरण से

$$\frac{कोज्याप}{न} \; ला \; (१ - २यकोज्याप + य^{२})$$

$$- \frac{२ज्याप}{न} \; स्प^{-१} \left\{ \frac{य - कोज्याप}{ज्याप} \right\}$$ ऐसा होगा।

यहां न के सम और विषम के वश से दो भेद होंगे।

(१) मानो कि न=२म। इस स्थिति में $य^{न} - १ = य^{२म} - १ = ०$ इस में य के दो मान $+१, -१$ ये सम्भव होंगे इस लिये

$$\int \frac{ताय}{य^{२म} - १} = \frac{१}{२म} ला \; \frac{य - १}{य + १}$$

$+ \frac{१}{२म}$ से गुणित $कोज्या \frac{त\pi}{म} \; ला \left(१ - २य \; कोज्या \frac{त\pi}{म} + य^{२}\right)$

इनके मान जो त के स्थान में १ से ले म—१ तक उत्थापन देने से हों और उस में

$$-\frac{१}{म}\text{ से गुणित ज्या }\frac{त\pi}{म}\text{ स्प}^{-१}\left(\frac{य-\text{कोज्या}\frac{त\pi}{म}}{\text{ज्या }\frac{त\pi}{म}}\right)\text{ इन के मान}$$

जो त के स्थान में १ से ले म—१ तक उत्थापन देने से हों।

यहां त के स्थान में १, २, ··· म—१ इन का उत्थापन देने से जो मान हों उन का योग क्रम से यो कोज्या $\frac{त\pi}{म}$ ला $\left(१-२\,य\text{ कोज्या }\frac{त\pi}{म}+य^{२}\right)$ और

यो ज्या $\frac{त\pi}{म}$ स्प$^{-१}\left(\frac{य-\text{कोज्या}\frac{त\pi}{म}}{\text{ज्या}\frac{त\pi}{म}}\right)$ मानो तो ऊपर का समीकरण

$$\int\frac{\text{ताय}}{य^{२म}-१}=\frac{१}{२म}\text{ला }\frac{य-१}{य+१}$$

$$+\frac{१}{२म}\text{योकोज्या}\frac{त\pi}{म}\text{ला}\left(१-२य\text{ कोज्या}\frac{त\pi}{म}+य^{२}\right)$$

$$-\frac{१}{म}\text{ यो ज्या }\frac{त\pi}{म}\text{ स्प}^{-१}\left(\frac{य-\text{कोज्या }\frac{त\pi}{म}}{\text{ज्या }\frac{त\pi}{म}}\right)\cdots\cdots\quad(१)$$

(२) कल्पना करो कि न = २ म + १ तो

$$\int\frac{\text{ताय}}{य^{२म+१}-१}=\frac{\text{ला}(य-१)}{२म+१}$$

$$+\frac{१}{२म+१}\text{यो कोज्या }\frac{२त\pi}{२म+१}\text{ला}\left(१-२य\text{कोज्या}\frac{२त\pi}{२म+१}+य^{२}\right)$$

$$-\frac{२}{२म+१}\text{योज्या}\frac{२त\pi}{२म+१}\text{स्प}^{-१}\left(\frac{य-\text{कोज्या }\frac{२त\pi}{२म+१}}{\text{ज्या }\frac{२त\pi}{२म+१}}\right)$$

यहां यो का मान त के स्थान में १, २, ३ ···· म का उत्थापन देने से बना जानो।

२४। $\int \frac{य^{म-१}ताय}{य^{न}-१}$ इस का मान जानना हो जहां म, न से छोटा है तो यहां भी पहले के ऐसी क्रिया करने से एक खण्ड भिन्न का मान $\frac{अ_{२}^{म-१}}{न\, अ_{२}^{न-१}(य-अ_{२})} = \frac{अ_{२}^{म}}{न(य-अ_{२})}$ यह

और दूसरा $\frac{अ_{२}^{-म}}{न(य-अ_{२}^{-१})}$ यह होगा यहां भी $अ_{२}$, $अ_{२}^{-१}$ दोनों य के कोई एक जोड़ा असम्भव मान हैं। इस लिये दोनों खण्डभिन्नों का योग करने से $\frac{१}{न}\left(\frac{अ_{२}^{म}}{य-अ_{२}} + \frac{अ_{२}^{-म}}{य-अ_{२}^{-१}}\right)$

$$= \frac{१}{न}\ \frac{य(अ_{२}^{म}+अ_{२}^{-म})-(अ_{२}^{म-१}+अ_{२}^{-(म-१)})}{य^{२}-य(अ_{२}+अ_{२}^{-१})+१}$$

$$= \frac{२}{न}\ \frac{यकोज्यामप-कोज्या(म-१)प}{य^{२}-२यकोज्याप+१}$$ यह हुआ।

जहां $प = \frac{२त\pi}{न}$। यहां त्रिकोणमिति से यदि कोज्या (म-१)प का मान कोज्यामप· कोज्याप+ज्यामप· ज्याप इस रूप में ले आवो तो वही मान

$$\frac{२}{न}\ \frac{यकोज्यामप-कोज्यामपकोज्याप-ज्यामपज्याप}{य^{२}-२यकोज्याप+१}$$

$$= \frac{१}{न}\left\{\frac{(२य-२कोज्याप)कोज्यामप}{य^{२}-२यकोज्याप+१} - २ज्यामप\ \frac{ज्याप}{(य-कोज्याप)^{२}+ज्या^{२}प}\right\}$$

ऐसा हुआ इस लिये १२वें प्रक्रम से

$$\int \frac{य^{म-१}ताय}{य^{न}-१} = \frac{१}{न}\ \Sigma\ कोज्यामप·ला(य^{२}-२यकोज्याप+१)$$

$- \frac{२}{न}$ यौज्यामप स्प$^{-१}$ $\left\{\frac{य-कोज्याप}{ज्याप}\right\}$ $+ \frac{१}{न}$ ला (य-१) $+ \frac{(-१)^म}{न}$ ला (य+१)

यदि न सम हो जहां यौ का मान त के स्थान में १ से ले $\frac{न}{२}$ —१ तक का उत्थापन देने से है।

$\int \frac{य^{म-१} ताय}{य^न - १}$ इस के मान में असम्भव के वश से जो खण्ड चल हैं उन को पहले दो खण्डों में लिखा है और सम्भव के दो चल अन्त में हैं क्यों कि न का मान सम होने से $य^न - १ = ०$ इस में य एक मान + १ दूसरा — १ दो सम्भव आते हैं और भिन्न का मान

$$= \frac{१}{न(य-१)} + \frac{(-१)^म}{न(य+१)} + \frac{२}{न} यौ \frac{कोज्यामप(य-कोज्याप) - ज्यामपज्याप}{य^२ - २यकोज्याप + १}$$

यह सिद्ध होता है।

और यदि न विषम हो तो $य^न - १ = ०$ इस में य का एक ही सम्भाव्य मान + १ होगा इस लिये भिन्न का मान

$$= \frac{१}{न} \frac{१}{य-१} + \frac{२}{न} यौ \frac{कोज्यामप(य-कोज्याप) - ज्यामपज्याप}{य^२ - २ यकोज्याप + १}$$ यह होगा

तब पहले के ऐसा

$$\int \frac{य^{म-१} ताय}{य^न - १} = \frac{१}{न} ला (य-१) + \frac{१}{न} यौ कोज्यामपला (य^२ - २यकोज्याप + १)$$

$$- \frac{२}{न} यौज्यामप स्प^{-१} \left\{\frac{य-कोज्याप}{ज्याप}\right\}$$ यहां त के स्थान में

१, से $\frac{न-१}{२}$ तक का उत्थापन देने से यौ का मान जानना।

२५ $\int \frac{य^{म-१} ताय}{य^न + १}$ इस का मान जानना हो जहां म न से छोटा है तो यदि न सम हो तो $य^न + १ = ०$ इस में य का कोई सम्भव मान न आवेगा इस लिये एक असम्भव मान यदि अ$_०$

$= \text{कोज्या}\frac{\pi}{\text{न}} + \text{ज्या}\frac{\pi}{\text{न}}\sqrt{-1}$ और दूसरा $\text{अ}_2^{-1} = \frac{1}{\text{कोज्या}\frac{\pi}{\text{न}} + \text{ज्या}\frac{\pi}{\text{न}}\sqrt{-1}}$

$= \text{कोज्या}\frac{\pi}{\text{न}} - \text{ज्या}\frac{\pi}{\text{न}}\sqrt{-1}$ माना तो एक खण्ड भिन्न का मान

$\frac{\text{अ}_2^{\text{म}-1}}{\text{अ}_2^{\text{न}-1}\text{न}(\text{य}-\text{अ}_2)} = -\frac{\text{अ}_2^{\text{म}}}{\text{न}(\text{य}-\text{अ}_2)}$ यह और दूसरा $-\frac{\text{अ}_2^{-\text{म}}}{\text{न}(\text{य}-\text{अ}_2^{-1})}$

यह हुआ इस लिये कोई दो मानों का योग

$= -\frac{2}{\text{न}}\,\frac{\text{कोज्यामष}(\text{य}-\text{कोज्याष})-\text{ज्यामषज्याष}}{\text{य}^2-2\text{यकोज्याष}+1}$ जहां $\text{ष} = \frac{\text{त}\pi}{\text{न}}$

तब पूर्वप्रकार के ऐसा ।

$$\int\frac{\text{य}^{\text{म}-1}\text{ताय}}{\text{य}^{\text{न}}+1} = -\frac{1}{\text{न}}\,\text{यो}\,\text{कोज्यामषला}\,(\text{य}^2-2\text{यकोज्याष}+1)$$

$+\frac{1}{\text{न}}\,\text{यो}\,\text{ज्यामष}\,\text{स्प}^{-1}\frac{\text{य}-\text{कोज्याष}}{\text{ज्याष}}$ जहां त के स्थान में १, ३, ५,

१ ... न—१ का उत्थापन दे कर यो का मान जानना होगा ।

और यदि न विषम हो तो $\text{य}^{\text{न}}+1=0$ इस में य का एक मान —१ यह सम्भाव्य होगा इस लिये

$$\int\frac{\text{य}^{\text{म}-1}\text{ताय}}{\text{य}^{\text{न}}+1} = \frac{(-1)^{\text{म}-1}}{\text{न}}\,\text{ला}(\text{य}+1)$$

$$-\frac{1}{\text{न}}\text{यो}\,\text{कोज्यामषला}(\text{य}^2-2\text{यकोज्याष}+1)+\frac{2}{\text{न}}\text{यो}\,\text{ज्यामषस्प}^{-1}\frac{\text{य}-\text{कोज्याष}}{\text{ज्याष}}$$

यह होगा जहां न के स्थान में १, ३, ५ ... न—२ का उत्थापन देकर यो का मान जानना है ।

२६ । $\frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{य}^{\text{न}}-1}$ इस का मान खण्ड भिन्न में जानना हो जहां

$फ(य) = ग_0 + ग_1 य + ग_2 य^2 + \cdots + ग_{म-1} य^{म-1}$ जहां न से म छोटा है वा समान।

तो न के सम मान में $य^न - 1 = 0$ इस में $य = +1, -1$ ये दो मान सम्भाव्य हैं और असम्भव मान में कोई एक जोड़े का मान $अ_2$, $अ_2^{-1}$ मानो तो इन दोनों से उत्पन्न खण्ड भिन्न क्रम से

$\frac{अ_2 फ(अ_2)}{न(य - अ_2)}$, और $\frac{अ_2^{-1} फ(अ_2^{-1})}{न(य - अ_2^{-1})}$ होंगे इन दोनों का योग

$$= \frac{1}{न} \frac{\{अ_2 फ(अ_2) + अ_2^{-1} फ(अ_2^{-1})\} य - \{फ(अ_2) + फ(अ_2^{-1})\}}{य^2 - (अ_2 + अ_2^{-1}) य + 1}$$

परन्तु $अ_2 = कोज्या \frac{2त\pi}{न} + ज्या \frac{2त\pi}{न} \sqrt{-1}$

$$अ_2^{-1} = कोज्या \frac{2त\pi}{न} - ज्या \frac{2त\pi}{न} \sqrt{-1}$$

$$फ(अ_2) = ग_0 + ग_1 अ_2 + ग_2 अ_2^2 + ग_3 अ_2^3 + \cdots\cdots$$

$$अ_2 फ(अ_2) = ग_0 अ_2 + ग_1 अ_2^2 + ग_2 अ_2^3 + ग_3 अ_2^4 + \cdots$$

$$अ_2^{-1} फ(अ_2^{-1}) = ग_0 अ_2^{-1} + ग_1 अ_2^{-2} + ग_2 अ_2^{-3} + ग_3 अ_2^{-4} + \cdots$$

इस लिये $अ_2 फ(अ_2) + अ_2^{-1} फ(अ_2^{-1})$

$$= 2ग_0 कोज्याष + 2ग_1 कोज्या 2ष + \cdots + 2ग_{म-1} कोज्या मष$$

और $फ(अ_2) + फ(अ_2^{-1}) = 2ग_0 + ग_1 कोज्याष + ग_2 कोज्या 2ष + \cdots$

$$+ 2ग_{म-1} कोज्या (म-1)ष$$

$$तब \frac{फ(य)}{य^न - 1} = \frac{फ(-1)}{न} \frac{(-1)^{न-1}}{य+1} + \frac{फ(1)}{न} \frac{1}{य-1}$$

$$+ \frac{\frac{2}{न} यो (ग_0 कोज्याष + \cdots + ग_{म-1} कोज्या मष) य}{य^2 - 2य कोज्याष + 1}$$

$$- \frac{यो \{ग_0 + ग_1 कोज्याष + \cdots + ग_{म-1} कोज्या (म-1)ष\}}{य^2 - 2य कोज्याष + 1}$$

यहां त के स्थान में १, २, $\cdots \frac{न-२}{२}$ का उत्थापन देकर यों का मान जानना। यदि न विषम हो तो $य^{न}-१=0$ इस में य का एक ही $+१$ मान सम्भाव्य होगा इस लिये ऊपर के मान में पहला खण्ड छोड़ देना चाहिये और त के स्थान में १, २, $\cdots \frac{न-१}{२}$ उत्थापन देकर यों का मान ले आना चाहिये।

२७। इसी प्रकार यदि $\frac{फ(य)}{य^{न}+१}$ इस का रूप खण्ड भिन्नों में लाना हो तो ऊपर की युक्ति से ला सक्ते हो विशेष इतना ही है कि $अ_२$ का मान $कोज्या \frac{त\pi}{न} + ज्या \frac{त\pi}{न}\sqrt{-१}$ यह कल्पना करना चाहिये जहां त के स्थान में १, ३, ·· ५, न − १ इत्यादि का उत्थापन देना चाहिये यदि न सम हो और यदि न विषम हो तो १, ३, ५, ··· न − २ का।

२८। इस प्रक्रम में क्रिया समेत कुछ उदाहरणों को दिखा कर इस अध्याय को समाप्त करते हैं।

(१) उदा० $\int \frac{य^{५}ताय}{(अ^{२}-य^{२})^{२}}$ इस का क्या मान है।

यहां २२वें प्रक्रम से $५=२म+१ \therefore म=२$। $न=२$। $ग=-१$ और अ के स्थान में $अ^{२}$ और $(अ^{२}-य^{२})$ के स्थान में र का उत्थापन देने से।

$$\int\frac{य^{५}ताय}{(अ^{२}-य^{२})^{२}}=\int\frac{(र-अ)^{म}तार}{२ग^{म+१}र^{न}}=\int\frac{(र-अ)^{२}}{२ग^{३}.र^{२}}\,तार$$

$$=\int\frac{र^{२}-२रअ+अ^{२}}{२ग^{३}.र^{२}}\,तार=\frac{१}{२ग.^{३}}\int तार-२अ\int\frac{तार}{र}+अ^{२}\int तार\; र^{-२}$$

$$=\frac{१}{२ग^{३}}\left\{र-२अलार-\frac{अ^{२}}{र}\right\}$$

$$=-\frac{१}{२}\left\{अ^२-य^२-२अ^२ला(अ^२-य^२)-\frac{अ^४}{अ^२-य^२}\right\}$$

$$=\frac{अ^४}{२(अ^२-य^२)}+\frac{य^२}{२}+अ^२ला(अ^२-य^२)$$ । स्थिराङ्क $\frac{अ^२}{२}$ को छोड़ देने से यही उत्तर हुआ।

(२) उदा० $\int\frac{ताय}{य^४-१}$ इस का क्या मान है।

यहां २३वें प्रक्रम के प्रथम समीकरण से

न = ४। म = २ और त के स्थान में १ का उत्थापन देने से

$$\int\frac{ताय}{य^{२म}-१}=\frac{१}{२म}ला\frac{य-१}{य+१}$$

$$+\frac{१}{२म}यो{।}कोज्या\frac{त\pi}{म}ला\left(य^२-२यकोज्या\frac{त\pi}{म}+१\right)$$

$$-\frac{१}{म}यो{।}ज्या\frac{त\pi}{म}स्प^{-१}\left(\frac{य-कोज्या\frac{त\pi}{म}}{ज्या\frac{त\pi}{म}}\right)$$

$$=\frac{१}{४}ला\frac{य-१}{य+१}+\frac{१}{४}कोज्या\frac{\pi}{२}ला\left(य^२-२कोज्या\frac{\pi}{२}+१\right)$$

$$-\frac{१}{२}ज्या\frac{\pi}{२}स्प^{-१}\left(\frac{य-कोज्या\frac{\pi}{२}}{ज्या\frac{\pi}{२}}\right)$$

$$=\frac{१}{४}ला\frac{य-१}{य+१}-\frac{१}{२}स्प^{-१}य=\int\frac{ताय}{य^४-१}$$ यही उत्तर हुआ।

(३) उदा० $\int\frac{ताय}{य^६-१}$ इस का क्या मान है।

यहां भी २३वें प्रक्रम से न = ६। म = ३ और त के स्थान में १, २, का उत्थापन देने से क्योंकि २ = म − १

$$यो{।}कोज्या\frac{त\pi}{म}ला\left(य^२-२यकोज्या\frac{त\pi}{म}+१\right)$$

$$= \text{कोज्या}\,\frac{\pi}{3}\,\text{ला}\,(\text{य}^2 - 2\text{य}\text{कोज्या}\,\frac{\pi}{3} + 1)$$

$$+\,\text{कोज्या}\,\frac{2\pi}{3}\,\text{ला}\,(\text{य}^2 - 2\text{य}\text{कोज्या}\,\frac{2\pi}{3} + 1)$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{ला}\,(\text{य}^2 - \text{य} + 1) - \frac{1}{2}\,\text{ला}\,(\text{य}^2 + \text{य} + 1)$$

और यो ज्या $\frac{\text{त}\pi}{\text{म}}\,\text{स्प}^{-1}\left\{\frac{\text{य} - \text{कोज्या}\frac{\text{त}\pi}{\text{म}}}{\text{ज्या}\frac{\text{त}\pi}{\text{म}}}\right\}$

$$= \text{ज्या}\frac{\pi}{3}\,\text{स्प}^{-1}\left\{\frac{\text{य} - \text{कोज्या}\frac{\pi}{3}}{\text{ज्या}\frac{\pi}{3}}\right\} + \text{ज्या}\frac{2\pi}{3}\,\text{स्प}^{-1}\left\{\frac{\text{य} - \text{कोज्या}\frac{2\pi}{3}}{\text{ज्या}\,\frac{2\pi}{3}}\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{स्प}^{-1}\left\{\frac{2\text{य} - 1}{\sqrt{3}}\right\} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{स्प}^{-1}\left\{\frac{2\text{य} + 1}{\sqrt{3}}\right\}$$

इन सब का (१) में उत्थापन देने से

$$\int \frac{\text{ताय}}{\text{य}^6 - 1} = \frac{1}{6}\,\text{ला}\,\frac{\text{य} - 1}{\text{य} + 1} + \frac{1}{6}\left\{\text{ला}(\text{य}^2 - \text{य} + 1) - \text{ला}(\text{य}^2 + \text{य} + 1)\right\}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{3}}\left\{\text{स्प}^{-1}\left\{\frac{2\text{य} - 1}{\sqrt{3}}\right\} + \text{स्प}^{-1}\left\{\frac{2\text{य} + 1}{\sqrt{3}}\right\}\right\}$$ यही उत्तर हुआ ।

(४) उदाह० $\int \frac{\text{ताय}}{\text{य}^3 - 1}$ इस का क्या मान है ।

यहां २३वें प्रक्रम के (२) समीकरण से न = ३ । म = १ और त = १ । तब

$$\int \frac{\text{ताय}}{\text{य}^{2\text{म}+1} - 1} = \frac{\text{ला}(\text{य} - 1)}{2\text{म} + 1}$$

$$+ \frac{1}{2\text{म}+1}\,\text{यैाकोज्या}\,\frac{2\text{त}\pi}{2\text{म}+1}\,\text{ला}\,(1 - 2\text{कोज्या}\,\frac{2\text{त}\pi}{2\text{म}+1} + \text{य}^2)$$

$$- \frac{2}{2\text{म}+1}\,\text{यैाज्या}\,\frac{2\text{त}\pi}{2\text{म}+1}\,\text{स्प}^{-1}\left\{\frac{\text{य} - \text{कोज्या}\,\frac{2\text{त}\pi}{2\text{म}+1}}{\text{ज्या}\,\frac{2\text{त}\pi}{2\text{म}+1}}\right\}$$

$$= \frac{\text{ला}(\text{य} - 1)}{3} + \frac{1}{3}\,\text{कोज्या}\,\frac{2\pi}{3}\,\text{ला}\,(1 - 2\text{य}\text{कोज्या}\,\frac{2\pi}{3} + \text{य}^2)$$

$$-\frac{२}{३}\text{ज्या}\frac{२\pi}{३}\ \text{स्प}^{-१}\left(\frac{\text{य}-\text{कोज्या}\frac{२\pi}{३}}{\text{ज्या}\frac{२\pi}{३}}\right)$$

$$=\frac{१}{३}\text{ला}(\text{य}-१)-\frac{१}{६}\text{ला}(१+\text{य}+\text{य}^२)-\frac{१}{\sqrt{३}}\ \text{स्प}^{-१}\left(\frac{२\text{य}+१}{\sqrt{३}}\right)$$

$$=\frac{१}{६}\ \text{ला}\frac{(\text{य}-१)^२}{\text{य}^२+\text{य}+१}-\frac{१}{\sqrt{३}}\text{स्प}^{-१}\left(\frac{२\text{य}+१}{\sqrt{३}}\right)$$

(५) उदा० $\int\frac{\text{य}^४\text{ताय}}{\text{य}^६-१}$ इसका मान क्या होगा।

यहां २४वें प्रक्रम से म=५। न=६ त=१, २ । $\text{ष}=\frac{२\text{त}\pi}{\text{न}}=\frac{२\pi}{६},\frac{४\pi}{६}$, तब

$$\int\frac{\text{य}^{\text{म}-१}\text{ताय}}{\text{य}^\text{न}-१}=\frac{\text{ला}(\text{य}-१)}{\text{न}}+\frac{(-१)^\text{म}}{\text{न}}\ \text{ला}(\text{य}+१)$$

$$+\frac{१}{\text{न}}\ \text{यो कोज्यामषला}(\text{य}^२-२\text{यकोज्याष}+१)$$

$$-\frac{२}{\text{न}}\text{योज्यामष स्प}^{-१}\left\{\frac{\text{य}-\text{कोज्याष}}{\text{ज्याष}}\right\}$$

$$=\frac{\text{ला}(\text{य}-१)}{६}-\frac{\text{ला}(\text{य}+१)}{६}+\frac{१}{६}\left\{\text{कोज्या}\frac{५\times२\pi}{६}\text{ला}(\text{य}^२-२\text{यकोज्या}\frac{२\pi}{६}+१)\right\}$$

$$+\frac{१}{६}\left\{\text{कोज्या}\ \frac{५\times४\pi}{६}\text{ला}(\text{य}^२-२\text{यकोज्या}\ \frac{४\pi}{६}+१)\right\}$$

$$-\frac{१}{३}\left\{\text{ज्या}\frac{५\times२\pi}{६}\text{स्प}^{-१}\left(\frac{\text{य}-\text{कोज्या}\ \frac{२\pi}{६}}{\text{ज्या}\ \frac{२\pi}{६}}\right)\right\}$$

$$-\frac{१}{३}\left\{\text{ज्या}\ \frac{५\times४\pi}{६}\text{स्प}^{-१}\left(\frac{\text{य}-\text{कोज्या}\ \frac{४\pi}{६}}{\text{ज्या}\ \frac{४\pi}{६}}\right)\right\}$$

$$=\frac{१}{६}\ \text{ला}\frac{\text{य}-१}{\text{य}+१}+\frac{१}{१२}\text{ला}\ (\text{य}^२-\text{य}+१)-\frac{१}{१२}\ \text{ला}(\text{य}^२+\text{य}+१)$$

$$+\frac{१}{२\sqrt{३}}\left\{स्प^{-१}\left(\frac{२य-१}{\sqrt{३}}\right)+स्प^{-१}\left(\frac{२य+१}{\sqrt{३}}\right)\right\}$$

$$=\frac{१}{६}ला\frac{य-१}{य+१}+\frac{१}{१२}ला\frac{य^२-य+१}{य^२+य+१}+\frac{१}{२\sqrt{३}}\left\{स्प^{-१}\left[\frac{२य-१}{\sqrt{३}}\right]+स्प^{-१}\left[\frac{२य+१}{\sqrt{३}}\right]\right\}$$

यही उत्तर हुआ ।

(६) उ० $\int\frac{य^३ताय}{य^५-१}$ इसका क्या मान है ।

यहां भी २४वें प्रक्रम से म=४ । न=५ । त=१, २, ष= $\frac{२\pi}{५}$, $\frac{४\pi}{५}$ इसलिये

$$\int\frac{य^{म-१}ताय}{य^न-१}=\frac{ला(य-१)}{न}+\frac{१}{न}यैकोज्यामषला(य^२-२यकोज्या+१)$$

$$-\frac{२}{न}यैज्यामष\ स्प^{-१}\left(\frac{य-कोज्याष}{ज्याष}\right)$$

$$=\frac{ला(य-१)}{५}+\frac{१}{५}\left\{कोज्या\frac{८\pi}{५}ला(य^२-२यकोज्या\frac{२\pi}{५}+१)\right.$$

$$\left.+कोज्या\frac{१६\pi}{५}ला(य^२-२यकोज्या\frac{४\pi}{५}+१)\right\}$$

$$-\frac{२}{५}\left\{ज्या\frac{८\pi}{५}स्प^{-१}\left[\frac{य-कोज्या\frac{२\pi}{५}}{ज्या\frac{२\pi}{५}}\right]+ज्या\frac{१६\pi}{५}स्प^{-१}\left[\frac{य-कोज्या\frac{४\pi}{५}}{ज्या\frac{४\pi}{५}}\right]\right\}$$

$$=\frac{ला(य-१)}{५}+\frac{१}{५}\{ज्या१८^\circ ला(य^२-२यकोज्या७२^\circ+१)\}$$

$$-\frac{१}{५}\{कोज्या३६^\circ ला(य^२+२यज्या५४^\circ+१)\}$$

$$+\frac{२}{५}\left\{कोज्या१८^\circ स्प^{-१}\left[\frac{य-कोज्या७२^\circ}{ज्या७२^\circ}\right]+ज्या३६^\circ स्प^{-१}\left[\frac{य+कोज्या३६^\circ}{ज्या३६^\circ}\right]\right\}$$

$$+\frac{ला(य-१)}{५}+\frac{ज्या१८^\circ}{५}\left\{ला(य^२-२यकोज्या७२^\circ+१)\right\}$$

$$-\frac{ज्या१८^\circ}{५}\left\{२कोज्या१८^\circ ला(य^२+यज्या५४^\circ+१)\right\}$$

$$+\frac{२कोज्या१८^\circ}{५}\left\{स्प^{-१}\left(\frac{य-कोज्या७२^\circ}{ज्या७२^\circ}\right)+२ज्या१८^\circ स्प^{-१}\left(\frac{य+कोज्या३६^\circ}{ज्या३६^\circ}\right)\right\}$$

$$=\int\frac{य^३ताय}{य^५-१}$$ यही उत्तर हुआ ।

(७) उ० $\int\frac{य^४ताय}{य^६+१}$ इसका क्या मान है ।

यहां २५वें प्रक्रम से न=६ । म=५, त=१, ३, ५, और $ष=\frac{\pi}{६}, \frac{३\pi}{६}, \frac{५\pi}{६}$

इस लिये $$\int\frac{य^{म-१}ताय}{य^न+१}=-\frac{१}{न}योकोज्यामषला(य^२-२यकोज्याष+१)$$

$$+\frac{२}{न}योज्यामष स्प^{-१}\left(\frac{य-कोज्याष}{ज्याष}\right)=\int\frac{य^४ताय}{य^६+१}$$

$$=-\frac{१}{६}\left\{कोज्या\frac{५\pi}{६}ला(य^२-२यकोज्या\frac{\pi}{६}+१)+कोज्या\frac{१५}{६}ला(य^२-२यकोज्या\frac{\pi}{२}+१)\right.$$
$$\left.+कोज्या\frac{२५\pi}{६}ला(य^२-२यकोज्या\frac{५\pi}{६}+१)\right\}$$

$$+\frac{१}{३}\left\{ज्या\frac{५\pi}{६}स्प^{-१}\left(\frac{य-कोज्या\frac{\pi}{६}}{ज्या\frac{\pi}{६}}\right)+ज्या\frac{१५\pi}{६}स्प^{-१}\left(\frac{य-कोज्या\frac{\pi}{२}}{ज्या\frac{\pi}{२}}\right)\right.$$
$$\left.+ज्या\frac{२५\pi}{६}स्प^{-१}\left(\frac{य-कोज्या\frac{५\pi}{६}}{ज्या\frac{५\pi}{६}}\right)\right\}$$

$$=\frac{१}{६}\left\{\frac{\sqrt{३}}{२}ला(य^२-य\sqrt{३}+१)-\frac{\sqrt{३}}{२}ला(य^२+य\sqrt{३}+१)\right\}$$

$$+\frac{१}{३}\left\{\frac{१}{२}स्प^{-१}\left(\frac{२य-\sqrt{३}}{१}\right)+स्प^{-१}य+\frac{१}{२}स्प^{-१}\left(\frac{२य+\sqrt{३}}{१}\right)\right\}$$

$$=\frac{१}{६}\left\{\text{स्प}^{-१}\left(२\text{य}-\sqrt{३}\right)+\text{स्प}^{-१}\left(२\text{य}+\sqrt{३}\right)\right\}$$

$$+\frac{\text{स्प}^{-१}\text{य}}{३}+\frac{१}{४\sqrt{३}}\,\text{ला}\,\frac{\text{य}^{२}-\text{य}\sqrt{३}+१}{\text{य}^{२}+\text{य}\sqrt{३}+१}$$ यही उत्तर हुआ।

(८) उदा० $\int\frac{\text{य}^{३}\text{ताय}}{\text{य}^{५}+१}$ इसका क्या मान है।

यहां भी २५वें प्रक्रम से न=५। म=४। त=१,३ ष=$\frac{\pi}{५}$, $\frac{३\pi}{५}$

इस लिये

$$\int\frac{\text{य}^{\text{म}-१}\text{ताय}}{\text{य}^{\text{न}}-१}=\frac{(-१)^{\text{म}-१}}{\text{न}}\text{ला}(\text{य}-१)-\frac{१}{\text{न}}\text{यो}\,\text{कोज्याम}\,\text{ष}\,\text{ला}(\text{य}^{२}-२\text{यकोज्याष}+१)$$

$$+\frac{२}{\text{न}}\text{योज्याम}\,\text{ष}\,\text{स्प}^{-१}\left(\frac{\text{य}-\text{कोज्याष}}{\text{ज्याष}}\right)=\int\frac{\text{य}^{३}\text{ताय}}{+१}$$

$$=-\frac{\text{ला}(\text{य}-१)}{\text{न}}-\frac{१}{५}\left\{\text{कोज्या}\,\frac{४\pi}{५}\,\text{ला}(\text{य}^{२}-२\text{यकोज्या}\,\frac{\pi}{५}+१)\right.$$

$$\left.+\text{कोज्या}\,\frac{१२\pi}{५}\,\text{ला}(\text{य}^{२}-२\text{यकोज्या}\,\frac{३\pi}{५}+१)\right\}$$

$$+\frac{२}{५}\left\{\text{ज्या}\,\frac{४\pi}{५}\,\text{स्प}^{-१}\left(\frac{\text{य}-\text{कोज्या}\,\frac{\pi}{५}}{\text{ज्या}\,\frac{\pi}{५}}\right)+\text{ज्या}\,\frac{१२\pi}{५}\,\text{स्प}^{-१}\left(\frac{\text{य}-\text{कोज्या}\,\frac{३\pi}{५}}{\text{ज्या}\,\frac{३\pi}{५}}\right)\right\}$$

$$=-\frac{\text{ला}(\text{य}-१)}{५}+\frac{१}{५}\left\{\text{कोज्या}३६^{\circ}\text{ला}(\text{य}^{२}-२\text{यकोज्या}३६^{\circ}+१)\right.$$
$$\left.-\text{कोज्या}\,७२^{\circ}\text{ला}\,(\text{य}^{२}+२\text{यकोज्या}७२^{\circ}+१)\right\}$$

$$+\frac{२}{५}\left\{\text{ज्या}३६^{\circ}\,\text{स्प}^{-१}\left(\frac{\text{यकोज्या}३६^{\circ}}{\text{ज्या}३६^{\circ}}\right)+\text{ज्या}७२\,\text{स्प}^{-१}\left(\frac{\text{य}+\text{कोज्या}७२^{\circ}}{\text{ज्या}७२^{\circ}}\right)\right\}$$

$$= -\frac{\text{ला}(\text{य}-१)}{५}$$

$$+\frac{\text{कोज्या}३६^\circ}{५}\left\{\text{ला}(\text{य}^२-२\text{य}\text{कोज्या}३६^\circ+१)-२\text{ज्या}३६^\circ\text{ला}(\text{य}^२+२\text{य}\text{कोज्या}७२+१\right\}$$

$$+\frac{२\text{ज्या}३६^\circ}{५}\left\{\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य}-\text{कोज्या}३६^\circ}{\text{ज्या}३६^\circ}\right]+२\text{कोज्या}३६^\circ\,\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य}+\text{कोज्या}७२^\circ}{\text{ज्या}७२^\circ}\right]\right\}$$

यही उत्तर हुआ।

(६) उ० $\int\frac{२+\text{य}^२}{\text{य}^६-१}\text{ताय}$ इस का क्या मान होगा।

यहां २६वें प्रक्रम से $\text{ग}_०=२$। $\text{ग}_१=०$। $\text{ग}_२=१$। $\text{फ}(\text{य})=२+\text{य}^२$। $\text{न}=६$ और, $\text{त}=१, २,$। $\text{ष}=\frac{२\pi}{६}, \frac{४\pi}{६}$, इस लिये

$$\frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{य}^\text{न}-१}=\frac{\text{फ}(-१)}{\text{न}}\frac{(-१)^{\text{न}-१}}{\text{य}+१}+\frac{\text{फ}(१)}{\text{न}}\frac{१}{\text{य}-१}$$

$$+\frac{\frac{२}{\text{न}}\text{यो}(\text{ग}_०\text{कोज्या}\text{ष}+..+\text{ग}_{\text{म}-१}\text{कोज्या}\text{म}\text{ष})\text{य}}{\text{य}^२-२\text{य}\text{कोज्या}\text{ष}+१}$$

$$-\frac{\text{यो}\{\text{ग}_०+\text{ग}_१\text{कोज्या}\text{ष}+...+\text{ग}_{\text{म}-१}\text{कोज्या}(\text{म}-१)\text{ष}\}}{\text{य}^२-२\text{य}\text{कोज्या}\text{ष}+१}$$

$$=-\frac{१}{२}\frac{१}{\text{य}+१}+\frac{१}{२}\frac{१}{\text{य}-१}+\frac{१}{३}\cdot\frac{(२\text{कोज्या}\frac{२\pi}{६}+\text{कोज्या}\frac{६\pi}{६})\,\text{य}-२-\text{कोज्या}\frac{४\pi}{६}}{\text{य}^२-२\text{य}\text{कोज्या}\frac{२\pi}{६}+१}$$

$$+\frac{१}{३}\cdot\frac{(२\text{कोज्या}\frac{४\pi}{६}+\text{कोज्या}\frac{१२\pi}{६})\text{य}-२-\text{कोज्या}\frac{८\pi}{६}}{\text{य}^२-२\text{य}\text{कोज्या}\frac{४\pi}{६}+१}$$

$$=\frac{१}{२}\frac{१}{\text{य}-१}-\frac{१}{२}\frac{१}{\text{य}+१}+\frac{१}{३}\frac{(१-१)\text{य}-२+\frac{१}{२}}{\text{य}^२-\text{य}+१}+\frac{१}{३}\frac{(-१+१)\text{य}-२+\frac{१}{२}}{\text{य}^२+\text{य}+१}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{य-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{य+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{य^2-य+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{य^2+य+1}=\frac{2+य^2}{य^6-1}$$

इस लिये $\int\frac{2+य^2}{य^6-1}ताय=\frac{1}{2}ला\frac{य-1}{य+1}-\frac{1}{2}\int\frac{ताय}{य^2-य+1}-\frac{1}{2}\int\frac{ताय}{य^2+य+1}$

$$=\frac{1}{2}ला\frac{य-1}{य+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}स्प^{-1}\frac{2य+1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}स्प^{-1}\frac{2य-1}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{2}ला\frac{य-1}{य+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{स्प^{-1}\frac{2य+1}{\sqrt{3}}+स्प^{-1}\frac{2य-1}{\sqrt{3}}\right\}$$

यही उत्तर हुआ ।

इस तरह से विद्यार्थियों को चाहिये कि उदाहरणों के रूप के अनुसार जहां जिस प्रक्रम का प्रयोजन पड़े उसे अच्छी तरह से समझ कर चल॰ राशि का मान ले आवें ।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

सिद्ध करो कि

१ । $\int\frac{2य+3}{य^3+य^2-2य}ताय=\frac{1}{6}ला\frac{(य-1)^{10}}{य+2}-\frac{3}{2}लाय$ ।

२ । $\int\frac{य^2-3}{य^3-7य+6}ताय=\frac{1}{10}ला\left\{(य-2)^2(य+3)^3\right\}+ला(\left\{य-1)^2\right\}$

३ । $\int\frac{(2य+1)}{य(य+1)(य+2)}ताय=ला\left\{\frac{(य+1)\sqrt{य}}{(य+2)^{\frac{3}{2}}}\right\}$ ।

४ । $\int\frac{7य^2ताय}{य^4-य^2-12}=ला\left(\frac{य-2}{य+2}\right)+\sqrt{3}\,स्प^{-1}\left(\frac{य}{\sqrt{3}}\right)$ ।

५ । $\int\frac{6ताय}{य^3-1}=ला\frac{(य-1)^2}{य^2+य+1}-2\sqrt{3}\,स्प^{-1}\frac{2य+1}{\sqrt{3}}$

६ । $\int \frac{२य^३ ताय}{य^२+७य+१२} = य^२ - १४य + १२८ \text{ ला } (य+४) - ५४ \text{ ला } (य+३)$ ।

७ । $\int \frac{८ अय^२ - १२ अ^३}{य^४ - अ^४} ताय = १० \text{ स्प}^{-१} \frac{य}{अ} - \text{ला } \frac{य-अ}{य+अ}$ ।

८ । $\int \frac{६य^२ ताय}{य^४+य^२-२} = \text{ला } \frac{य-१}{य+१} + २\sqrt{२} \text{ स्प}^{-१} \frac{य}{\sqrt{२}}$ ।

९ । $\int \frac{(१८य - ६) ताय}{य^३ - य^२ - २य} = ३ \text{ लाय} + ५ \text{ ला}(य-२) - ८ \text{ ला}(य+१)$ ।

१० । $\int \frac{४ ताय}{य(य^३+य^२+य+१)} = \text{लाय}^४ - \text{ला}(य+१)^२ - \text{ला}(य^२+१) - २\text{स्प}^{-१}य$ ।

११ । $\int \frac{४ताय}{(य-१)^२(य^२+१)^२} = \text{ला}(य^२+१) - \text{ला}(य-१)^२ - \frac{१}{य-१}$

$$- \frac{१}{य^२+१} + \text{स्प}^{-१} य \text{ ।}$$

१२ । $\int \frac{१०० य ताय}{(१+२य)^२(१+य+य^२+य^३)} = \frac{४०}{१+२य} - \text{ला}(१+य)^{५०}$

$$- \text{ला}(१+य^२)^{०} + \text{ला } (१+२य)^{६४} + २ \text{ स्प}^{-१}य \text{ ।}$$

१३ । $\int \frac{४य^२ ताय}{य^४+१} = \frac{१}{\sqrt{२}} \text{ ला } \frac{य^२ - य\sqrt{२}+१}{य^२+य\sqrt{२}+१}$

$$+ \sqrt{२} \left\{ \text{स्प}^{-१}(य\sqrt{२}+१) + \text{स्प}^{-१}(य\sqrt{२}-१) \right\} \text{ ।}$$

१४ । $\int \frac{१२य^३ ताय}{य^६+१} = \text{ला } \frac{य^४ - य^२+१}{य^४+२य^२+१}$

$$+ २\sqrt{३} \left\{ \text{स्प}^{-१}(२य - \sqrt{३}) - \text{स्प}^{-१}(२य+\sqrt{३}) \right\}$$

$$१५ । \int \frac{८ \text{ ताय}}{य^८+य^७-य^४-य^३} = \text{ला } \frac{१-य}{१+य^२} + ६ \text{ ला } (१+य) - ८ \text{ लाय}$$

$$+ \frac{४}{य^२} - \frac{८}{य} + \frac{२य}{य+१} - २ \text{ स्प}^{-१}य ।$$

$$१६ । \int \frac{य^३ \text{ताय}}{(अ^{-२}+गय^२)^४} = -\frac{१}{४ग^२(अ^२+गय^२)^२} + \frac{अ^२}{६ग^२(अ^२+गय^२)^३} ।$$

$$१७ । \int \frac{य^५ \text{ताय}}{(१+य^२)^३} = \frac{१}{य^२+१} - \frac{१}{४(य^२+१)^२} + \frac{१}{२} \text{ ला } (य^२+१) ।$$

$$१८ । \int \frac{(८य-२०)\text{ताय}}{(य+३)(य+१)^२} = \frac{१४}{य+१} + ११ \text{ ला } \left(\frac{य+१}{य+३}\right) ।$$

$$१९ । \int \frac{(अ^२-क^२)\text{ताय}}{\text{ज्याय}(अ+\text{ककोज्याय})} = (अ+क)\text{ला}(\text{ज्या}\tfrac{य}{२}) - (अ-क)\text{ला}(\text{कोज्या}\tfrac{य}{२})$$

$$+ \text{कला}(अ+\text{ककोज्याय})$$

यहां ज्याय=र मान क्रिया करने में शीघ्र चल ज्ञान होगा।

$$२० । \int \frac{\text{ताय}}{३\text{ज्याय}+\text{ज्या}२य} = \text{लाज्या}\tfrac{य}{२} - \tfrac{१}{५}\text{लाकोज्या}\tfrac{य}{२} + \tfrac{२}{५}\text{ला}(३+२\text{कोज्याय}) ।$$

$$२१ । \int \frac{\text{तार}}{(१-र^३)^{\frac{१}{३}}} = \tfrac{१}{६}\text{ला}(य^२+य+१) - \tfrac{१}{३}\text{ला}(य-१) - \frac{१}{\sqrt{३}} \text{ स्प}^{-१}\left(\frac{२य+१}{\sqrt{३}}\right) ।$$

यदि $१-र^३=र^३य^३$ ।

$$२२ । \int \frac{\text{ताय}}{(य+१)(३य^२+३य+१)^{\frac{१}{३}}} = \int \frac{\text{तार}}{(१-र^३)^{\frac{१}{३}}} \text{ यदि } र = \frac{य}{१+य} ।$$

२३ । सिद्ध करो कि यदि न सम हो तो

$$\frac{\text{फ}(य)}{य^न+१}$$

$$=-\frac{2}{न}\frac{यो\{ग_0 कोज्याप+ग_1 कोज्या२प+\cdots+ग_{म-1} कोज्यामप\}य}{य^2-२यकोज्याप+१}$$

$$-\frac{यो\{ग_0+ग_1 कोज्याप+\cdots+ग_{म-1} कोज्या(म-१)प\}}{य^2-२यकोज्याप+१}$$

जहां $फ(य)=ग_0+ग_1 य=म_2 य^2+\cdots+ग_{म-1}य^{म-1}$ और $म<न$

यहां प का मान $=\frac{त\pi}{न}$ जहां $त=१, ३, \cdots न-१$ है ।

२४ । सिद्ध करो कि

$$\int\frac{२+य^2}{१+य^6}ताय=\frac{1}{२\sqrt{३}}ला\frac{य^2+य\sqrt{३}+१}{य^2-य\sqrt{३}+१}$$

$$+\frac{2}{3}\{स्प^{-1}(२य+\sqrt{३})+स्प^{-1}(२य-\sqrt{३})\}+\frac{1}{3}स्प^{-1}य$$

२५ । एक महाजन के प्रतिक्षण की आमदनी में, संचित धन के वर्ग में एक घटा कर जो शेष रहे उस का भाग देने से जो लब्ध हो उतनी प्रतिक्षण में उस के गुमाश्ते की आमदनी है तो बताओ जिस समय महाजन के संचित धन का प्रमाण १००००० है उस समय गुमाश्ते के धन का क्या प्रमाण होगा ।

उत्तर, गुमाश्ते को उस समय
०·०००००९९४ इतना ऋण हो गया था ।

इति द्वितीयाध्याय ।

तृतीयाध्याय ।

लघूकरणपरम्परा के विषय में ।

२६। कल्पना करो कि $\int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}} = \text{च}_{\text{न}}$ ।

$\int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}-१}} = \text{च}_{\text{न}-१}$ । इत्यादि मानो

और $\frac{१}{\text{य}^2+\text{अ}^2} = \text{त}$, तो खण्डचलानयन से

$$\text{च}_{\text{न}} = \int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}} = \frac{\text{य}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}} + २\text{न} \int \frac{\text{य}^2\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}+१}}$$

$$\text{परन्तु} \quad \frac{\text{य}^2\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}+१}} = \frac{(\text{य}^2+\text{अ}^2)\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}+१}} - \frac{\text{अ}^2\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}+१}}$$

$$= \frac{\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}} - \frac{\text{अ}^2\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}+१}}$$

$$\text{इस लिये} \quad \text{च}_{\text{न}} = \int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}} = \frac{\text{य}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}}$$

$$+ २\text{न} \left\{ \int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}} - \text{अ}^2 \int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}+१}} \right\}$$

$$= \frac{\text{य}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}} + २\text{न}\,\text{च}_{\text{न}} - २\text{न}\text{अ}^2\text{च}_{\text{न}+१}$$

पक्षान्तरानयन से

$$२\text{न}\,\text{अ}^2\text{च}_{\text{न}+१} = \frac{\text{य}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}} + (२\text{न}-१)\text{च}_{\text{न}}$$

$$\text{इस लिये}\ \text{च}_{\text{न}+१} = \frac{\text{य}}{२\text{न}\text{अ}^2(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}} + \frac{(२\text{न}-१)}{२\text{न}\text{अ}^2}\text{च}_{\text{न}} = \frac{\text{य}\text{त}^{\text{न}}}{२\text{न}\text{अ}^2} + \frac{(२\text{न}-१)}{२\text{न}\text{अ}^2}\text{च}_{\text{न}}$$

इसमें न के स्थान में न—१ का उत्थापन देने से

$$च_न = \frac{यत^{न-१}}{अ^२(२न-२)} + \frac{२न-३}{अ^२(२न-२)} च_{न-१} \quad \cdots \ (१)$$

यही (१) समीकरण १८वें प्रक्रम के (१) उदाहरण के (अ) सिद्धान्त में भी सिद्ध हुआ है।

देखो यहां $च_न$ का मान $च_{न-१}$ के आधीन है और $च_{न-१}$ का मान (१) इसी में न के स्थान में न—१ का उत्थापन देने से

$$\frac{यत^{न-२}}{अ^२(२न-४)} + \frac{२न-५}{अ^२(२न-४)} च_{न-२}$$ यह होगा।

इसी प्रकार

$$च_{न-२} = \frac{यत^{न-३}}{अ^२(२न-६)} + \frac{२न-७}{अ^२(२न-६)} च_{न-३}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$च_१ = \frac{१}{अ} स्प^{-१} \frac{य}{अ} ।$$

यहां जिस प्रकार से $च_न$, $च_{न-१}$, $च_{न-२}$, $\cdots$ इत्यादि के मान सिद्ध हुये हैं इसे लघूकरण सिद्धान्त कहते हैं इस के बल से अनेक चल का ज्ञान हो जाता है। इस के अनेक भेद हैं थोड़ा सा यहां प्रकाश किया जायगा। परन्तु इतना स्मरण रखना चाहिये कि लघूकरण सिद्धान्त से अन्त का चल नहीं सिद्ध होता है उस के लिये पिछले अध्यायों की क्रिया करनी पड़ेगी। जैसे इसी प्रक्रम के (१) समीकरण में यदि न के स्थान में १ का उत्थापन दो तो

$$च_१ = \frac{यत^{१-१}}{अ^२(२-२)} + \frac{२-३}{अ^२(२-२)} च_० = \infty$$ । इस से देखो $च_१$ का मान अनन्त सिद्ध होता है परन्तु पूर्व कल्पना से $च_१ = \int \frac{ताय}{य^२+अ^२}$ और यह प्रथमाध्याय से $\frac{१}{अ} स्प^{-१} \frac{य}{अ}$ इस के तुल्य है।

इस लिये $च_१ = \frac{१}{अ} स्प^{-१} \frac{य}{अ}$ इस का उत्थापन देने से।

$$च_२ = \frac{तय}{२अ^२} + \frac{१}{२अ^३} स्प^{-१} \frac{य}{अ}$$

$$च_३ = \frac{त^२य}{४अ^२} + \frac{३तय}{२.४अ^४} + \frac{३}{२.४अ^५} स्प^{-१} \frac{य}{अ}$$

$$च_४ = \frac{त^३य}{६अ^२} + \frac{५त^२य}{४,६अ^४} + \frac{५.३तय}{२.४,६अ^६} + \frac{५.३}{२.४,६अ^७} स्प^{-१} \frac{य}{अ}$$

इत्यादि सिद्ध होते चले जायंगे।

३०। यदि $च_{म,न} = \int \frac{य^म ताय}{(अ^२+य^२)^न}$ तो खण्डचलानयन से

$$च_{म,न} = \int य^{म-१} \frac{यताय}{(अ^२+य^२)^न} = \int य^{म-१} ता \left\{ -\frac{१}{२न-२} \cdot \frac{१}{(अ^२+य^२)^{न-१}} \right\}$$

$$= -\frac{१}{२न-२} \cdot \frac{य^{म-१}}{(अ^२+य^२)^{न-१}} + \frac{म-१}{२न-२} \cdot \int \frac{य^{म-२} ताय}{(अ^२+य^२)^{न-१}}$$

$$= -\frac{१}{२न-२} \cdot \frac{य^{म-१}}{(अ^२+य^२)^{न-१}} + \frac{म-१}{२न-२} च_{म-२,न-१}$$

इस सिद्धान्त से बार बार क्रिया करने से $च_{म-२,न-१}$। $च_{म-४,न-२}$। $च_{म-६,न-३}$ इत्यादि का मान जान सक्ते हो। अन्त में म और न के वश से $\int \frac{यताय}{(अ^२+य^२)^न}$।

इस रूप का चल जानना पड़ेगा यदि म विषम और न से इतना छोटा हो कि म—२इ =१ और न—इ >१। अथवा यदि न से म ऐसा बड़ा हो जहां बार बार क्रिया करने से अन्त में न—इ=१, म—२इ>१

तो अन्त के चल का रूप $\int \frac{य^{न} ताय}{अ^{२}+य^{२}}$ ऐसा होगा। इस लिये $\int \frac{यताय}{(अ^{२}+य^{२})^{न}}$

$= \frac{१}{२}\int २ य ताय (अ^{२}+य^{२})^{-न}$

$= -\frac{१}{२न-२}\cdot\frac{१}{(अ^{२}+य^{२})^{न-१}}$ यह पहली स्थिति में अन्त के चल का मान होगा। जहां न कोई अभिन्न संख्या है। और दूसरी स्थिति के चल का मान साधारण भाग की रीति से $\int \frac{य^{न} ताय}{अ^{२}+य^{२}}$ इस का $\int फ(य)$ $+\int\frac{कताय}{अ^{२}+य^{२}}$ ऐसा रूप बनाकर {जहां $फ(य)=ग_{त}य^{त}+ग_{त-२}य^{त-२}+\cdots ग_{0}$} ९वें प्रक्रम से सहज में जान सक्ते हो।

कभी म के सम होने पर $\int\frac{ताय}{(अ^{२}+य^{२})^{न}}$ ऐसा रूप भी अन्त में रहेगा जिस का चल २९वें प्रक्रम से व्यक्त हो जायगा। जैसे

यहां भी यदि $\frac{१}{अ^{२}+य^{२}} = त$ तो

$\int य^{७}त^{१०}ताय$, इस का मान $\int य^{५}त^{९}ताय, \int य^{३}त^{८}ताय, \int यत^{७}ताय$ इसके
$\int य^{१४}त^{५}ताय$, इस का मान $\int य^{१२}त^{४}ताय, \int य^{१०}त^{३}ताय, \int य^{८}त^{२}ताय,$
$\int य^{६}त ताय$ इस के
और $\int य^{८}त^{६}ताय$ इस का मान, $\int य^{६}त^{५}ताय, \int य^{४}त^{४}ताय, \int य^{२}त^{३}ताय,$
$\int त^{२} ताय$
इनके आधीन हैं

३१। कल्पना करो कि $त=आय^{अ}+काय^{क}$ और $च_{म,न}=\int य^{म}त^{न}ताय$
तो $य^{म}त^{न} = य^{म}(आय^{अ}+काय^{क})\,त^{न-१} = आय^{म+अ}\,त^{न-१}$ $+काय^{म+क}त^{न-१}$ चलज्ञान करने से

$$च_{म,न}=आच_{म+अ,न-१}+काच_{म+क,न-१} \quad \cdots\cdots \quad (१)$$

परन्तु खण्डचलानयन से $\int य^{म} त^{न} ताय = \frac{य^{म+१} त^{न}}{म+१} - \frac{१}{म+१} \int य^{म+१} ता(त^{न})$

$$= \frac{य^{म+१} त^{न}}{म+१} - \int \frac{य^{म+१}}{म+१} न त^{न-१} (आ अ य^{अ-१} + का क य^{क-१}) ताय$$

$$= \frac{य^{म+१} त^{न}}{म+१} - \frac{नअ}{म+१} आ य^{म+अ} त^{न-१} ताय - \frac{नक}{म+१} \int का य^{म+क} त^{न-१} ताय$$

$$= \frac{य^{म+१} त^{न}}{म+१} - \frac{नअ}{म+१} आ च_{म+अ, न-१} - \frac{नक}{म+१} का च_{म+क, न-१} \cdots\cdots (२)$$

(१) और (२) से का $च_{म+क, न-१}$ को उड़ा देने से

$$च_{म,न} = \frac{य^{म+१} त^{न}}{म+नक+१} + \frac{नक - नअ}{म+नक+१} आ च_{म+अ, न-१} \cdots\cdots\cdots (३)$$

यह एक लघूकरण सिद्धान्त हुआ यदि न धन संख्या हो तो ।

जैसे $\int य^{१०} त^{\frac{७}{२}} ताय$ इस का मान जानना हो तो यहां इसी सिद्धान्त से तीन वार क्रिया करने से $\int य^{१०+अ} त^{\frac{५}{२}} ताय$, $\int य^{१०+२अ} त^{\frac{३}{२}} ताय$ इन का मान व्यक्त हो जायगा अन्त में $\int य^{१०+३अ} त^{\frac{१}{२}} ताय$ यह रह जायगा ।

यदि न का मान ऋण हो तो पहले (३) से छेद गम कर, समशोधनादि से $च_{म+अ, न-१} = - \frac{य^{म+१} त^{न}}{(क-अ) नआ} + \frac{म+नक+१}{(क-अ) नआ} च_{म,न}$ ऐसा समीकरण बना कर इस में म के स्थान में म — अ का और न के स्थान में —(न—१) का उत्थापन देने से

$$च_{म,-न} = \frac{य^{म-अ+१}त^{-(न-१)}}{(क-अ)(न-१)अ} - \frac{म-अ-(न-१)क+१}{(क-अ)(न-१)अ} च_{म-अ,-(न-१)} \cdots (४)$$

इस पर से $\int य^{५}त^{-\frac{६}{२}}$ इस के मान में $\int य^{५-अ}त^{-\frac{५}{२}}$ ताय यह और इस में $\int य^{५-२अ}त^{-\frac{५}{२}}$ ताय इत्यादि आवेंगे अन्त में $\int य^{५-४अ}त^{-\frac{१}{२}}$ ताय यह आवेगा।

इसी तरह (१) और (२) से यदि $च_{म,न}$ को उड़ावो तो

$$य^{म+१}त^{न} = (म+नअ+१)अ च_{म+अ,न-१} + (म+नक+१)क च_{म+क,न-१} \cdots (५)$$

इस में न के स्थान में न+१ का और म के स्थान में म−अ का उत्थापन देने से

$$च_{म,न} = \frac{य^{म-अ+१}त^{न+१}}{(म+नअ+१)अ} - \frac{म+(न+१)क-अ+१}{(म+नअ+१)अ} क च_{म-अ+क,न} \cdots (६)$$

यह य के उत्तरोत्तर लघुघात के रूप में $च_{म,न}$ का रूप ले आता है यदि अ > क हो तो।

३२। कल्पना करो कि त=अ+कय+गय^{२} तो $\int य^{म}त^{न}$ताय=$च_{म,न}$ इस का मान जानने के लिये ३१वें प्रक्रम की युक्ति से $त^{न}=(अ+कय+गय^{२})त^{न-१}$ ऐसा मान और $य^{म}$ से गुण कर चलानयन करने से

$च_{म,न} = अच_{म,न-१} + कच_{म+१,न-१} + गच_{म+२,न-१}$ ऐसा होगा।

$$\text{इस लिये } \frac{२न}{म+१}च_{म,न} = \frac{२न}{म+१}(अच_{म,न-१} + कच_{म+१,न-१})$$

$$+ \frac{२नग}{म+१}च_{म+२,न-१} \cdots\cdots (१)$$

और खण्डचलानयन से

$$च_{म,न} = \frac{य^{म+१}त^{न}}{म+१} - \frac{नक}{म+१}च_{म+१,न-१} - \frac{२नग}{म+१}च_{म+२,न-१} \cdots\cdots (२)$$

(१) और (२) को जोड़ देने से

$$\frac{म+२न+१}{म+१} च_{म,न} = \frac{य^{म+१}त^{न}}{म+१} + \frac{२नअ}{म+१} च_{म,न-१} + \frac{नक}{म+१} च_{म+१,न-१}$$

$$इस\ लिये\ च_{म,न} = \frac{य^{म+१}त^{न}}{२न+म+१} + \frac{२नअ}{२न+म+१} च_{म,न-१}$$

$$+ \frac{नक}{२न+म+१} च_{म+१,न-१} \quad \cdots\cdots\cdots (३)$$

इसी प्रकार (१) और (२) से

$$य^{म+१}त^{न} = (म+१)अच_{म,न-१} + (म+न+१)कच_{म+१,न-१}$$

$$+ (म+२न+१)गच_{म+२,न-१} \quad \cdots (४)$$

(४) में म के स्थान में म—२ का और न के स्थान में न+१ का उत्थापन देने से और समशोधनादि से

$$च_{म,न} = \frac{य^{म-१}त^{न+१}}{ग(म+२न+१)} - \frac{(म+न)}{ग(म+२न+१)} च_{म-१,न} - \frac{अ(म-१)}{ग(म+२न+१)} च_{म-२,न} \cdots (५)$$

यह एक लघूकरणसिद्धान्त $च_{म,न}$ का मान जानने के लिये य के उत्तरोत्तर घात ह्रास में उत्पन्न हुआ ।

(४) में म के स्थान में —म का और न के स्थान में न+१ का उत्थापन देने से

$$च_{-म,न} = -\frac{त^{न+१}}{अ(म-१)य^{म-१}} - \frac{क(म-न-२)}{अ(म-१)} च_{-(म-१),न}$$

$$- \frac{ग(म-२न-३)}{अ(म-१)} च_{-(म-२),न} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (६)$$

यह म के ऋण मान में लघूकरणसिद्धान्त उत्पन्न हुआ ।

३३ । ३१वें प्रक्रम में यदि $त = आय^{अ} + कायक$ इस में $क = 0$ तो $त = का + आय^{अ}$ ऐसा हुआ और (१), (२) इत्यादि समीकरण में क के स्थान में शून्य का उत्थापन देने से

$$च_{म,न} = आच_{म+अ,न-१} + काच_{म,न-१} \quad \cdots\cdots (१)$$

$$च_{म,न} = \frac{य^{म+१}त^{न}}{म+१} - \frac{नअआ}{म+१} च_{म+अ,न-१} \quad \cdots\cdots (२)$$

$$च_{म,न} = \frac{य^{म+१}त^{न}}{म+१} - \frac{नअआ}{म+१} च_{म+अ,न-१} \quad \cdots\cdots (३)$$

$$\left.\begin{array}{l} च_{म,-न} = -\dfrac{य^{म-अ+१}त^{-(न-१)}}{अआ(न-१)} + \dfrac{म-अ+१}{अआ(न-१)} च_{म-अ,-(न-१)} \\ च_{म,न} = +\dfrac{य^{म-अ+१}त^{न+१}}{अआ(न+१)} - \dfrac{म-अ+१}{अआ(न+१)} च_{म-अ,न+१} \end{array}\right\} \cdots (४)$$

यदि न = — न

$$य^{म+१}त^{न} = (म+नअ+१)आच_{म+अ,न-१} + (म+१)काच_{म,न-१} \quad \cdots\cdots (५)$$

$$च_{म,न} = \frac{य^{म-अ+१}त^{न+१}}{आ(म+नअ+१)} - \frac{म-अ+१}{आ(म+नअ+१)} काच_{म-अ,न} \quad \cdots\cdots (६)$$

ऐसे ६ समीकरण उत्पन्न होते हैं इन पर से अनेक चल ज्ञान सहज में हो जाते हैं। ये छवो समीकरण यदि वास्तव में विचारो तो ३१वें प्रक्रम के उदाहरण रूप हैं। इन पर से टाड्हन्टर (Todhunter) साहब ने चलराशिकलन के ३०वें प्रक्रम में जो क्रिया की है वह भी उत्पन्न हो जाती है।

यहां (२) से

$$च_{म+अ,न-१} = \frac{य^{म+१}त^{न}}{नअआ} - \frac{म+१}{नअआ} च_{म,न}$$ इस का उत्थापन (१) में देने से

$$च_{म,न} = \frac{य^{म+१}त^{न}}{नअ} - \frac{म+१}{नअ} च_{म,न} + काच_{म,न-१},$$

इस लिये $$च_{म,न} = \frac{य^{म+१}त^{न}}{म+नअ+१} + \frac{कानअ}{म+नअ+१} च_{म,न-१} \quad \cdots\cdots (७)$$

यहां न के स्थान में न+१ का उत्थापन देकर समशोधनादि से।

$$च_{म,न} = -\frac{य^{म+१}त^{न+१}}{काअ(न+१)} + \frac{म+अन+अ+१}{काअ(न+१)} च_{म,न+१} \quad \cdots\cdots\cdots(८)$$

इस तरह से अनेक सिद्धान्त बना सकते हो।

३४। इस प्रक्रम में पूर्व समीकरणों की व्याप्ति दिखलाने के लिये कुछ उदाहरण दिखलाते हैं।

(१) $य^{म}(ग^२-य^२)^{-\frac{१}{२}}$ ताय इसका चल क्या है।

यहां यदि $का=ग^२$, $आ=-१$, $अ=२$, $न=-\frac{१}{२}$ कल्पना करो तो ३३वें प्रक्रम के (६)वें समीकरण से

$$च_{म,न} = \frac{य^{म-अ+१}त^{न+१}}{आ(म+नअ+१)} - \frac{म-अ+१}{आ(म+नअ+१)} का\ च_{म-अ,न}$$

$$= \frac{य^{म-२+१}(ग^२-य^२)^{-\frac{१}{२}+१}}{-१(म+२\times-\frac{१}{२}+१)} - \frac{म-२+१}{-१(म+२\times-\frac{१}{२}+१)} ग^२ \int य^{म-२}(ग^२-य^२)^{-\frac{१}{२}} ताय$$

$$= -\frac{य^{म-१}\sqrt{ग^२-य^२}}{म} + \frac{(म-१)ग^२}{म}\int य^{म-२}(ग^२-य^२)^{-\frac{१}{२}} ताय,$$ ऐसा हुआ।

खण्ड चलानयन से भी

$$\int य^{म}(ग^२-य^२)^{-\frac{१}{२}} ताय = -\int य^{म-१} ता\,(ग^२-य^२)^{+\frac{१}{२}}$$

$$= -य^{म-१}\sqrt{ग^२-य^२} + (म-१)\int य^{म-२}\sqrt{ग^२-य^२}\, ताय$$

$$= -य^{म-१}\sqrt{ग^२-य^२} + (म-१)\int \frac{य^{म-२}(ग^२-य^२) ताय}{\sqrt{ग^२-य^२}}$$

$$= -य^{म-१}\sqrt{ग^२-य^२}$$

$$-(म-१)\int य^{म}\sqrt{ग^२-य^२})^{-\frac{१}{२}} ताय + (म-१)ग^२\int \frac{य^{म-२}}{\sqrt{ग^२-य^२}} ताय$$

इस लिये पक्षान्तरानयन से

$$\int य^{म}(ग^२-य^२)^{-\frac{१}{२}} = -\frac{य^{म-१}\sqrt{ग^२-य^२}}{म}$$

$$+\frac{(म-१)ग^२}{म}\int य^{म-२}(ग^२-य^२)^{-\frac{१}{२}} ताय$$

इस तरह से वही सिद्ध हुआ जो पहले (६)वें समीकरण से हुआ था। भेद इतनाही है कि पहले प्रकार से लाघव दूसरे से गौरव है।

(२) $\int\frac{ताय}{य^म(अ^२+य^२)^{\frac{१}{२}}}$ इसका मान जानना है।

यहां यदि म=—म, न= $-\frac{१}{२}$, आ=अ^२, अ=० का=१, क=२ मानो तो ३१वें प्रक्रम के ६वें समीकरण से

$$च_{म,न}=\frac{य^{म-अ+१}त^{न+१}}{(म+नअ+१)आ}-\frac{म+(न+१)क-अ+१}{(म+नअ+१)आ}काच_{म-अ+क,न}$$

$$=\frac{य^{-म+१}त^{-\frac{१}{२}+१}}{(-म+१)अ^२}-\frac{-म+(-\frac{१}{२}+१)२+१}{(-म+१)अ^२}च_{(-म+२,न)}$$

$$=-\frac{\sqrt{त}}{अ^२(म-१)य^{म-१}}+\frac{-म+१+१}{अ^२(म-१)}\int य^{-म+२}(अ^२+य^२)^{-\frac{१}{२}}ताय$$

$$=-\frac{\sqrt{अ^२+य^२}}{अ^२(म-१)य^{म-१}}-\frac{म-२}{अ^२(म-१)}\int\frac{ताय}{य^{म-२}\sqrt{अ^२+य^२}}$$ यह सिद्ध हुआ।

इसी उदाहरण को खण्डचलनयन से भी कर सकते हो। जैसे

$$\int\frac{ताय}{य^म\sqrt{अ^२+य^२}}=\int\frac{१}{य^{म+१}}ता\sqrt{अ^२+य^२}=\frac{\sqrt{अ^२+य^२}}{य^{म+१}}+(म+१)\frac{\sqrt{अ^२+य^२}}{य^{म+२}}ताय$$

$$=\frac{\sqrt{अ^२+य^२}}{य^{म+१}}+(म+१)\int\frac{अ^२+य^२}{य^{म+२}\sqrt{अ^२+य^२}}ताय$$

समशोधनादि से

$$अ^२(म+१)\int\frac{ताय}{य^{म+२}\sqrt{अ^२+य^२}}=-\frac{\sqrt{अ^२+य^२}}{य^{म+१}}-म\int\frac{ताय}{य^म\sqrt{अ^२+य^२}}$$

म के स्थान में म—२ का उत्थापन देकर $अ^2(म-१)$का भाग दे देने से

$$\int \frac{ताय}{य^म\sqrt{अ^2+य^2}} = -\frac{\sqrt{अ^2+य^2}}{अ^2(म-१)य^{म-१}} - \frac{म-२}{अ^2(म-१)}\int\frac{ताय}{य^{म-२}\sqrt{अ^2+य^2}}$$

यही पहले भी सिद्ध हुआ था ।

(३) $\int\frac{य^म ताय}{\sqrt{(२अय-य^2)}}$ इसका क्या मान है ।

यहां $\frac{य^म ताय}{\sqrt{२अय-य^2}} = य^{म-\frac{१}{२}}(२अ-य)^{-\frac{१}{२}}$ ताय, इस लिये ३३वें प्रक्रम के (८)वें समीकरण से (यदि का=२अ, आ= —१, अ=१, क=० म=म$-\frac{१}{२}$, न= $-\frac{१}{२}$)

$$च_{म,न} = -\frac{य^{म+१}त^{न+१}}{काअ(न+१)} + \frac{म+अन+अ+१}{काअ(न+१)}च_{म-\frac{१}{२},न+१}$$

$$= -\frac{य^{म-\frac{१}{२}+१}त^{-\frac{१}{२}+१}}{२अ(-\frac{१}{२}+१)} + \frac{म-\frac{१}{२}-\frac{१}{२}+१+१}{२अ(-\frac{१}{२}+१)}च_{म-\frac{१}{२},न+१}$$

$$= -\frac{य^{म+\frac{१}{२}}त^{\frac{१}{२}}}{अ} + \frac{म+१}{अ}च_{म-\frac{१}{२},न+१}$$

$$= -\frac{य^{म+\frac{१}{२}}(२अ-य)^{\frac{१}{२}}}{अ} + \frac{म+१}{अ}\int य^{म-\frac{१}{२}}(२अ-य)^{\frac{१}{२}} ताय$$

$$= -\frac{य^म(२अय-य^2)^{\frac{१}{२}}}{अ} + \frac{म+१}{अ}\int य^{म-१}(२अय-य^2)^{\frac{१}{२}} ताय$$ यह सिद्ध

हुआ। वा ३३वें प्रक्रम के ६वें समीकरण में पूर्वोक्त संख्याओं का उत्थापन देने से

$$च_{म,न} = \int य^{म-\frac{१}{२}}(२अ-य)^{-\frac{१}{२}} ताय$$

$$= -\frac{य^{म-१}\sqrt{(२अय-य^2)}}{म} + \frac{अ(२म-१)}{म}\int\frac{य^{म-१}ताय}{\sqrt{(२अय-य^2)}}$$ ऐसा होगा ।

इसे खण्डचलनानयन से भी सिद्ध कर सकते हो। जैसे

$$\int \frac{य^{म}ताय}{\sqrt{(२अय-य^{२})}} = य^{म-१}\frac{(य-अ+अ)ताय}{\sqrt{(२अय-य^{२})}} = \int -य^{म-१}ता\sqrt{(२अय-य^{२})} + अ\int\frac{ताय\, य^{म-१}}{\sqrt{(२अय-य^{२})}}$$

$$= -य^{म-१}\sqrt{(२अय-य^{२})} + (म-१)\int य^{म-२}\sqrt{(२अय-य^{२})}ताय + अ\int\frac{तायय^{म-१}}{\sqrt{(२अय-य^{२})}}$$

$$= -य^{म-१}\sqrt{(२अय-य^{२})} + (म-१)\int\frac{य^{म-२}(२अय-य^{२})ताय}{\sqrt{(२अय-य^{२})}} + अ\int\frac{तायय^{म-१}}{\sqrt{(२अय-य^{२})}}$$

$$= -य^{म-१}\sqrt{(२अय-य^{२})} - (म-१)\int\frac{य^{म}ताय}{\sqrt{(२अय-य^{२})}} + अ(२म-१)\frac{तायय^{म-१}}{\sqrt{(२अय-य^{२})}}$$

पक्षान्तरनयन से और म का भाग दे देने से

$$\int\frac{य^{म}ताय}{\sqrt{(२अय-य^{२}}} = -\frac{य^{म-१}\sqrt{(२अय-य^{२})}}{म} + \frac{अ(२म-१)}{म}\int\frac{य^{म-१}ताय}{\sqrt{(२अय-य^{२})}},$$

यही पहले भी सिद्ध हुआ था।

(४) $\int\frac{ताय}{(य^{२}+अ^{२})^{न}}$ इस का क्या मान होगा।

यहां म=०, न=−न, आ=१, अ=२, का=अ^{२} इन का ३३वें प्रक्रम के (८)वें में उत्थापन देने से

$$च_{म,न} = च_{०,-न} = -\frac{य^{म+१}त^{न+१}}{काअ(न+१)} + \frac{म+अन+अ+१}{काअ(न+१)}च_{म,न+१}$$

$$= -\frac{य^{०+१}त^{-न+१}}{२अ^{२}(-न+१)} + \frac{०+-२न+२+१}{२अ^{२}(-न+१)} च_{०,-न+१}$$

$$= \frac{१}{(य^{२}+अ^{२})^{न-१}} \cdot \frac{य}{२अ^{२}(न-१)} + \frac{१न-३}{२अ^{२}(न-१)} \int \frac{ताय}{(य^{२}+अ^{२})^{न-१}}$$

देखो यही १९वें प्रक्रम से भी लघूकरण सिद्धान्त उत्पन्न हुआ है। इस तरह हज़ारों नये नये सिद्धान्त लघूकरणसिद्धान्तों के बल चलानयन के लिये बना सक्ते हो।

३५। लघूकरणसिद्धान्त के बल से त्रिकोणमिति सम्बन्धि फलों के चल का भी ज्ञान सहज में हो जाता है जैसे यदि

$\int$ फ(ज्याय, कोज्याय) ताय इस का ज्ञान करना हो तो कल्पना करो कि ज्याय=र $\therefore$ ताय$=\frac{तार}{कोज्याय}=\frac{तार}{\sqrt{१-र२}}$ क्योंकि

कोज्याय $=\sqrt{१-र^{२}}$ इन का उत्थापन देने से

$$\int फ(ज्याय,\ कोज्याय)ताय = \int फ\left\{र,\sqrt{(१-र^{२})}\right\}\frac{तार}{\sqrt{(१-र^{२})}} \quad \cdots\cdots \quad (१)$$

यहां यदि फ(ज्याय, कोज्याय) = ज्या^{द}यकोज्या^{ध}य तो

$$\int फ(ज्याय,\ कोज्याय)\ ताय = \int र^{द}(१-र^{२})^{\frac{१}{२}(ध-१)}तार \quad \cdots\cdots \quad (२)$$

यदि ३३वें प्रक्रम के समीकरणों में का=१, अ=−१, अ=२, म=द, और न = $\frac{१}{२}$ (ध−१) कल्पना करो तो

$$\int र^{द}(१-र^{२})^{\frac{१}{२}(ध-१)}तार=च_{द,\frac{१}{२}(ध-१)}=च_{द,ब}\left\{यदि\ \frac{१}{२}(ध-१)=ब\right\}$$

$$च_{द,ब}=-च_{द+२,ब-१}+च_{द,ब-१} \quad \cdots\cdots \quad (३)$$

$$च_{द,ब}=\frac{र^{द+१}त^{ब}}{द+१}+\frac{२ब}{द+१}च_{द+२,ब-१} \quad \cdots\cdots \quad (४)$$

$$च_{द,-ब}=+\frac{र^{द-१}त^{-(ब-१)}}{ब-१}-\frac{द-१}{ब-१}च_{द-२,-(ब-१)} \quad \cdots\cdots \quad (५)$$

$$\text{च}_{\text{द},\text{ब}} = -\frac{\text{र}^{\text{द}-१}\text{त}^{\text{ब}+१}}{२(\text{ब}+१)} + \frac{\text{द}-१}{(\text{ब}+१)}\text{च}_{\text{द}-२,\text{ब}+१} \quad \cdots\cdots\cdots (६)$$

$$\text{र}^{\text{द}+१}\text{त}^{\text{ब}} = -(\text{द}+२\text{ब}+१)\,\text{च}_{\text{द}+२,\text{ब}-१} + (\text{द}+१)\,\text{च}_{\text{द},\text{ब}-१} \quad \cdots\cdots (७)$$

$$\text{च}_{\text{द},\text{ब}} = -\frac{\text{र}^{\text{द}-१}\text{त}^{\text{ब}+१}}{\text{द}+२\text{ब}+१} + \frac{\text{द}-१}{\text{द}+२\text{ब}+१}\text{च}_{\text{द}-२,\text{ब}} \quad \cdots\cdots\cdots (८)$$

$$\text{च}_{\text{द},\text{ब}} = \frac{\text{र}^{\text{द}+१}\text{त}^{\text{ब}}}{\text{द}+२\text{ब}+१} + \frac{२\text{ब}}{\text{द}+२\text{ब}+१}\text{च}_{\text{द},\text{ब}-१} \quad \cdots\cdots\cdots (९)$$

$$\text{च}_{\text{द},\text{ब}} = -\frac{\text{र}^{\text{द}+१}\text{त}^{\text{ब}+१}}{२(\text{ब}+१)} + \frac{\text{द}+२\text{ब}+२+१}{२(\text{ब}+१)}\text{च}_{\text{द},\text{ब}+१} \quad \cdots\cdots (१०)$$

$$\text{च}_{\text{द},\text{ब}} = \frac{\text{र}^{\text{द}+१}\text{त}^{\text{ब}+१}}{\text{द}+१} + \frac{\text{द}+२(\text{ब}+१)+१}{\text{द}+१}\text{च}_{\text{द}+२,\text{ब}} \quad \cdots\cdots\cdots (११)$$

यदि ३१वें प्रक्रम के ६वें समीकरण में का, क के स्थान में आ, अ के स्थान में उत्थापन दो और आ, अ के स्थान में का, क का तो पिछला सिद्धान्त उत्पन्न होगा ।

(२) में यदि ध−१=० अर्थात् ध=१ मानो तो ब=० इनका उत्थापन (८)वें में देने से

$$\text{च}_{\text{द},0} = \int \text{ज्या}^{\text{द}}\text{य कोज्याय ताय} = -\frac{\text{ज्या}^{\text{द}-१}\text{य कोज्या}^{२}\text{य}}{\text{द}+१} + \frac{\text{द}-१}{\text{द}+१}\text{च}_{\text{द}-२,0}$$

$$= \frac{\text{ज्या}^{\text{द}-१}\text{य कोज्या}^{२}\text{य}}{\text{द}+१} + \frac{\text{द}-१}{\text{द}+१}\int \text{ज्या}^{\text{द}-२}\text{य कोज्याय ताय}$$

इसी प्रकार $\int \text{र}^{\text{द}}(१-\text{र}^{२})^{\frac{१}{२}(\text{ध}-१)}\text{तार}$ इस में र के स्थान में इस का पहला मान ज्याय रखदो तो $\int \text{र}^{\text{द}}(१-\text{र}^{२})^{\frac{१}{२}(\text{ध}-१)}\text{तार}$

$= \int \text{ज्या}^{\text{द}}\text{य}\cdot\text{कोज्या}^{\text{ध}-१}\text{य}\cdot\text{कोज्याय ताय}$ । अब यहां यदि ध=० तो $\int \text{ज्या}^{\text{द}}\text{य कोज्या}^{\text{ध}-१}\text{य कोज्याय ताय}$

$= \int \text{ज्या}^{\text{द}}\text{य ताय}$ ऐसा होगा । इस लिये $\frac{१}{२}(\text{ध}-१) = \text{ब} = -\frac{१}{२}$ इन का उत्थापन इसी प्रक्रम के (८)वें समीकरण में देने से

$$च_{द,ब} = \frac{र^{द-१}त^{ब+१}}{द+२ब+१} + \frac{द-१}{द+२ब+१} च_{द-२,ब}$$

$$= -\frac{ज्या^{द-१}य कोज्याय}{द} + \frac{द-१}{द}\int ज्या^{द-२}य \; ताय = \int ज्या^{द}य \; ताय ।$$

देखो ठीक यही खण्ड चलानयन से १२वें प्रक्रम के १५वें उदाहरण में भी सिद्ध हुआ है। केवल द के स्थान में न का उत्थापन मात्र देना होगा।

इस तरह पीछे दिखलाये हुए समीकरणों के बल से सैकड़ों लघूकरण-सिद्धान्त उत्पन्न हो जाते हैं विद्यार्थियों को चाहिये कि उन का अच्छी तरह से अभ्यास करें।

३६। ३१वें प्रक्रम की युक्ति से यदि $त = आय^{अ} + काय^{क} + गाय^{ग} + \cdots$ और $च_{म,न} = \int य^{म} त^{न} ताय$ तो यहां भी उसी तरह से $च_{म,न}$ का मान जान सक्ते हो। जैसे

$$त^{न} = (आय^{अ} + काय^{क} + गाय^{ग} + \cdots)\, त^{न-१}$$

$$इस लिये, य^{म}त^{न} = (आय^{म+अ} + काय^{म+क} + गाय^{म+ग} + \cdots)त^{न-१}$$

$$\int य^{म}त^{न}ताय = आ\int य^{म+अ}त^{न-१}ताय + का\int य^{म+क}त^{न-१}ताय + गा\int य^{म+ग}त^{न-१}ताय + \cdots$$

$$अर्थात्\; च_{म,न} = आच_{म+अ,न-१} + काच_{म+क,न-१} + गाच_{म+ग,न+१} + \cdots \quad (१)$$

और खण्डचलानयन से

$$च_{म,न} = \int य^{म}त^{न}ताय = \frac{य^{म+१}त^{न}}{म+१}$$

$$- \int \frac{नय^{म+१}त^{न-१}}{म+१}(अआय^{अ-१} + ककाय^{क-१} + गगाय^{ग-१} + \cdots)ताय$$

$$= \frac{य^{म+१}त^{न}}{म+१} - \frac{नअ}{म+१} आच_{म+अ,न-१}$$

$$-\frac{\text{नक}}{\text{म}+१}\text{काच}_{\text{म}+\text{क},\text{न}-१}-\frac{\text{नग}}{\text{म}+१}\text{गाच}_{\text{म}+\text{ग},\text{न}-१}\cdots$$

छेदगम कर पक्षान्तरनयन से

$$\text{य}^{\text{म}+१}\text{त}^{\text{न}}=\text{च}_{\text{म},\text{न}}(\text{म}+१)+\text{नअआच}_{\text{म}+\text{अ},\text{न}-१}+\text{नककाच}_{\text{म}+\text{क},\text{न}-१}+\text{नगगाच}_{\text{म}+\text{ग},\text{न}-१}+\cdots$$

(५) से $\text{च}_{\text{म},\text{न}}$ का उत्थापन देने से और $\text{म}+\text{नअ}+१=\text{अ}'$, $\text{म}+\text{नक}+१=\text{क}'$, $\text{म}+\text{नग}+१=\text{ग}'$ इत्यादि कल्पना करने से

$$\text{य}^{\text{म}-१}\text{त}^{\text{न}}=\text{अ}'\text{आच}_{\text{म}+\text{अ},\text{न}-१}+\text{क}'\text{काच}_{\text{म}+\text{क},\text{न}-१}+\text{ग}'\text{गाच}_{\text{म}+\text{ग},\text{न}-१}+\cdots\quad(२)$$

इस तरह अनेक चमत्कार दिखा सक्ते हो।

३७। लघूकरणसिद्धान्त से दो मानों के भीतर का चलज्ञान बहुत ही सहज में हो जाता है अर्थात् इस से सान्तचल मान बहुत ही सुगम हो जाता है।

जितने पिछले प्रक्रमों में लघूकरण सिद्धान्तों के लिये समीकरणों को दिखाया है सब का मूल यदि ध्यान दे कर देखो तो खण्डचलानयन ही है इसलिये खण्ड चलानयन को लघूकरण का मूल कह सक्ते हैं।

दो सीमाओं के भीतर के चलज्ञान के लिये कुछ उदाहरण दिखाते हैं।

(१) $\int(\text{ग}^२-\text{य}^२)^{\frac{\text{न}}{२}}\text{ताय}$ इसके मान के लिये खण्डचलानयन से

$$\int(\text{ग}^२-\text{य}^२)^{\frac{\text{न}}{२}}\text{ताय}=\frac{\text{य}(\text{ग}^२-\text{य}^२)^{\frac{\text{न}}{२}}}{\text{न}+१}+\frac{\text{नग}^२}{\text{न}+१}\int(\text{ग}^२-\text{य}^२)^{\frac{\text{न}}{२}-१}\text{ताय},$$ यह

एक लघूकरण सिद्धान्त उत्पन्न हुआ इस में यदि $\text{य}=0$ वा $\text{य}=\text{ग}$ तो स्पष्ट है कि प्रथम खण्ड शून्य के तुल्य हो जायगा इस लिये

$$\int_0^{\text{ग}}(\text{ग}^२-\text{य}^२)^{\frac{\text{न}}{२}}\text{ताय}=\frac{\text{नग}^२}{\text{न}+१}\int_0^{\text{ग}}(\text{ग}^२-\text{य}^२)^{\frac{\text{न}}{२}-१}\text{ताय}$$ यह सिद्ध हुआ।

(२) $\int\text{य}^{\text{म}-१}(१-\text{य})^{\text{न}-१}\text{ताय}$ इसके मान के लिये खण्ड चलानयन से

$$\int य^{म-१}(१-य)^{न-१} ताय = -\frac{(१-य)^न}{न} य^{म-१} + \frac{म-१}{न}\int य^{म-२}(१-य)^न ताय$$

ऐसा लघूकरण सिद्धान्त उत्पन्न होता है । यहां यदि य=० वा १ तो स्पष्ट है कि प्रथम खण्ड शून्य हो जायगा इस लिये

$$\int_0^१ य^{म-१}(१-य)^{न-१} ताय = \frac{म-१}{न}\int_0^१ य^{म-२}(१-य)^न ताय$$

और $\int_0^१ य^{म-२}(१-य)^न ताय = \frac{म-२}{न+१}\int_0^१ य^{म-३}(१-य)^{न+१} ताय$

इसी तरह $\int_0^१ य^{म-३}(१-य)^{न+१} ताय = \frac{म-३}{न+२}\int_0^१ य^{म-४}(१-य)^{न+२} ताय$

⋮

$$\int_0^१ य(१-य)^{न+म-३} = \frac{१}{न+म-२}\int_0^१ (१-य)^{न+म-२} ताय$$

और $\int (१-य)^{न+म-२} ताय = -\frac{१}{न+म-१}(१-य)^{न+म-१}$

इस लिये $\int_0^१ (१-य)^{न+म-२} ताय = \frac{१}{न+म-१}$ इन सब का उत्थापन

देने से $\int_0^१ य^{म-१}(१-य^{न-१} ताय = \frac{(म-१)(म-२)\cdots ३.२.१}{न(न+१)(न+२)\cdots(न+म-१)}$ यह होगा

(३) $\int छे^४ ष ताष = \int (१+स्प^२ष)^२ ताष = \int (१+२स्प^२ष+स्प^४ष) ताष$

$= \int ताष + २\int स्प^२ षताष + \int स्प^४ षताष = ष + २\int स्प^२ षताष + \int स्प^४ षताष ।$

परन्तु $\int स्प^{२न} षताष = \int स्प^{२न-२} ष(छे^२ष-१) ताष$

$$= \int स्प^{२न-२} षछे^२ षताष - \int स्प^{२न-२} षताष$$

$$= \int स्प^{२न-२} ष\, ता\, स्पष - \int स्प^{२न-२} षताष$$

$$= \frac{स्प^{२न-१}}{२न-१} - \int स्प^{२न-२} षताष$$

$$=\frac{\text{स्प}^{२न-१}}{२न-१}-\frac{\text{स्प}^{२न-३}}{२न-३}+\int \text{स्प}^{न-४}\text{ताप}$$

$$=\frac{\text{स्प}^{२न-१}}{२न-१}-\frac{\text{स्प}^{२न-३}}{२न-३}+\frac{\text{स्प}^{२न-५}}{२न-५}-\cdots+\cdots-(-१)^{न}\text{स्पप}+(-१)^{न}\text{प}$$

बार बार क्रिया करने से, प्रथमाध्याय का ४६वां अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखा है उसे देखो।

इस पर से $२\int \text{स्प}^{२}\text{पताप}=२\text{स्पप}-२\text{प}$

$$\int \text{स्प}^{४}\text{पताप}=\frac{\text{स्प}^{३}\text{प}}{३}-\frac{\text{स्पप}}{१}+\text{प}$$

इन का उत्थापन देने से

$$\text{छे}^{४}\text{पताप}=\text{प}+२\int \text{स्प}^{२}\text{पताप}+\int \text{स्प}^{४}\text{पताप}$$

$$=\text{प}+२\text{स्पप}-२\text{प}+\frac{\text{स्प}^{३}\text{प}}{३}-\text{स्पप}+\text{प}=\text{स्पप}+\frac{\text{स्प}^{३}\text{प}}{३}$$

इस लिये $\int_{0}^{\frac{\pi}{४}}\text{छे}^{४}\text{पताप}=१+\frac{१}{३}=\frac{४}{३}$ यह सिद्ध हुआ।

$$(४)\quad \int \text{य}^{\text{म}}(२\text{अय}-\text{य}^{२})^{\frac{१}{२}}\text{ताय}=-\frac{\text{य}^{\text{म}-१}(२\text{अय}-\text{य}^{२})^{\frac{३}{२}}}{\text{म}+२}$$

$$+\frac{\text{अ}(२\text{म}+१)}{\text{म}+२}\int \text{य}^{\text{म}-१}(२\text{अय}-\text{य}^{२})^{\frac{१}{२}}\text{ताय}$$

ऐसा होगा यदि ३१वें प्रक्रम में (६)वें में आ$=-१$, अ$=२$, का$=२$अ, क$=१$ और न$=\frac{१}{२}$ मानो। इस लिये यहां स्पष्ट है कि यदि य शून्य वा २अ के माना जाय तो प्रथम खण्ड शून्य के तुल्य होगा

तब $\int_{0}^{२\text{अ}}\text{य}^{\text{म}}(२\text{अय}-\text{य}^{२})^{\frac{१}{२}}\text{ताय}=\frac{\text{अ}(२\text{म}+१)}{\text{म}+२}\int_{0}^{२\text{अ}}\text{य}^{\text{म}-१}\int(२\text{अय}-\text{य}^{२})^{\frac{१}{२}}\text{ताय}$

म के स्थान में म—१ का उत्थापन देने से

$$\int_0^{२अ} य^{म-१}(२अय-य^२)^{\frac{१}{२}} ताय = \frac{अ(२म-१)}{म+१} \int_0^{२अ} य^{म-२}(२अय-य^२)^{\frac{१}{२}} ताय$$

यों वार वार क्रिया करने से

$$\int_0^{२अ} य^{म-(म-१)}(२अय-य^२)^{\frac{१}{२}} ताय = \int_0^{२अ} य(२अय-य^२)^{\frac{१}{२}}$$

$$= अ\int_0^{२अ}(२अय-य^२)^{\frac{१}{२}} ताय$$

परंतु $\int(२अय-य^२)^{\frac{१}{२}} ताय = \int\{अ^२-(अ-य)^२\}^{\frac{१}{२}} ताय$

$$= -\frac{अ-य}{२}\sqrt{२अय-य^२} - \frac{अ^२}{२} ज्या^{-१}\frac{अ-य}{अ}$$

इस लिये $\int_0^{२अ}(२अय-य^२)^{\frac{१}{२}} ताय = +\frac{अ^२\pi}{४} + \frac{अ^२\pi}{४} = +\frac{अ^२\pi}{२}$

इन का उत्थापन देने से

$$\int_0^{२अ} य^म(२अ-य^२)^{\frac{१}{२}} ताय = \frac{अ^{म+२}(२म+१)(२म-१)(२म-३)\cdots१}{(म+२)(म+१)म(म-१)(-२)\cdots३}\frac{\pi}{२}$$

$$= \frac{१.३.५\ldots(२म+१)}{३.४.५\ldots(म+२)}\frac{\pi.अ^{म+२}}{२}$$ यह सिद्ध हुआ,

(५) $\int_0^{\frac{\pi}{२}}\frac{ताय}{\sqrt{१-ग^२ज्या^२य}}$ इसका क्या मान होगा यदि $ग<१$

यहां $\frac{ताय}{\sqrt{(१-ग^२ज्या^२य)}} = ताय(१-ग^२ज्या^२य)^{-\frac{१}{२}}$ इसलिये द्वियुक्पद

सिद्धान्त से $\frac{ताय}{\sqrt{(१-ग^२ज्या^२य)}}$

$$= ताय\left(१+\tfrac{१}{२}ग^२ज्या^२य + \frac{१.३}{२.४}ग^४ज्या^४य + \frac{१.३.५}{२.४.६}ग^६ज्या^६य + \cdots\right)$$

इस लिये $\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{(१-\text{ग}^२\text{ज्या}^२\text{य})}} = \text{य} + \frac{\text{ग}^२}{२}\int \text{ज्या}^२\text{य} + \frac{१.३}{२.४}\text{ग}^४\int \text{ज्या}^४\text{यताय}$

$$+\frac{१.३.५}{२.४.६}\text{ग}^६\int \text{ज्या}^६\text{यताय}$$

इस लिये १२वें प्रक्रम के १५वें उदाहरण से वा ३५वें प्रक्रम से

$$\int_०^{\frac{\pi}{२}} \frac{\text{ताय}}{\sqrt{(१-\text{ग}^२\text{ज्या}^२\text{य})}} = \frac{\pi}{२} + \frac{\text{ग}^२}{२}\int_०^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^२\text{यताय}$$

$$+\frac{१.३}{२.४}\text{ग}^४\int_०^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^४\text{यताय} + \cdots$$

$$= \frac{\pi}{२}\left\{१+\left(\frac{१}{२}\right)^२\text{ग}^२+\left(\frac{१.३}{२.४}\right)^२\text{ग}^४+\left(\frac{१.३.५}{२.४.६}\right)^२\text{ग}^६+\cdots\right\}$$

यह सिद्ध हुआ । इस प्रकार से विद्यार्थियों को चाहिये कि अनेक प्रश्नों का उत्तर कर पूर्व प्रक्रमों के सिद्धान्तों से अच्छी तरह परिचय करें ।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

सिद्ध करो कि

१ । $\int \frac{\text{ताष}}{\text{ज्या}^\text{म}\text{षको}\text{ज्या}^\text{न}\text{ष}} = \int \frac{\text{ताष}}{\text{ज्या}^{\text{म}-२}\text{षको}\text{ज्या}^\text{न}\text{ष}} + \int \frac{\text{ताष}}{\text{ज्या}^\text{म}\text{षको}\text{ज्या}^{\text{न}-२}\text{ष}}$

२ । $\int \frac{\text{ताष}}{\text{को}\text{ज्या}^\text{न}\text{ष}} = \frac{\text{ज्याष}}{(\text{न}-१)\text{को}\text{ज्या}^{\text{न}-१}\text{ष}} + \frac{\text{न}-२}{\text{न}-१}\int \frac{\text{ताष}}{\text{को}\text{ज्या}^{\text{न}-२}\text{ष}}$

३ । $\int \frac{\text{ताष}}{\text{ज्या}^\text{न}\text{ष}} = \frac{-\text{कोज्याष}}{(\text{न}-१)\text{ज्या}^{\text{न}-१}\text{ष}} + \frac{\text{न}-२}{\text{न}-१}\int \frac{\text{ताष}}{\text{ज्या}^{\text{न}-२}\text{ष}}$

४ । $\int \frac{\text{ताष}}{\text{ज्याषको}\text{ज्या}^२\text{ष}} = \frac{१}{\text{कोज्याष}} + \text{ला स्प}\frac{\text{ष}}{२}$

५ । $\int \frac{\text{ताष}}{\text{ज्याषको}\text{ज्या}^४\text{ष}} = \int \frac{\text{ज्याषताष}}{\text{को}\text{ज्या}^४\text{ष}} + \int \frac{\text{ताष}}{\text{ज्याषको}\text{ज्या}^२\text{ष}}$

६ । $\int \frac{\text{ताष}}{\text{ज्या}^{3}\text{षकोज्या}^{2}\text{ष}} = \frac{1}{3\text{ज्या}^{3}\text{ष}} - \frac{1}{\text{ज्याष}} + \text{ला}\left\{\text{स्प}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\text{ष}}{2}\right)\right\}$

७ । $\int \frac{\text{ताष}}{\text{ज्या}^{3}\text{ष}} = - \frac{\text{कोज्याष}}{2\text{ज्या}^{2}\text{ष}} + \text{ला}\sqrt{\text{स्प}\,\frac{\text{ष}}{2}}$

८ । $\int \frac{\text{ताष}}{\text{स्प}^{\text{न}}\text{ष}} = - \frac{1}{(\text{न}-1)\text{स्प}^{\text{न}-1}\text{ष}} - \int \frac{\text{ताष}}{\text{स्प}^{\text{न}-2}\text{ष}}$

९ । $\int \text{स्प}^{4}\text{षताष} = \frac{\text{स्प}^{3}\text{ष}}{3} - \text{स्पष} + \text{ष}$

१० । $\int \frac{\text{ताष}}{\text{स्प}^{5}\text{ष}} = - \frac{1}{4\text{स्प}^{4}\text{ष}} + \frac{1}{2\text{स्प}^{2}\text{ष}} + \text{ला}\,(\text{ज्याष})$

११ । $\int \text{ज्या}^{3}\text{षकोज्या}^{3}\text{षताष} = - \frac{1}{4}\,\text{कोज्या}^{4}\text{ष} + \frac{1}{6}\,\text{कोज्या}^{6}\text{ष}$

१२ । $\int \frac{\text{ज्या}^{2}\text{षताष}}{\text{कोज्या}^{3}\text{ष}} = \frac{\text{ज्याष}}{2\text{कोज्या}^{2}\text{ष}} + \frac{1}{4}\,\text{ला}\,\frac{1-\text{ज्याष}}{1+\text{ज्याष}}$

१३ । $\int_{0}^{2\text{अ}} \text{य}^{5}(2\text{अय}-\text{य}^{2})^{\frac{1}{2}}\text{ताय} = \frac{33\pi\text{अ}^{7}}{16}$

१४ । $\int_{0}^{2\text{अ}} \text{य}^{3}(2\text{अय}-\text{य}^{2})^{\frac{1}{2}}\text{ताय} = \frac{7\pi\text{अ}^{5}}{8}$

१५ । $\int_{0}^{2\text{अ}} \text{य}(2\text{अय}-\text{य}^{2})^{\frac{1}{2}}\text{ताय} = \frac{\pi\text{अ}^{3}}{2}$

१६ । यदि $\text{च}_{\text{न}} = \int \frac{\text{ताय}}{(\text{अ}+\text{ककोज्याय})^{\text{न}}}$ जहां न, धन और अभिन्न है

तो सिद्ध करो कि

$$(\text{न}-1)(\text{अ}^{2}-\text{क}^{2})\text{च}_{\text{न}} = - \frac{\text{कज्याय}}{\text{त}^{\text{न}-1}} + \text{अ}(2\text{न}-3)\text{च}_{\text{न}-1} - (\text{न}-2)\text{च}_{\text{न}-2}$$

(यहां $त = अ + ककोज्याय$)

१७ । सिद्ध करो कि यदि

$$\int (१+ककोज्याय)^{-न} ताय = च_न \text{ तो}$$

$$(न-१)(१-क^२)च_न = - कज्याय(१+ककोज्याय)^{-न+१} + (२न-३)च_{न-१} - (न-२)च_{न-२}$$

१८ । सिद्ध करो कि

$$\int \frac{ताय}{(अ+ककोज्याय)^न} = २\int \frac{(अ-ककोज्या२ष)^{न-१} ताष}{(अ^२-क^२)^{न-\frac{१}{२}}}$$

यदि $स्प\frac{य}{२} = स्पष\sqrt{\frac{अ+क}{अ-क}}$

१९ । सिद्ध करो कि यदि न सम हो तो

$$\int कोज्या^न षताष = ज्याष\left\{\frac{कोज्या^{न-१}}{न} + \frac{न-१}{न(न-२)} कोज्या^{न-३}ष\right\} + ज्याष\left\{\frac{(न-१)(न-३)}{न(न-२)(न-४)} कोज्या^{न-५}ष + \cdots\right\} + \frac{(न-१)(न-३)(न-५)\cdots\cdots१}{न(न-२)(न-४)\quad\cdots\cdots२} ष$$

और यदि न विषम हो तो

$$\int कोज्या^न षताष$$

$$= ज्याष\left\{\frac{कोज्या^{न-१}}{न} + \frac{न-१}{न(न-२)} कोज्या^{न-३}ष\right\}$$

$$+ ज्याष\left\{\frac{(न-१)(न-३)}{न(न-२)(न-४)} कोज्या^{न-५}ष + \cdots + \frac{(न-१)(न-३)(न-५)\cdots२}{न(न-२)\quad(न-३)\cdots\cdots३}\right\}$$

२० । सिद्ध करो कि

$$\int ज्या^२ षउज्या^म ष ताष = \frac{ज्याषउज्या^{म+१}ष}{म+२} + \frac{ष}{म+२} - \frac{म+१}{म+१} ज्याष$$

$$+\frac{म(म+१)}{\lfloor २(म+१)}\left\{\frac{ज्याषकोज्याष}{२}+\frac{ष}{२}\right\}$$

$$-\frac{म(म+१)(म-१)}{\lfloor ३(म+२)}\left\{\frac{ज्याषकोज्या^{२}ष}{३}+\frac{२}{३}ज्याष\right\}+\cdots$$

$$+(-१)^{न}\frac{(म+१)(म)\cdots(म-न+२)}{\lfloor न(म+१)}\int कोज्या^{न}षताष$$

२१ । सिद्ध करो कि यदि $लाय = ला$ और $\int\{लाय\}^{न}य^{म}ताय = च_{न,म}$

$$\text{तो}\quad च_{न,म} = ला^{न}\frac{य^{म+१}}{म+१}-\frac{न}{म+१}च_{न-१,म}$$

२२ । सिद्ध करो कि

$$\int य^{म}\{लाय\}^{२}ताय = \frac{य^{म+१}}{म+१}\left\{(लाय)^{२}-\frac{२}{म+१}लाय+\frac{२}{(म+१)^{२}}\right\}$$

२३ । सिद्ध करो कि

$$\int\{लाय\}^{४}य^{७}ताय = \frac{(लाय)^{४}य^{८}}{८}-\frac{४(लाय)^{३}य^{८}}{८^{२}}+\frac{४.३(लाय)^{२}य^{८}}{८^{३}}$$

$$-\frac{४.३.२लायय^{८}}{८^{४}}+\frac{४.३.२य^{८}}{८^{५}}$$

२४ । सिद्ध करो कि

$$\int\frac{ज्या^{म}य}{कोज्या^{न}य}ताय = \frac{ज्या^{म-१}य}{(न-१)कोज्या^{न-१}य}-\frac{म-१}{न-१}\int\frac{ज्या^{म-२}य}{कोज्या^{न-२}य}ताय$$

२५ । सिद्ध करो कि यदि य = २ष तो

$$\int\frac{ज्या^{म}य}{(१+कोज्याय)^{न}}ताय = २^{म-न+१}\int\frac{ज्या^{म}षताष}{कोज्या^{२न-म}ष}$$

२६ । सिद्ध करो कि

$$\int \frac{\text{इ}^{\text{मय}}}{\text{य}^{\text{न}}}\,\text{ताय} = -\frac{\text{इ}^{\text{मय}}}{(\text{न}-१)\text{य}^{\text{न}-१}} + \frac{\text{म}}{\text{न}-१}\int \frac{\text{इ}^{\text{मय}}}{\text{य}^{\text{न}-१}}\,\text{ताय} ।$$

२७ । सिद्ध करो कि

$$\int \frac{\text{इ}^{\text{मय}}}{\text{य}}\,\text{ताय} = \text{लाय} + \text{मय} + \frac{\text{म}^२\text{य}^२}{२\underline{|२}} + \frac{\text{म}^३\text{य}^३}{३\underline{|३}} + \frac{\text{म}^४\text{य}^४}{४\underline{|४}}$$

२८ । $\int_{०}^{२\text{अ}} ४\sqrt{(२\text{अय}-\text{य}^२)}\,\text{उज्या}^{-१}\frac{\text{य}}{\text{अ}}\,\text{ताय} = \text{अ}^२\pi^२$ इसे सिद्ध करो

२९ । $\int_{०}^{\text{अ}} १६\sqrt{\text{अ}^२-\text{य}^२}\,\text{कोज्या}^{-१}\frac{\text{य}}{\text{अ}}\,\text{ताय} = \text{अ}^२(४+\pi^२)$ इसे सिद्ध करो

३० । सिद्ध करो कि

$$\text{स्प}^{२\text{न}+१}\text{प}\,\text{ताप} = \frac{\text{स्प}^{२\text{न}}\text{प}}{२\text{न}} - \frac{\text{स्प}^{२\text{न}-४}\text{प}}{२\text{न}-४} + \frac{\text{स्प}^{२\text{न}-६}\text{प}}{२\text{न}-६} - \frac{\text{स्प}^{२\text{न}-८}\text{प}}{२\text{न}-८}$$

$$+ \cdots\cdots + (-१)^{\text{न}+१}\,\text{ला}\,\{\text{कोज्याप}\}$$

३१ । सिद्ध करो कि

$$\int_{०}^{\frac{\pi}{४}} \text{स्प}^{६}\text{प}\,\text{ताप} = \frac{१}{२}\left\{\text{ला}\,(२) - \frac{७}{१२}\right\}$$

३२ । सिद्ध करो कि

$$\int \frac{\text{ज्या}^३\text{यताय}}{१+\text{गकोज्याय}} = \frac{\text{कोज्या}^२\text{य}}{२\text{ग}} - \frac{\text{कोज्याय}}{\text{ग}^२} - \frac{\text{ग}^२-१}{\text{ग}^३}\,\text{ला}\,(१+\text{ग कोज्याय})$$

३३ । सिद्ध करो कि

$$\int_{०}^{१} \text{य}^{\text{म}}\left\{\text{लाय}\right\}^२\text{ताय} = \frac{२}{(\text{म}+१)^३}$$

३४ । सिद्ध करो कि

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \frac{२\,\text{ग}^३\text{ज्या}^३\text{य ताय}}{१+\text{गकोज्याय}} = (\text{ग}^२-१)\,\text{ला}\,(१+\text{ग})^२ + \text{ग}\,(२-\text{ग})$$

३५ । सिद्ध करो कि

$$\int (\text{न}+१)(\text{अ}^२+\text{य}^२)^{\frac{\text{न}}{२}}\text{ताय}=\text{य}(\text{अ}^२+\text{य}^२)^{\frac{\text{न}}{२}}+\text{नअ}^२\int(\text{अ}^२+\text{य}^२)^{\frac{\text{न}}{२}-१}\text{ताय}$$

३६ । एक लड़का गङ्गा जी के किनारे अ विन्दु पर खड़ा था। उसने ठीक अपने सामने एक मनोहर फूल को जो कि धारा में बहता हुआ चला जाता था देख कर अपने स्थान से गङ्गा में कूद तैर कर फूल लेने के लिये चला । प्रतिक्षण में फूल के बहने के प्रमाण को फूल और अ विन्दु के अन्तर वर्ग से गुणने से जो गुणन फल हो उतना प्रतिक्षण में लड़के के तैरने का प्रमाण है तो बतावो कि जिस समय अ विन्दु के सामने से धारा में वह फूल ६ हाथ बह गया उस समय अ विन्दु से लड़का कितना तैर कर गया होगा । इस प्रश्न में इतना हम जानते हैं कि अ विन्दु से धारा का अन्तर १५ हाथ है। उ० २२६८

इति तृतीयाध्याय ।

चतुर्थाध्याय।

प्रकीर्णक ।

३८। कल्पना करो कि

(१) फ(य)=य तो

फ(अ) =अ, फ(अ+च) =अ+च, फ(अ+२च) =अ+२च +......
इस लिये

च फ(अ)+च फ(अ+च) +च फ(अ+२च) + ... च फ(अ+न च)

$= च\{अ+(अ+च) +(अ+२ च) +.... (अ+न च)\}$

$=च\{अ(न+१) +च(१+२+३+...न) \}—च\{अ(न+१) + \frac{चन}{२}(न+१)\}$

$=च(न+१)(\frac{२अ+नच}{२})=(अ+अ+नच) \frac{च(न+१)}{२}=\frac{च(न+१)}{२}(अ+क)........(१)$

यदि अ+न च =क परन्तु यदि अ+न च=क तो $च=\frac{क-अ}{न}$ इस का उत्थापन देने से (१) का

मान = $\frac{क-अ}{२}(१+\frac{१}{न})(अ+क)$ इस में यदि च= ० वा न= $\frac{१}{०}$ तो

इस का मान = $\frac{क^२—अ^२}{२}$ यह सिद्ध हुआ ।

परन्तु जब फ(य)=य $\therefore \int$फ(य) ताय=$\int$यताय=$\frac{य^२}{२}$

इस लिये $\int_{अ}^{क}$ फ(य)ताय= $\frac{क^२—अ^२}{२}$ (२) प्रक्रम देखो

(२) फ(य) =$य^२$ तो

च फ(अ) +च फ(अ+च) +च फ(अ+२च) +.... चफ(अ+नच)

$= च अ^२+च (अ+च)^२ +.... च (अ+नच)^२$

$=च \{अ^२+(अ^२+२ अच+च^२) +.... (अ^२+२ अनच+न^२च^२)\}$

$=च \{अ^२(न+१)+२अच (१+२+३+..न)+च^२ (१^२+२^२+३^२+...+न^२)\}$

$$= च \left\{ अ^2(न+१) + अचन(न+१) + \frac{च^2 न(न+१)}{२} \cdot \frac{(२न+१)}{३} \right\}$$

$$= च(न+१) \left\{ अ^2 + अचन + च^2 न \frac{२न+१}{६} \right\}$$

$$= (क-अ)(१+\frac{१}{न}) \left\{ अ^2 + कअ - अ^2 + (क-अ)\left(\frac{क-अ}{न}\right)\left(\frac{२न+१}{६}\right) \right\}$$

$$= (क-अ)(१+\frac{१}{न}) \left\{ कअ + (क+अ)^2 (\frac{१}{३} + \frac{१}{६न}) \right\}$$

$$= (क-अ) \left\{ कअ + \frac{(क-अ)^2}{३} \right\} = (क-अ) \left\{ \frac{क^2 + कअ + अ^2}{३} \right\} = \frac{क^3 - अ^3}{३}$$

परन्तु $फ(य) = य^2 \therefore \int फ(य) ताय = \int य^2 ताय = \frac{य^3}{३}$

इस लिये $\int_{अ}^{क} फ(य)\, ताय = \frac{क^3 - अ^3}{३}$, इस तरह से (२) प्रक्रम की परिभाषा से स्वतन्त्रराशि के दो मानों के भीतर का चलानयन बीजगणित की युक्ति से श्रेढियों के योग पर से कर सक्ते हैं। परन्तु जहां श्रेढियों के योग करने की रीति नहीं जानी जाती वहां इस रीति से सान्तचल का मान जानना कठिन है।

जैसे यदि $फ(य) = लाय$ तो

$$चफ(अ) + चफ(अ+च) + चफ(अ+२च) + चफ(अ+३च) + \dots + चफ\{अ+च(न-१)\}$$

$$= च[ला(अ) + ला(अ+च) + ला(अ+२च) + ला(अ+३च) + \dots + ला\{अ+च(न-१)\}]$$

यहां हम लोग अब लाचार हैं कि कैसे इस श्रेढी का योग करें परन्तु जब (२) प्रक्रम से स्पष्ट है कि इस श्रेढी का योग अवश्य

$\int_{अ}^{क} फ(य) ताय = \int_{अ}^{क} ला(य)\, ताय$ यह होगा। इसलिये ऐसे ऐसे स्थानों में सान्तचलानयन से श्रेढी के योग का पता लग सक्ता है।

जैसे इसी स्थान में जब प्रसिद्ध है कि $\int लाय\ ताय = यलाय - य$ तब

$\int_{अ}^{क}$ लायताय=ला $\left(\frac{क^{क}}{अ^{अ}}\right)$ —(क—अ)यही ऊपर के श्रेढी का योग होगा।

३६। इस प्रक्रम में ऊपर के प्रक्रम को अच्छी तरह से समझने के लिये कुछ उदाहरण दिखाते हैं।

(१) $\frac{१}{\sqrt{१—य^{२}}}$ = फ(य) इस में श्रेढी के योग पर से $\int_{0}^{१}\frac{ताय}{\sqrt{१—य^{२}}}$

इसका मान जानना है यहां, च फ(0)+चफ(च)+चफ(२च)+चफ (३च) +⋯+चफ(१)

$$=\left\{\frac{च}{१}+\frac{च}{\sqrt{१—च^{२}}}+\frac{च}{\sqrt{१—४च^{२}}}+\frac{च}{\sqrt{१—९च^{२}}}+\cdots+\frac{च}{\sqrt{१—१^{२}}}\right\}$$

$$=\frac{१}{\frac{१}{च}}+\frac{१}{\sqrt{\frac{१}{च^{२}}-१}}+\frac{१}{\sqrt{\frac{१}{च^{२}}-४}}+\frac{१}{\sqrt{\frac{१}{च^{२}}-९}}+\cdots\cdot$$

$\frac{१}{न}+\frac{१}{\sqrt{न^{२}—१}}+\frac{१}{\sqrt{न^{२}—४}}+\frac{१}{\sqrt{न^{२}—९}}+\cdots\cdot$ क्योंकि यहां नच=१ ∴ च=$\frac{१}{न}$

परंतु चलज्ञान से $\int_{0}^{१}\frac{ताय}{\sqrt{१—य^{२}}}=\frac{\pi}{२}$

इस लिये यदि न का मान अनन्त हो तो

$\int_{0}^{१}\frac{ताय}{\sqrt{१-य^{२}}}=\frac{\pi}{२}=\frac{१}{न}+\frac{१}{\sqrt{न^{२}—१}}+\frac{१}{\sqrt{न^{२}—४}}+\frac{१}{\sqrt{न^{२}—९}}+\cdots$ यह सिद्ध हुआ

(२) $\int_{0}^{१}\frac{ताय}{१+य^{२}}$ इसका मान श्रेढी में जानना है।

(२) प्रक्रम से

$$\int_{0}^{१}\frac{ताय}{१+य^{२}}=\frac{च}{१}+\frac{च}{१+च^{२}}+\frac{च}{१+४च^{२}}+\frac{च}{१+९च^{२}}+\cdots+\frac{च}{१+१^{२}}$$

$$= \frac{१}{न}\left\{ १ + \frac{१}{१+(\frac{१}{न})^२} + \frac{१}{१+(\frac{२}{न})^२} + \frac{१}{१+(\frac{३}{न})^२} + \cdots \right\}$$

परन्तु चलानयन के प्रकार से $\int_0^१ \frac{ताय}{१+य^२} = \frac{\pi}{२}$, इस लिये यदि ऊपर की

श्रेढी में न अनन्त हो तो श्रेढी का योग $\frac{\pi}{२}$ होगा।

(३) $च[ज्याअ+ज्या(अ+च)+ज्या(अ+२च)+\cdots+ज्या\{अ+(न-१)च\}]$
इस में यदि न का मान अनन्त हो तो श्रेढी के योग का मान जानना है।
यहां त्रिकोणमिति की रीति से ऊपर के श्रेढी का योग

$$= \frac{च ज्या(अ+\frac{न-१}{२}च) ज्या\frac{नच}{२}}{ज्या\frac{च}{२}} = \frac{च ज्या(अ+\frac{क-अ}{२}-\frac{च}{२}) ज्या\frac{क-अ}{२}}{ज्या\frac{च}{२}}, यदि\ अ+नच=क$$

अब यहां यदि च=० तो $\frac{च}{ज्या\frac{च}{२}} = २\frac{\frac{च}{२}}{ज्या\frac{च}{२}} = २$ इस लिये श्रेढी का योग

$२ज्या\frac{क+अ}{२}ज्या\frac{क-अ}{२} = कोज्याअ - कोज्याक = \int_अ^क ज्यायताय$ यह सिद्ध हुआ।

इसी श्रेढी में यदि न के स्थान में न+१ का उत्थापन दें तो श्रेढी का योग

$$= चज्या(अ+\frac{नच}{२})ज्या\frac{न+१}{२}च \div ज्या\frac{च}{२} = \frac{२च}{ज्या\frac{च}{२}}ज्या(अ+\frac{क-अ}{२})ज्या\left[\frac{क-अ}{२}+\frac{च}{२}\right]$$

$= २ज्या(\frac{क+अ}{२})ज्या\frac{क-अ}{२} = कोज्याअ - कोज्याक$, यदि च=०
इस लिये श्रेढी में यदि एक पद बढ़ भी जाय तो भी योग वही रहेगा।

४०। २ प्रक्रम से और ३९ प्रक्रम के उदाहरणों से स्पष्ट होता है कि
$\int_अ^क फ(य)ताय$ यह $च_१फ(अ)+च_२फ(य_१)+\cdots+च_नफ(य_{न-१})$ इस श्रेढी के योग तुल्य है यदि श्रेढी में न का मान अनन्त कल्पना किया जाय जहां $च_२=य_१-अ_१=०$, $च_३=य_२-य_१,=०$, ⋯और $य_{न-१}=क-च_न$
मानो कि अ, क के भीतर फ(य) के जितने मान हैं वे सब उत्तरोत्तर घटते वा बढ़ते हैं और उन में सब से बड़ा आ और सब से छोटा का है तो सब फलों के स्थान में आ और का का उत्थापन देने से $आ(च_१+च_२+च_३+\cdots+च^न)$

यह पहली श्रेढी से बड़ा होगा और का $(च_1+च_2+च_3+\cdots+च_न)$ यह छोटा॥ परन्तु $च_न+च_2+\cdots+च_न=क-अ$ इस लिये ऊपर के श्रेढी का मान आ (क—अ) और का (क—अ) के बीच में होगा।

इस लिये निश्चय है कि श्रेढी का मान (क—अ)गा इसके तुल्य होगा जहां गा एक ऐसी संख्या है जिसका मान आ और का के बीच में है। परंतु फ(य)को घटते वा बढ़ते माना है इस लिये अवश्य कोई य के मान में यह गा के तुल्य होगा। माना कि $गा=फ\{अ+प(क-अ)\}$ जहां प कोई रूपाल्प संख्या है

इस लिये श्रेढी का योग $=\int_{अ}^{क}फ(य)ताय=(क-अ)\ फ\{अ+प(क-अ)\}$ इसी प्रकार फ(य) फा(य)ताय इसमें फ(य) तो पहले ही के ऐसा समझो और वैसाही फा(य) को भी समझो तो पूर्व ही की रीति से

$$\int_{अ}^{क}फ(य)फा(य)ताय=च_1फ(अ)फा(अ)+च_2फ(य_1)\ फा(य_1)+\cdots+ च_नफ(य_{न-1})फा(य_{न-1})$$

यहां भी पूर्वही की रीति से सिद्ध कर सक्ते हो कि यह श्रेढी आ$\{च_1फा(अ)+च_2फा(य_1)+च_3फा(य_2)+\cdots+च_नफा(य_{न-1})\}$ इस से छोटी और का$\{च_1फा(अ)+च_2फा(य_1)+च_3\ फा(य_2)+\cdots च_नफा(य_{न-1})\}$ इस से बड़ी होगी

इस लिये यहां भी मानो कि फ(य) के गा मान में वास्तव श्रेढी का योग$=गा\{च_1फा(अ)+च_2फा(य_1)+च_3फा(य_2)+\cdots+च_नफा(य_{न-1})\}$

$$=गा\int_{अ}^{क}फा(य)ताय=फ\{अ+प(क-अ)\}\ \int_{अ}^{क}फा(य)ताय$$

$$=\int_{अ}^{क}फ(य)फा(य)ताय \text{ यह सिद्ध होता है}$$

यहां इसका कुछ नियम नहीं कि $\int_{अ}^{क}फ(य)ताय$ इसके मान में जो $फ\{अ+प(क-अ)\}$ इसमें प है वही $\int_{अ}^{क}फ(य)फा(य)ताय$ इसके मान में भी हो इतना अवश्य नियम है कि ऐसे स्थानों में प सर्वत्र रूपाल्प संख्या है।

४१। सान्तचलानयन से स्पष्ट है कि यदि $\int फ(य)ताय=फा(य)$ तो

$$\int_{अ}^{ग}फ(य)ताय=फा(ग)-फा(अ)$$

$$\int_{ग}^{क}फ(य)ताय=फा(क)-फा(ग)$$

इस लिये $\int_{अ}^{ग}$ फ(य)ताय $+ \int_{ग}^{क}$ फ(य) ताय $=$ फा(क)

$$-\text{फा(अ)} = \int_{अ}^{क} \text{फ(य) ताय}, \quad \cdots\cdots\cdots (१)$$

इसी प्रकार यह भी सिद्ध कर सक्ते हो कि

$$\int_{अ}^{क} \text{फ(य)ताय} = -\int_{क}^{अ} \text{फ(य)ताय} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (२)$$

यदि $\int$फ(य)ताय इस में य के स्थान में अ—ल इस का उत्थापन दें तो अ—ल=य ∴ अ — य = ल, — ताय = ताल,

इस लिये $\int$फ(अ—य)ताय $= -\int$फ(ल)ताल

और $\int_{अ}^{क}$(अ—य) ताय $= -\int_{०}^{अ-क}$ फ(ल)ताल $= \int_{अ-क}^{०}$ फ(ल)ताल, (२) से

मानो कि $\int$फ(ल)ताल=फा(ल) इस लिये

$$\int_{अ}^{क} \text{फ(ल)ताल} = \text{फा(क)} - \text{फा(अ)} = \int_{अ}^{क} \text{फ(य)ताय}$$

इस लिये $\int_{अ}^{क}$ (अ—य)ताय $= \int_{अ-क}^{०}$ फ(य)ताय $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (३)

(३) में मानो कि क=0 तो $\int_{अ}^{०}$ फ(अ—य) $= \int_{अ}^{०}$ फ(य)ताय

इस लिये (२) से $\int_{०}^{अ}$ फ(अ—य)ताय $= \int_{०}^{अ}$ फ(य)ताय $\cdots\cdots$ (४)

इसी प्रकार यदि य=२ अ—र तो ताय= —तार और र=२ अ—य

इस लिये $\int$ फ(य)ताय $= -\int$ फ(२ अ—र) तार

और $\int_{अ}^{२अ}$ फ(य)ताय $= -\int_{अ}^{०}$ फ(२अ-र)तार $= \int_{०}^{अ}$ फ(२अ-र)तार

परन्तु (३) की युक्ति से $\int_{०}^{अ}$ फ(२अ—र)तार $= \int_{०}^{अ}$ फ(२अ—य) ताय

इस लिये $\int_{अ}^{२अ}$ फ(य)ताय $= \int_{०}^{अ}$ फ(२अ—य)ताय

और (१) से $\int_{०}^{२अ}$ फ(य)ताय $= \int_{०}^{अ}$ फ(य) ताय $+ \int_{अ}^{२अ}$ फ(य)ताय

इस लिये $\int_{०}^{२अ}$फ(य)ताय $= \int_{०}^{अ}$फ(य)ताय $+ \int_{०}^{अ}$फ(२अ—य) $\cdots\cdots$ (५)

(५) वें में यदि य के 0 और अ के बीच सब मानें में फ(य)=फ(२अ—य)

तो $\int_{०}^{२अ}$ फ(य) ताय $= २\int_{०}^{अ}$ फ(य) ताय $\cdots\cdots\cdots$ (६)

और यदि य के 0 और अ के बीच सब मानें में— फ(य)=फ(२अ—य)

तो $\int_{०}^{२अ}$ फ(य)ताय $= 0$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (७)

जैसे यदि $फ(य)=ज्या^{म}य$ तो $फ(\pi-य)=ज्या^{म}(\pi-य)=ज्या^{म}य$ त्रिकोणमिति से

इस लिये $\int_{0}^{२अ} फ(य)ताय=\int_{0}^{\pi} फ(य)ताय=२\int_{0}^{अ} फ(य)ताय$

$=२\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} ज्या^{म}य\, ताय = \int_{0}^{\pi} ज्या^{म}य\, ताय$ ....(६) से

और जब त्रिकोणमिति से स्पष्ट है कि $कोज्याय=-कोज्या(\pi-य)$ इस लिये यदि म विषम संख्या हो और $फ(य)=कोज्या^{म}य$ तो ७ से सिद्ध कर सक्ते हो कि $\int_{0}^{२अ} फ(य)ताय\ \int_{0}^{\pi} कोज्या^{म}यताय=0$

(२) प्रक्रम से यदि $\int_{0}^{\pi} ज्या^{म}यताय$ इस का मान श्रेढी में लाओ तो $च\{ज्या^{म}च+ज्या^{म}२च+ज्या^{म}३च+\cdots+ज्या^{म}(न-१)च\}$ ऐसा होगा जहां $नच=\pi$

यहां स्पष्ट देख पड़ता है कि $ज्या^{म}च=ज्या^{म}(न-१)च=ज्या^{म}(\pi-च)=ज्या^{म}च$, $ज्या^{म}२च=ज्या^{म}(न-२)च=ज्या^{म}(\pi-२च)=ज्या^{म}२च$, इसी तरह और भी दिखा सक्ते हो कि दो दो पद तुल्य आवेंगे इस लिये इस पर से भी

सिद्ध कर सक्ते हो कि $\int_{0}^{\pi} ज्या^{म}यताय=२\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} ज्या^{म}यताय$ ।

इसी तरह से यह भी सिद्ध कर सक्ते हो कि $\int_{0}^{\pi} कोज्या^{म}यताय=0$ यदि म विषम हो

यदि अ से क बड़ा हो और य के अ और क के बीच किसी मान में फ(य) सर्वदा धनात्मक हो तो स्पष्ट है कि $\int_{अ}^{क}फ(य)ताय$ इसका मान जो (२) प्रक्रम से श्रेढी में आता है उस में प्रत्येक पद धनात्मक ही होंगे इस लिये श्रेढी का योग अर्थात् $\int_{अ}^{क}फ(य)ताय$ यह सर्वदा धनात्मक ही होगा ।

४२ । ऊपर के प्रक्रमों में सान्तचल के लिये जो कुछ वर्णन किया गया है वह सब तभी ठीक दिखा सक्ते हो जब फल अर्थात् जिस का चल ज्ञान करना है, अ और क के बीच स्वतन्त्रराशि के मानों में सान्त हो और यदि अ, और क के बीच किसी स्वतन्त्रराशि के मान में फल अनन्त के तुल्य हो तो ऊपर की विधि से अर्थात् श्रेढी की विधि से

सिद्ध होता है कि सान्तचल ज्ञान नहीं हो सक्ता। ऐसी स्थिति में अवश्य परीक्षा करनी चाहिये।

जैसे चलानयन से सिद्ध है कि $\int \frac{\text{ताय}}{(१-\text{य})^{२}} = \frac{१}{१-\text{य}}$ इस लिये

$$\int_{0}^{२} \frac{\text{ताय}}{(१-\text{य})^{२}} = \frac{१}{१-२} - \frac{१}{१-0} = -१-१ = -२ \text{ यह मान आया}$$

परन्तु $\int_{0}^{२} \frac{\text{ताय}}{(१-\text{य})^{२}}$ इस का मान यदि (२) प्रक्रम से श्रेढी में ले आवो

तो $\text{च} \left\{ \frac{१}{(१-0)^{२}} + \frac{१}{(१-\text{च})^{२}} + \cdots \right\}$ ऐसा होगा।

इस में स्पष्ट है कि प्रत्येक पद धनात्मक हैं इस लिये श्रेढी का योग अर्थात् $\int_{0}^{२} \frac{\text{ताय}}{(१-\text{य})^{२}}$ यह घनात्मक ही होगा। इस कारण पहले सान्तचलानयन से −२ यह मान सिद्ध हुआ अशुद्ध ठहरा। यहां 0 और २ के बीच य का मान १ के तुल्य मानो तो $\frac{१}{१-\text{य}^{२}}$ यह अनन्त के तुल्य होता है।

इसी प्रकार $\int_{0}^{\text{अ}} \frac{\text{ताय}}{\sqrt{१-\text{य}}} = २-२\sqrt{१-\text{अ}}$ यह सान्तचलानयन से सिद्ध होता है परन्तु यहां यदि य=१ तो $\frac{१}{\sqrt{१-\text{य}}}$ यह अनन्त के तुल्य होता है। इस लिये यहां ऐसा कहना पड़ेगा कि $\int_{0}^{\text{अ}} \frac{\text{ताय}}{\sqrt{१-\text{य}}}$ इसका मान सान्त होगा यदि अ $<$ १ हो तो। और अ का मान जैसा जैसा १ के पास होता जायगा तैसा तैसा $\int_{0}^{\text{अ}} \frac{\text{ताय}}{\sqrt{१-\text{य}}}$ यह २ के पास पास आवेगा।

४३ । (२) प्रक्रम में $\int_{\text{अ}}^{\text{क}}$ फ(य)ताय इस के मान में क, और अ दोनों को जो फ(य) के ऐसा सान्त कल्पना किया है वह सर्वदा ठीक नहीं कभी एक कभी दोनों विशेष स्थल में अनन्त के भी समान हो सक्ते हैं।

जैसे $\int \frac{\text{ताय}}{१+\text{य}^२} = \text{स्प}^{-१}\text{य}$ इस लिये $\int_{०}^{\text{अ}} \frac{\text{ताय}}{१+\text{य}^२} = \text{स्प}^{-१}\text{अ}$ यहां स्पष्ट है कि ज्यों ज्यों अ का मान बढ़ता जायगा त्यों त्यों $\text{स्प}^{-१}$ अ का मान $\frac{\pi}{२}$ के पास पास होगा इस लिये यदि अ $= \infty$ तो $\text{स्प}^{-१}\text{अ} = \frac{\pi}{२}$ ऐसा होगा इस लिये $\int_{०}^{\infty} \frac{\text{ताय}}{१+\text{य}^२} = \frac{\pi}{२}$ यह सिद्ध हुआ।

इसी प्रकार $\int \frac{\text{ताय}}{१+\text{य}} = \text{ला}\ (१+\text{य})$

इस लिये $\int_{०}^{\text{अ}} \frac{\text{ताय}}{१+\text{य}} = \text{ला}\ (१+\text{अ})$ यहां भी स्पष्ट है कि ज्यों ज्यों अ का मान बढ़ेगा त्यों त्यों ला (१+अ) का भी मान बढ़ेगा इस लिये यदि अ $= \infty$ तो ला (१+अ) $= \infty \therefore \int_{०}^{\infty} \frac{\text{ताय}}{१+\text{य}} = \infty$ यह सिद्ध होता है।

४४ । कल्पना करो कि फ(य) का मान अनन्त होता है यदि य = ग जहां ग, अ और क के बीच में है तो (४२) प्रक्रम से स्पष्ट है कि यहां $\int_{\text{अ}}^{\text{क}}$ फ(य) ताय इसका मान साधारण सान्त चलानयन से ठीक नहीं आवेगा इस लिये पहले यहां $\int_{\text{अ}}^{\text{ग}-\text{इ}_१}$ फ(य)ताय $+ \int_{\text{ग}+\text{इ}_१}^{\text{क}}$ फ(य) ताय इस का मान ले आवो इस में $\text{इ}_१$ का मान शून्य मानने से (४१) प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$\int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ(य)ताय} = \int_{\text{अ}}^{\text{ग}-\text{इ}_१} \text{फ(य)ताय} + \int_{\text{ग}+\text{इ}_१}^{\text{क}} \text{फ(य)ताय}$$

यह सिद्ध हो जायगा।

जैसे यदि फ(य) $= \frac{१}{\text{ग}-\text{य}}$ तो $\int$ फ(य)ताय $= -$ ला (ग−य)

इस लिये $\int_{अ}^{ग-इ_1}$ फ(य)ताय $= -$ला$\{ग-(ग-इ_1)\}$

$-\{-$ला$(ग-अ)\} = $ ला $\dfrac{ग-अ}{इ_1}$

इसी तरह $\int_{ग+इ_1}^{क}$ फ(य)ताय$=\int_{ग+इ_1}^{क}\dfrac{ताय}{ग-य} = -\int_{ग+इ_1}^{क}\dfrac{ताय}{य-ग}$

$= -\int$ला $\dfrac{क-ग}{इ_1}$ इस लिये दोनों का योग = ला $\dfrac{ग-अ}{इ_1}$ — ला $\dfrac{क-ग}{इ_1}$

= ला $\dfrac{ग-अ}{क-ग} = \int_{अ}^{क}\dfrac{ताय}{ग-य}$ क्योंकि यहां $इ_1 = 0$ मानने से भी ला $\dfrac{ग-अ}{क-ग}$

में कुछ विकार न होगा।

ऐसे मान को कयासी (Cauchy) साहब ने $\int_{अ}^{क}$ फ(य)ताय इसका मुख्य मान यह नाम रक्खा है।

४२। $\int\dfrac{ताय}{अ^2+य^2}$ इस का मान सिद्ध है कि $\frac{1}{अ}$ स्प$^{-1}\frac{य}{अ}$ यह होगा

इस लिये $\int$ यहां यदि य= स्पष तो ताय = छे^{2}षताष तब

$$\int\frac{ताय}{अ^2+य^2} = \int\frac{छे^2षताष}{अ^2+स्प^2ष} = \frac{1}{अ}स्प^{-1}\left\{\frac{स्पष}{अ}\right\}$$

यहां यदि ष = ० औ π हो तो $\int_{0}^{\pi}\dfrac{छे^2षताष}{अ^2+स्प^2ष}$ इस का मान

$$\frac{1}{अ}स्प^{-1}\left(\frac{स्प\pi}{अ}\right)-\frac{1}{अ}स्प^{-1}\left(\frac{स्प0}{अ}\right) = स्प^{-1}(0) - स्प^{-1}(0)$$

देखो यहां दोनों खण्डों का रूप एक ही है इस लिये बहुधा भ्रान्ति से जो लोग कि सान्तचलानयन में निपुण नहीं हैं दोनों मानों को समान मान उत्तर शून्य के तुल्य कहेंगे जो कि वास्तव में अशुद्ध है क्योंकि यदि सान्तचल का रूप (२) प्रक्रम से श्रेढ़ी में ले आवो तो

$$\frac{\text{च}}{\text{अ}^2}+\frac{\text{चछे}^2\text{च}}{\text{अ}^2+\text{स्प}^2\text{च}}+\frac{\text{चछे}^2 2\text{च}}{\text{अ}^2+\text{स्प}^2 2\text{च}}+\cdots\frac{\text{चछे}^2(\text{न}-1)\text{च}}{\text{अ}^2+\text{स्प}^2(\text{न}-1)\text{च}}$$

यह होगा जिस में स्पष्ट है कि प्रत्येक पद धन हैं इस लिये श्रेढ़ी का योग अर्थात् $\int_0^\pi \frac{\text{छे}^2\text{पताप}}{\text{अ}^2+\text{स्प}^2\text{प}}$ यह कोई धनात्मक संख्या है । यही ४१वें प्रक्रम के अन्त्य वाक्य से भी सिद्ध कर सक्ते हो कि यहां सान्त चल का मान अवश्य धनात्मक संख्या होगी ।

इस लिये यहां पर विचार करना चाहिये कि वास्तव में प के 0 और π मान में $\text{स्प}^{-1}\left(\frac{\text{स्पप}}{\text{अ}}\right)$ का क्या मान होगा । कल्पना करो कि 0, प_1, प_2 प_3, $\cdots$ $\text{प}_\text{न}$, π यह एक श्रेढ़ी है जहां उत्तरोत्तर अधिक पद हैं और $\frac{\text{छे}^2\text{प}}{\text{अ}^2+\text{स्प}^2\text{प}}=\text{र}$ तो (४१) वें प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$\int_0^\pi\frac{\text{छे}^2\text{पताप}}{\text{अ}^2+\text{स्प}^2\text{प}}=\int_0^\pi\text{रताप}=\int_0^{\text{प}_1}\text{रताप}+\int_{\text{प}_1}^{\text{प}_2}\text{रताप}+\int_{\text{प}_2}^{\text{प}_3}\text{रताप}+\cdots$$

$$+\int_{\text{प}_{\text{न}-1}}^{\text{प}_\text{न}}\text{रताप}+\int_{\text{प}_\text{न}}^{\pi}\text{रताप}$$

यहां स्पष्ट है कि न का मान अधिक करने से $\text{प}_\text{दू}$ और $\text{प}_{\text{दू}+1}$ के अन्तर को चाहे जितना छोटा कर सक्ते हो इस लिये

$$\int_{\text{प}_\text{दू}}^{\text{प}_{\text{दू}+1}}\text{रताप}=\text{स्प}^{-1}\left[\frac{\text{स्पप}_{\text{दू}+1}}{\text{अ}}\right]-\text{स्प}^{-1}\left[\frac{\text{स्पप}_\text{दू}}{\text{अ}}\right]$$ यह अवश्य शून्य

के तुल्य हो सक्ता है यदि $\text{प}_{\text{दू}+1}-\text{प}_\text{दू}=0$

इस पर से सिद्ध होता है कि ज्यों ज्यों प का मान बढ़ेगा त्यों त्यों $\text{स्प}^{-1}\left(\frac{\text{स्पप}}{\text{अ}}\right)$ इस का भी मान बढ़ता जायगा इस लिये प के 0 मान से π मान तक एक वार यह भी बढ़ कर $\frac{\text{न}\pi}{2}$ इस मान के पार हो जायगा। जहां न कोई विषम संख्या है इस लिये यदि प के शून्य मान में

$स्प^{-१}\left(\frac{स्पष}{अ}\right)$ इस का मान नπ माने तो ष के π मान में $स्प^{-१}\left(\frac{स्पष}{अ}\right)$ इस का मान $(न+१)\pi$ अवश्य मानना पड़ेगा। इस लिये

$$\int_0^{\pi}\frac{छे^२ षताष}{अ^२+स्प^२ष}$$

$$=\frac{१}{अ}\left\{स्प^{-१}\left(\frac{स्प\pi}{अ}\right)-स्प^{-१}\left(\frac{स्प०}{अ}\right)\right\}=\frac{१}{अ}\{स्प^{-१}(०)-स्प^{-१}(०)\}$$

$$=\frac{१}{अ}\{(न+१)\pi-न\pi\}=\frac{\pi}{अ}$$ यह सच्चा उत्तर होगा।

अथवा $\frac{१}{अ}स्प^{-१}\left(\frac{स्पष}{अ}\right)$ इस में माना कि $स्प^{-१}\left(\frac{स्पष}{अ}\right)=षा$

$\therefore स्पषा=\frac{१}{अ}स्पष$ अब चलनकलन के (३०४) प्रक्रम के (१) समीकरण से यदि $म=न=\frac{१}{अ}$ और $म=\frac{अ-१}{अ+१}$ तो

$$षा=ष-मज्या२ष+\frac{म^२}{२}ज्या४ष-\frac{म^३}{३}ज्या६ष+\cdots$$ ऐसा होगा

इस का उत्थापन चलमान में देने से

$$\int\frac{छे^२ षताष}{अ^२+स्प^२ष}=\frac{१}{अ}\left(ष-मज्या२ष+\frac{म^२}{२}ज्या४ष-\frac{म^३}{३}ज्या६ष+\cdots\right)$$ ऐसा हुआ

इस में ष का मान शून्य और π माना तो स्पष्ट है कि

$$\int_0^{\pi}\frac{छे^२ षताष}{अ^२+स्प^२ष}=\frac{१}{अ}\left(\pi-मज्या२\pi+\frac{म^२}{२}ज्या४\pi-\frac{म^३}{३}ज्या६\pi+\cdots\right)$$

$$-\frac{१}{अ}\left(०-मज्या०+\frac{म^२}{२}ज्या०-\frac{म^३}{३}ज्या०+\cdots\right)$$

$$=\frac{\pi}{अ}-०=\frac{\pi}{अ}$$ यह बड़े लाघव से सिद्ध हुआ।

पहली क्रिया जो दिखलाई गई है उसे टाडहण्टर (Todhunter) साहब ने अपने चलराशिकलन (Integral Calculus) के ४६वें प्रक्रम में लिखा है। और दूसरी क्रिया से $\frac{१}{अ}स्प^{-१}\frac{स्पष}{अ}$ इस का मान जो दिखलाया है वह मेरी कल्पना है।

इसी प्रकार दोनों सीमाओं के भीतर वास्तव में क्या मान है इसकी परीक्षा के लिये विद्यार्थियों को चाहिये कि बड़ी सावधानी से क्रिया करें क्योंकि ऐसे स्थानों में बहुधा संशयात्मक मान पड़ जाते हैं जिनका ठीक विचार न करने से तुरन्त मान में अशुद्धि हो जाती है।

इस विषय पर एक और उदाहरण दिखाते हैं।

चलानयन से सिद्ध है कि $\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{अ}^2 - \text{य}^2}} = \text{ज्या}^{-1}\frac{\text{य}}{\text{अ}}$, इस लिये

$$\int_{-\text{अ}}^{\text{अ}} \frac{\text{ताय}^{-1}}{\sqrt{\text{अ}^2 - \text{य}^2}} = \text{ज्या}^{-1}(+1) - \text{ज्या}^{-1}(-1)$$ यह संशयात्मक हुआ

क्योंकि त्रिकोणमिति से सिद्ध है कि

$\text{ज्या}\left\{(4\text{म}+1)\frac{\pi}{2}\right\} = +1$ और $\text{ज्या}\left\{(4\text{न}-1)\frac{\pi}{2}\right\} = -1$ जहां म और न कोई अभिन्न संख्या हैं। इस लिये म और न का भिन्न भिन्न मान मानने से अनेक मान आ सकते हैं।

इस संशय को दूर करने के लिये विचारो कि —अ से बढ़ते बढ़ते जब य, + अ के तुल्य होगा तो निश्चय है कि एक बेर शून्य के तुल्य होगा इस लिये $\text{ज्या}^{-1}(-1)$ यह बढ़ते बढ़ते जब $\text{ज्या}^{-1}(+1)$ इस के तुल्य होगा तो अवश्य इस का एक ही मान $\text{ज्या}^{-1}(0)$ यह होगा इस लिये यदि $\text{ज्या}^{-1}(-1)$ का मान $(4\text{न}-1)\frac{\pi}{2}$ यह मानो तो अवश्य $\text{ज्या}^{-1}(0)$ का मान $(4\text{न}-1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$ यह और $\text{ज्या}^{-1}(+1)$ का मान

$(4\text{न}-1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = (4\text{न}-1)\frac{\pi}{2} + \pi$ यह होगा। इस लिये

$\text{ज्या}^{-1}(+1) - \text{ज्या}^{-1}(-1) = (4\text{न}-1)\frac{\pi}{2} + \pi - (4\text{न}-1)\frac{\pi}{2} = \pi$ यह निश्चय मान हुआ। अथवा पहले $\text{ज्या}^{-1}\frac{\text{य}}{\text{अ}}$ इस का मान चलनकलन के (२०) वें प्रक्रम के (३) उदाहरण से श्रेढी के रूप में

$$\text{ज्या}^{-1}\frac{\text{य}}{\text{अ}} = \frac{\text{य}}{\text{अ}} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{\text{य}^3}{3\text{अ}^3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{\text{य}^5}{5\text{अ}^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{\text{य}^7}{7\text{अ}^7} + \cdots$$ यह ले आओ

इस में य = अ, और य = —अ, यह मान कर

$$\text{ज्या}^{-१}(+१)=१+\frac{१}{१.२}\cdot\frac{१}{३}+\frac{१.३}{२.४}\cdot\frac{१}{५}+\cdots$$

$$\text{ज्या}^{-१}(-१)=-१-\frac{१}{१.२}\cdot\frac{१}{३}-\frac{१.३}{२.४}\frac{१}{५}-\cdots=-\text{ज्या}^{-१}(+१)$$ इस लिये

$\text{ज्या}^{-१}(+१)-\text{ज्या}^{-१}(-१)=२\text{ज्या}^{-१}(+१)=२\frac{\pi}{२}=\pi$ यह सिद्ध हुआ परन्तु इस बात का यहां अवश्य ध्यान रखना चाहिये कि ज्या पर से इस श्रेढी द्वारा जो चाप का मान आता है वह सर्वदा $\frac{\pi}{२}$ इस से अल्प इस लिये यहां भी पहले के ऐसा इस एक मान को लेकर बिचार करना चाहिये।

४६। जब ४०वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि

$$\int_{\text{अ}}^{\text{क}}\text{फ(य)ताय}=\text{च}_१\text{फ(अ)}+\text{च}_२\text{फ}(\text{य}_१)+\cdots\cdots+\text{च}_\text{न}\text{फ}(\text{य}_{\text{न}-१})\cdots \quad (१)$$

$$\int_{\text{अ}}^{\text{क}}\text{फा(य)ताय}=\text{च}_१\text{फा(अ)}+\text{च}_२\text{फा}(\text{य}_१)+\cdots\cdots+\text{च}_\text{न}\text{फा}(\text{य}_{\text{न}-१})\cdots \quad (२)$$

और $$\int_{\text{अ}}^{\text{क}}\text{फि(य)ताय}=\text{च}_१\text{फि(अ)}+\text{च}_२\text{फि}(\text{य}_१)+\cdots+\text{च}_\text{न}\text{फि}(\text{य}_{\text{न}-१})\cdots \quad (३)$$

होंगे इस लिये फ(अ), फ($\text{य}_१$), फ($\text{य}_२$), ...फ($\text{य}_{\text{न}-१}$) प्रत्येक क्रम से यदि फा(अ), फ($\text{य}_१$), फा($\text{य}_२$), ...फा($\text{य}_{\text{न}-१}$)

और फि(अ), फि($\text{य}_१$), फि($\text{य}_२$), ...फि($\text{य}_{\text{न}-१}$) इन के प्रत्येक पद के भीतर हों अर्थात् फा(अ) और फि(अ) के बीच में फ(अ), फा($\text{य}_१$) औ फि($\text{य}_१$) के बीचमें फ($\text{य}_१$) इत्यादि हों तो स्पष्ट है कि दूसरे और तीसरे के प्रत्येक पदों के योग अर्थात् $\int_{\text{अ}}^{\text{क}}\text{फा(य)ताय}$ और $\int_{\text{अ}}^{\text{क}}\text{फि(य)ताय}$ के बीच में $\int_{\text{अ}}^{\text{क}}\text{फ(य)ताय}$ यह होगा।

इस पर से यह सिद्ध होता है कि फ(य) यह फा(य) और फि(य) के बीच में हो य के अ और क के बीच किसी मान में तो $\int_{\text{अ}}^{\text{क}}\text{फ(य)ताय}$ यह भी $\int_{\text{अ}}^{\text{क}}\text{फा(य)ताय}$ और $\int_{\text{अ}}^{\text{क}}\text{फि(य)ताय}$ के बीच में होगा। जैसे त्रिकोणमिति से सिद्ध है कि $\text{ज्या}^{२\text{न}+१}\text{य}$ यह सर्वदा $\text{ज्या}^{२\text{न}}\text{य}$ और $\text{ज्या}^{२\text{न}+२}\text{य}$ के बीच में रहता है अर्थात् $\text{ज्या}^{२\text{न}}\text{य}>\text{ज्या}^{२\text{न}+१}\text{य}>\text{ज्या}^{\text{न}२+२}\text{य}$

तो ऊपर के सिद्धान्त से $\int_{0}^{\frac{\pi}{२}}\text{ज्या}^{२\text{न}}\text{यताय}>\int_{0}^{\frac{\pi}{२}}\text{ज्या}^{२\text{न}+१}\text{यताय}$

$> \int_0^{\frac{\pi}{२}}$ ज्या$^{२न+२}$यताय यह होगा

४७ । यदि फ(य), य के स्थान में अ और अ से बड़ी संख्या का उत्था-पन देने से उत्तरोत्तर न्यून होता जाय तो

फ(अ)+फ(अ+१)+फ(अ+२)+…अनन्त…यह श्रेढी और $\int_{अ}^{\infty}$फ(य)ताय यह दोनों सान्त अथवा दोनों अनन्त होंगे ।

क्योंकि (४०)वें प्रक्रम में क=अ+१ ऐसा मानो तो सिद्ध होगा कि

(क—अ)फ(अ)=फ(अ) $> \int_{अ}^{अ+१}$फ(य)ताय $>$ (क—अ)फ(अ+१)=फ(अ+१)

इसी तरह फ(अ+१) $> \int_{अ+१}^{अ+२}$फ(य)ताय $>$ फ(अ+२)

⋮

फ{अ+(न—१)} $> \int_{अ+(न-१)}^{अ+न}$फ(य)ताय $>$ फ(अ+न)

तीनों का योग कर न को अनन्त मानने से (४१)वें प्रक्रम के (१)समीकरण से

फ(अ)+फ(अ+१)+फ(अ+२)+… $> \int_{अ}^{\infty}$फ(य)ताय $<$ फ(अ+१)

+फ(अ+२)+फ(अ+३)+… यह सिद्ध हुआ ।

इस लिये यदि श्रेढ़ी सान्त होगी तो $\int_0^{\infty}$ फ(य)ताय यह सान्त और श्रेढ़ी के अनन्त में अनन्त होगा ।

४८ । यदि लाय=ला, ला{ला(य)}=ला^{२}(य),ला[ला{ला(य)}]=ला^{३}(य) इत्यादि कल्पना करो तो चलनकलन से

$$\frac{\text{ता}}{\text{ताय}}\left[\frac{\{\text{ला}^{द+१}(\text{य})\}^{१-त}}{१—त}\right]=\frac{१}{\text{यला(य)ला}^{२}\text{(य)}\cdots\text{ला}^{द}\text{(य)}\{\text{ला}^{द+१}\text{(य)}\}^{त}}$$

$$\text{इस लिये यदि फ(य)ताय}=\frac{\text{ताय}}{\text{यला(य)ला}^{२}\text{(य)ला}^{३}\text{(य)}\cdots\text{ला}^{द}\text{(य)}\{\text{ला}^{द+१}\text{(य)}\}^{त}}$$

तो $\int$फ(य)ताय$=\frac{\{\text{ला}^{द+१}(\text{य})\}^{१-त}}{१—त}$ यदि त रूप के तुल्य न हो और यदि त रूप के तुल्य हो तो $\int$फ(य)ताय=ला$^{द+२}$(य) होगा ।

और $\int_{\text{अ}}^{\infty}$ फ(य)ताय$= -\dfrac{\{\text{ला}^{\text{द}+1}(\text{अ})\}^{1-\text{त}}}{1-\text{त}}$ यदि त $>$ १ और यदि त$=$१ वा त$<$१ तो $\int_{\text{अ}}^{\infty}$ फ(य)ताय$=\infty$ इस लिये (४७) वें प्रक्रम से

$$\text{फ}(\text{य})=\frac{1}{\text{यला}(\text{य})\text{ला}^{2}(\text{य})\cdots\text{ला}^{\text{द}}(\text{य})\{\text{ला}^{\text{द}+1}(\text{य})\}^{\text{त}}}$$ इस में य के स्थान में अ, अ+१, अ+२, इत्यादि का उत्थापन देने से जो श्रेढ़ी होगी वह सान्त होगी अर्थात् उस के उत्तरोत्तर पास के दो पदों का सम्बन्ध एक से अल्प होता जायगा। चाहे पद की संख्या कितनी ही हो।

४६। कल्पना करो कि जिस में अनन्त पद हैं वैसी एक

$$\frac{1}{\text{फा}(\text{न})}+\frac{1}{\text{फा}(\text{न}+1)}+\frac{1}{\text{फा}(\text{न}+2)}+\frac{1}{\text{फा}(\text{न}+3)}+\cdots\cdots$$ यह श्रेढ़ी है

जिस के किसी एक पद का मान $\dfrac{1}{\text{फा}(\text{य})}$ ऐसा समझो। अब यहां इस बात का पता लगाना है कि इस श्रेढ़ी का मान सान्त होगा वा अनन्त। यदि श्रेढ़ी का मान अनन्त होगा तब तो स्पष्ट ही है कि ज्यों ज्यों य बढ़ता जायगा त्यों त्यों $\frac{1}{\text{फा}(\text{य})}$ भी बढ़ता जायगा। इस लिये यदि श्रेढ़ी का मान सान्त होगा तो निश्चय है कि ज्यों ज्यों य बढ़ता जायगा त्यों त्यों फा(य) भी बढ़ता जायगा।

कल्पना करो कि न से आगे अनन्त तक चाहे जितना य बढ़ता जाय परन्तु $\frac{1}{\text{फा}(\text{य})}$ इस का मान सर्वदा $\dfrac{\text{ग}}{\text{य}^{\text{त}}}$ इस से छोटा है जहां ग और त कोई स्थिर संख्या और त $>$ १ है। ऐसी स्थिति में ४७वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि उद्दिष्ट श्रेढ़ी का मान $\dfrac{\text{ग}}{\text{न}^{\text{त}}}+\dfrac{\text{ग}}{(\text{न}+1)^{\text{त}}}+\dfrac{\text{ग}}{(\text{न}+2)^{\text{त}}}+\cdots$ इस श्रेढ़ी से अल्प होगा इस लिये स्वयं भी सान्त होगा।

यदि $\frac{१}{फा(य)} \angle \frac{ग}{य^{त}}$ ∴ $य^{त} \angle ग\ फा(य)$

और त ला (य)∠ला {गफा(य)} लघुरिक्थ लेने से

इस लिये $त \angle \frac{ला\{गफा(य)\}}{लाय}$ इस में यदि य=∞ तो हर और अंश दोनों अनन्त होते हैं इस लिये चलनकलन के ४वें अध्याय से

$\frac{ला\{गफा(य)\}}{लाय}$ इस का मान $\frac{यफा'(य)}{फा(य)}$ यह होगा। इस लिये इस में य के स्थान में अनन्त का उत्थापन देने से इस लुप्त भिन्न का मान यदि एक से अधिक हो तो त का ऐसा मान मान सक्ते हैं जो कि एक से अधिक अर्थात् सर्वदा $य^{त} \angle ग\ फा(य)$ हो। और इसी तरह यदि लुप्त भिन्न का मान एक से न्यून हो तो त का मान ऐसा छोटा मान सक्ते हैं जिस में सर्वदा $य^{त} 7\ ग\ फा(य)$ हो ऐसी स्थिति में श्रेढ़ी का मान अनन्त होगा।

इस पर से यह सिद्ध होता है कि किसी श्रेढ़ी में यदि य के स्थान में अनन्त का उत्थापन देने से $\frac{यफा'(य)}{(फाय)}$ इस का मान एक से अधिक हो तो श्रेढ़ी का मान सान्त और अल्प हो तो श्रेढ़ी का मान अनन्त होगा।

परन्तु यदि $\frac{यफा'(य)}{फा(य)}$ इस का मान एक के बराबर हो तो (४८)वें प्रक्रम से

$\int फ(य)\, ताय = \frac{गय^{१-त}}{१-त}$ इस लिये $\int_{न}^{\infty} फ(य)\, ताय = \infty$ ऐसी स्थिति में अब यह नहीं कह सक्ते कि उद्दिष्ट श्रेढ़ी का मान सान्त होगा वा अनन्त।

अब मानो कि न से लेकर अनन्त तक य के मान में $\frac{१}{फा(य)}$ यह

$\frac{ग}{य\{लाय\}^{त}}$ इस से छोटा रहता है जहां ग और त स्थिराङ्क और $त 7 १$

तो ४८वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि श्रेढ़ी का मान सान्त होगा। परन्तु

$$\frac{१}{\text{फा}(\text{य})} \angle \frac{\text{ग}}{\text{य}\{\text{लाय}\}^{\text{त}}} \therefore \{\text{ला}(\text{य})\}^{\text{त}} \angle \frac{\text{गफा}(\text{य})}{\text{य}}$$ लघुरिक्थ लेने से

$$\text{त}\,\text{ला}^{२}(\text{य}) \angle \text{ला}\,\frac{\text{गफा}(\text{य})}{\text{य}} \therefore \text{त} \angle \frac{\text{ला}\,\frac{\text{गफा}(\text{य})}{\text{य}}}{\text{ला}^{२}(\text{य})} = \frac{\text{लागफा}(\text{य})-\text{ला}(\text{य})}{\text{ला}^{२}(\text{य})}$$

यहां भी य के अनन्त मान में यह लुप्तभिन्न हुआ जिस का मान चलनकलन के ३६वें प्रक्रम से $\text{ला}(\text{य})\left\{\frac{\text{य}\,\text{फा}'(\text{य})}{(\text{फाय})}-१\right\}$ यह होगा

इस लिये इस का मान यदि एक से अधिक हो तो श्रेढ़ी का मान सान्त और एक से न्यून में अनन्त होगा।

इस लुप्तभिन्न का मान यदि एक के बराबर हो तो फिर पहले के ऐसा अनिश्चय होगा। तब $\frac{१}{\text{फा}(\text{य})}$ इस का मान $\frac{\text{ग}}{\text{यला}(\text{य})\{\text{ला}^{२}(\text{य})\}^{\text{त}}}$ इस से छोटा कल्पना कर पहले ऐसी क्रिया करो तो लुप्तभिन्न का मान

$\text{ला}^{२}(\text{य})\left[\text{ला}(\text{य})\left\{\frac{\text{यफा}'(\text{य})}{\text{फा}(\text{य})}-१\right\}\right]$ ऐसा होगा

इस में यदि $\frac{\text{यफा}'(\text{य})}{(\text{फाय})}=\text{ता}_{०}$, $\text{ला}(\text{य})\left\{\frac{\text{यफा}'(\text{य})}{\text{फा}(\text{य})}-१\right\}=\text{ता}१,$

$\text{ला}^{२}(\text{य})\left[\text{ला}(\text{य})\left\{\frac{\text{यफा}'(\text{य})}{\text{फा}(\text{य})}-१\right\}\right]=\text{ता}_{२}$ इत्यादि मानो तो

साधारण यह क्रिया उत्पन्न होती है

$\text{ता}_{१}=\text{ला}(\text{य})(\text{ता}_{०}-१), \text{ता}_{२}=\text{ला}^{२}(\text{य})(\text{ता}_{१}-१), \text{ता}_{३}=\text{ला}^{३}(\text{य})(\text{ता}_{२}-१) \cdots\cdots$

$\text{ता}_{\text{म}}=\text{ला}^{\text{म}}(\text{य})\{\text{ता}_{\text{म}-१}-१\}$। इस लिये इस सिद्धान्त पर से $\text{ता}_{०}$, $\text{ता}_{१}$, $\text{ता}_{२}$, इत्यादि के मान बनाते चले जावो जिस का मान एक से भिन्न हो उस पर से उद्दिष्ट श्रेढ़ी का मान सान्त वा अनन्त है इस का विचार कर सक्ते हो।

यदि $\frac{१}{\text{फा}(\text{य})}=\text{फि}(\text{य})$ तो $\text{फा}(\text{य})=\frac{१}{\text{फि}(\text{य})}$ इसका उत्थापन $\text{ता}_{०}$ में देने से

$ता_0 = \frac{यफ़ा(य)}{फा(य)} = -\frac{यफ़ि(य)}{फि(य)}$ ऐसा होगा फिर आगे $ता_1, ता_2$ इत्यादि का मान पूर्ववत् जान सक्ते हो ।

चलनकलन से $-\frac{यफ़ि(य)}{फि(य)} = य\left\{\frac{फि(य)}{फि(य+1)} - 1\right\}$ यह भी सिद्ध कर सक्ते हो जब $य = \infty$ क्योंकि ऐसी दशा में $\frac{फ़ि(य+ष)}{फि(य+1)} = \frac{फ़ि(य)}{फि(य)}$ जहां $ष \angle 1$ ।

इस प्रकार से श्रेढ़ी का मान सान्त वा अनन्त होगा यह सब डिमार्गन (Demorgan) साहब ने अपने चलनकलन और चलराशिकलन (Differential and Integeal Calculus) के २०८—२१० प्र० में लिखा है। इस में यह कुछ नियम नहीं कि लुप्तभिन्न ही के प्रकार से मान ले आवो चाहिये कि जिस प्रकार से लाघव हो वह क्रिया करो ।

जैसे जिस श्रेढ़ी का न संख्यक पद $\left(\frac{1}{न}\right)^{अ+\frac{क}{न}}$ यह है उस का मान कैसा होगा यह जानना है यहां

$$\left(\frac{1}{य}\right)^{अ+\frac{क}{य}} = \frac{1}{\frac{1}{\left(\frac{1}{य}\right)^{अ+\frac{क}{य}}}} = \frac{1}{फा(य)},\ यदि\ फि(य) = \left(\frac{1}{य}\right)^{अ+\frac{क}{य}}$$

इस लिये लघुरिक्थ लेने से

$$ला\left\{फि(य) = \left(अ+\frac{क}{य}\right) ला\left(\frac{1}{य}\right) = -\left(अ+\frac{क}{य}\right) ला\ (य)\right\}$$

तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{फ़ि(य)}{फि(य)} = -\left[\frac{अ}{य} + \frac{क}{य^2}\right] + \frac{कलाय}{य^2}$$

इस लिये

$$ता_0 = -\frac{यफ़ि(य)}{फि(य)} = \left(अ+\frac{क}{य}\right) - \frac{कलाय}{य}$$ इस में यदि $य = \infty$ तो

$\frac{क}{य} = 0$, और $\frac{कलाय}{य} = क\,\frac{1}{य} = 0$ लुप्तभिन्न के आनयन से।

इस लिये $ता_0 = अ$। इस लिये यदि $अ > 1$ तो श्रेढ़ी का मान सान्त और यदि $अ < 1$ तो श्रेढ़ी का मान अनन्त होगा।

५०। कल्पना करो कि

$$फा(ल) = फ(य-ल) + लफ'(य-ल) + \frac{ल^2}{\lfloor 2}फ''(य-ल) + \cdots + \frac{ल^न}{\lfloor न}फ^न(य-ल), \cdots (1)$$

ल के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$फा'(ल) = फ'(य-ल) + फ'(य-ल) - लफ''(य-ल) + लफ''(य-ल) - \frac{ल^2}{\lfloor 2}फ'''(य-ल)$$

$$\cdots\cdots + \frac{ल^{न-1}}{\lfloor न-1}फ^न(य-ल) - \frac{ल^न}{\lfloor न}फ^{न+1}(य-ल)$$

$$= -\frac{ल^न}{\lfloor न}फ^{न+1}(य-ल)$$

ल के 0 और च के बीच मान में दोनों के सान्त चल मान

$$फा(च) - फा(0) = -\frac{1}{\lfloor न}\int_0^च ल^न फ^{न+1}(य-ल)ताल$$

परन्तु (१) में ल के स्थान में 0 और च का उत्थापन देने से

$$फा(च) - फा(0) = फ(य-च) + चफ'(य-च) + \frac{च^2}{\lfloor 2}फ''(य-च) + \cdots$$

$$+ \frac{च^न}{\lfloor न}फ^न(य-च) - फ(य)$$

$$= -\frac{1}{\lfloor न}\int_0^च ल^न फ^{न+1}(य-ल)ताल$$

य के स्थान में अ+च का उत्थापन देकर पक्षान्तरनयन से

$$फ(अ+च) = फ(अ) + चफ'(अ) + \frac{च^2}{\lfloor 2}फ''(अ) + \cdots + \frac{च^न}{\lfloor न}फ^न(अ)$$

$+ \frac{1}{\lfloor न} \int^{च} ल^{न} फ^{न+1}(य-ल) ताल$

इस लिये फ(अ+च) इस का चलनकलन में टेलर के सिद्धान्त से जो श्रेढ़ी में मान आवेगा उस में न पद के अनन्तर न+१, न+२, इत्यादि जो पद होंगे उनका योग $\frac{1}{\lfloor न} \int_{0}^{च} ल^{न} फ^{न+1}(य-ल) ताल$ इस सान्त चल के तुल्य होगा जिस का मान (४०) वें प्रक्रम से $\frac{1}{\lfloor न} ष^{न} च^{न+1} फ^{न+1}(अ+च-षच)$ ऐसा वा

$\frac{1}{\lfloor न} फ^{न+1}(अ+च-षच) \int_{0}^{च} ल^{न} ताल = \frac{1}{\lfloor न} फ^{न+1}\{अ+च(1-ष)\} \int_{0}^{च} ल^{न} ताल$

$= \frac{1}{\lfloor न} फ^{न+1}(अ+चष_1) \int_{0}^{च} ल^{न} ताल$ ऐसा होगा [जहां $ष_1 = 1 - ष =$ कोई एक से न्यून संख्या है] $= \frac{च^{न+1}}{\lfloor न+1} फ^{न+1}(अ+चष_1)$ ऐसा होगा

५१। जब चलनकलन से सिद्ध है कि फल का वा फल में स्थिराङ्क युत वा रहित का तात्कालिक सम्बन्ध एक ही होता है इस लिये एक ही तात्कालिक सम्बन्ध का यदि कई एक प्रकार से चलानयन करो तो स्पष्ट है कि वे सब तुल्य होंगे वा उनका अन्तर कोई स्थिराङ्क के तुल्य होगा।

जैसे $\int \frac{ताय}{(1-य)^2} = \int ताय\,(1-य)^{-2} = -\int -ताय\,(1-य)^{-2}$

$= \frac{1}{1-य}$ यह प्रथमाध्याय के (३) सूत्र से सिद्ध हुआ। और इसी में यदि $य = \frac{1}{र}$ ऐसा मानो तो $ताय = -\frac{तार}{र^2}$ और $(1-य)^2 = (\frac{र-1}{र})^2$ इस लिये

$$\int \frac{ताय}{(1-य)^2} = -\int \frac{तार}{(र-1)^2} = \frac{1}{र-1} = \frac{य}{1-य}$$ प्रथमाध्याय के तीसरे सूत्र से। इस लिये दोनों का अन्तर $= \frac{य}{1-य} \backsim \frac{1}{1-य} = 1 =$ स्थिराङ्क के हुआ। ऐसे ही सब जगह जानना चाहिये।

इसी जगह यदि $\int_0^{२} \frac{\text{ताय}}{(१—य)^२}$ इस का मान जानना हो तो स्पष्ट है कि दोनों पर से एक ही आवेगा क्योंकि $\int$फ(य)ताय = फा(य) वा $\int$फ(य)ताय =फा(य)+स्थि ऐसा मानो तो पहले से $\int_{अ}^{क}$फ(य)ताय
=फा(क)— फा(अ) और दूसरे मान से भी फा(क)+स्थि —{फा(अ)+स्थि}
= फा(क)—फा(अ) वही हुआ ।

एक ही तात्कालिक सम्बन्ध का भिन्न भिन्न रूप में चलानयन कर और उन पर से दो सीमाओं के भीतर दो सान्त चलानयन कर अनेक चमत्कृत समता उत्पन्न कर सक्ते हो । जैसे खण्ड चलानयन से सिद्ध है कि

$$\int \text{य}^{\text{म}}_{0}(१—\text{य})^{\text{न}}\text{ताय} = \frac{\text{य}^{\text{म}+१}(१—\text{य})^{\text{न}}}{\text{म}+१} + \frac{\text{न}}{\text{म}+१}\int \text{य}^{\text{म}+१}(१\text{-य})^{\text{न}-१}\text{ताय}$$

इस लिये $\int_0^{१}\text{य}^{\text{म}}(१—\text{य})^{\text{न}}\text{ताय} = \frac{\text{न}}{\text{म}+१}\int_0^{१}\text{य}^{\text{म}+१}(१—\text{य})^{\text{न}-१}\text{ताय}$

वार वार यही क्रिया करने से

$$\int_0^{१}\text{य}^{\text{म}}(१—\text{य})^{\text{न}}\text{ताय} = \frac{\text{न}(\text{न}—१)\ (\text{न}—२)\ \cdots\ १}{(\text{म}+१)\ (\text{म}+२)\ \cdots\ (\text{म}+\text{न}+१)} \quad \cdots\ (१)$$

और द्वियुक् पद सिद्धान्त से

$$\text{य}^{\text{म}}(१—\text{य})^{\text{न}} = \text{य}^{\text{म}}\left\{१—\text{नय}+\frac{\text{न}(\text{न}-१)}{\lfloor २}\text{य}^{२}—\frac{\text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२)}{\lfloor ३}\text{य}^{३}+\cdots\right\}$$

$$=\text{य}^{\text{म}}—\text{नय}^{\text{म}+१}+\frac{\text{न}(\text{न}-१)}{\lfloor २}\text{य}^{\text{म}+२}—\frac{\text{न}(\text{न}-१)\ (\text{न}-२)}{\lfloor ३}\text{य}^{\text{म}+३}+\ \cdots$$

इस लिये प्रथमाध्याय के (३) सूत्र से

$$\int \text{य}^{\text{म}}(१—\text{य})^{\text{न}}\text{ताय} = \frac{\text{य}^{\text{म}+१}}{\text{म}+१}—\frac{\text{न}}{\text{म}+२}\text{य}^{\text{म}+२}+\frac{\text{न}(\text{न}-१)}{\lfloor २(\text{म}+३)}\ \text{य}^{\text{म}+३}$$

$$—\frac{\text{न}(\text{न}—१)\ (\text{न}—२)}{\lfloor ३\ (\text{म}+४)}\ \text{य}^{\text{म}+४}+\cdots$$

$$\text{और} \int_0^1 य^म(१-य)^न ताय = \frac{१}{म+१} - \frac{न}{१}\cdot\frac{१}{म+२} + \frac{न(न-१)}{\lfloor २}\,\frac{१}{म+३}$$

$$- \frac{न(न-१)\,(न-२)}{\lfloor ३}\,\frac{१}{म+४} + \cdots + (-१)^न\frac{१}{म+न+१} \cdots (२)$$

इस लिये यहां ऊपर की युक्ति से निश्चय है कि (१) और (२) का दहना पक्ष परस्पर तुल्य हैं।

५२। खण्ड चलानयन से सिद्ध है कि

$$\int फ(य)ताय = यफ(य) - \int यफ'(य)ताय$$

$$\int यफ'(य)ताय = \frac{य^२}{२}\,फ'(य) - \tfrac{१}{२}\int य^२ फ''(य)ताय$$

$$\int य^२ फ''(य)ताय = \frac{य^३}{३}\,फ''(य) - \tfrac{१}{३}\int य^३ फ'''(य)ताय$$

. . . .

इन सब का एक एक में उत्थापन देने से

$$\int फ(य)ताय = यफ(य) - \frac{य^२}{\lfloor २}\,फ'(य) + \frac{य^३}{\lfloor ३}\,फ''(य) - \frac{य^४}{\lfloor ४}\,फ'''(य) + \cdots$$

$$+ \frac{(-१)^{न-१}}{\lfloor न}\,य^न फ^{न-१}(य) + \frac{(-१)^न}{\lfloor न}\int य^न फ^न(य)\,ताय$$

इस लिये

$$\int_0^अ फ(य)ताय = अफ(अ) - \frac{अ^२}{\lfloor २}\,फ'(अ) + \frac{अ^३}{\lfloor ३}\,फ''(अ) - \frac{अ^४}{\lfloor ४}\,फ(अ) + \cdots$$

$$+ \frac{(-१)^{न-१}अ^न}{\lfloor न}\,फ^{न-१}(अ) + \frac{(-१)^न}{\lfloor न}\int_0^अ य^न फ^न(य)ताय$$

इस प्रकार से सान्तचल ज्ञान के लिये यह जो श्रेढ़ी उत्पन्न हुई है उसे बर्नली (Bernoulli) साहब ने निकाला है इस लिये उन के

आदरार्थ इस को बर्नेली की श्रेढ़ी (Bernoulli's Series) कहते हैं ।

यह जहां फ(य) का रूप $य^{न-१}$ इस तरह का हो वहां पर बड़े काम की है क्योंकि ऐसी जगह पर $फ^{न}(य)=\frac{ता^{न}(य^{न-१})}{ताय^{न}}$ यह शून्य के तुल्य होगा। अथवा जहां पर $\int फ(य)ताय$ इस के अपेक्षा $\int य^{न}फ^{न}(य)ताय$ इस का मान सहज में निकलता हो वहां पर भी यह बड़े काम की है ।

जहां पर $\int_{०}^{अ} य^{न}फ^{न}(य)ताय$ इस का मान बहुत थोड़ा हो वहां पर भी स्वल्पान्तर से $\int_{०}^{अ} फ(य)ताय$ इस के आसन्न मान का ज्ञान इस से सहज में हो सक्ता है ।

५३ । जब कि सिद्ध है कि $\int फ(य)ताय$ यह य के उस फल को बताता है जिसका तात्कालिक सम्बन्ध फ(य) है तब स्पष्ट है कि एक फल ऐसा भी होगा जिसका तात्कालिक सम्बन्ध $\int फ(य)ताय$ यह हो अर्थात् यदि $\int फ(य)ताय=फा(य)$ मानो तो $\int फा(य)ताय$ यह भी एक मान जान सक्ते हो जिसका तात्कालिक सम्बन्ध फा(य) के समान होगा । ऐसे ही बार बार चलज्ञान कर सक्ते हो ।

इस को $\int फ(य)ताय= फा(य)$ । $\int फा(य)ताय=\int\int फ(य)ताय\ ताय=फि(य)$ ।

$\int फि(य)ताय=\int\int फा(य)ताय\ ताय= \int\int\int फ(य)\ ताय\ ताय\ ताय$ इस तरह से लिखते हैं । $\int\int\int फ(य)ताय\ ताय\ ताय$ यह प्रकाश करता है कि $\int फ(य)ताय$ इसके मान को ताय से गुणने से जो हो उस के चल मान को फिर ताय से गुणकर गुणित फल का चल है । जैसे $\int ताय=य+ग_{१}$

$$\int(य+ग_{१})ताय=\int\int ताय\ ताय=\frac{य^{२}}{२}+ग_{१}य+ग_{२}$$

$$\int(\frac{य^{२}}{२}+ग_{१}य+ग_{२})=\int\int(य+ग_{१})ताय\ ताय=\int\int\int ताय\ ताय\ ताय$$

$$=\frac{य^{३}}{६}+\frac{ग_{१}}{२}य^{२}+ग_{२}य+ग_{३}$$ जहां $ग_{१}, ग_{२},$ इत्यादि स्थिराङ्क हैं ।

इसी तरह यहां न वार चलनान करें तो स्पष्ट है कि उस का मान $आ_0 य^न + आ_1 य^{न-1} + आ_2 य^{न-2} + \cdots + आ_न$ ऐसा होगा जहां $आ_0$, $आ_न$, इत्यादि स्थिराङ्क हैं।

५४। यदि $\int च\, ताय = च_1$, $\int च_1\, ताय = च_2$, $\int च_2 ताय = च_3$ इत्यादि मानो जहां च, $च_1$, इत्यादि य के फल हैं और $\frac{ताज}{ताय} = ज_1$, $\frac{ता^2ज}{ताय^2} = ज_2$, इत्यादि जहां ज य का कोई फल है तो खण्डचलानयन से

$$\int चज\, ताय = च_1 ज - \int च_1 ज_1\, ताय = च_1 ज_1 - च_2 ज_1 + \int च_2 ज_2\, ताय$$
$$= च_1 ज - च_2 ज_1 + च_3 ज_2 - च_4 ज_3 + \cdots + (-1)^{न-1} च_न ज_{न-1}$$
$$+ (-1)^न \int च_न ज_न ताय$$

इसी श्रेढ़ी में यदि च=१ और ज=फ(य) मानो तो बर्नली की श्रेढ़ी उत्पन्न हो जायगी इस लिये इस श्रेढ़ी को बर्नली के श्रेढ़ी का मूल कह सक्ते हैं। यह श्रेढ़ी भी बहुत स्थानों में बड़े काम की है। जैसे इस श्रेढ़ी में यदि $च = इ^य$ मानो तो स्पष्ट है कि $च_1$, $च_2$ इत्यादि सब परस्पर तुल्य होंगे इस लिये

$$\int इ^य ज\, ताय = इ^य \{ ज - ज_1 + ज_2 - ज_3 + \cdots (-1)^{न-1} ज_{न-1}$$
$$+ (-1)^न \int इ^य ज_न\, ताय$$

इस में ज के स्थान में भिन्न भिन्न फल का उत्थापन देने से हज़ारों उदाहरण बना सक्ते हो।

५५। यदि $च_1 = \int च\, ताय$, $च_2 = \int च_1\, ताय$, $च_3 = \int च_2\, ताय$ इत्यादि मानो तो खण्डचलानयन से

$$च_2 = \int च_1\, ताय = यच_1 - \int य \frac{ताच_1}{ताय} ताय = य \int च\, ताय - \int य च\, ताय$$

$$च_3 = \int च_2 ताय = \int \{ य \int च\, ताय - \int यच\, ताय \} ताय.$$

यहां भी खण्डचलानयन से

$$च_3 = \frac{य^2}{2} \int च\, ताय - \int \frac{य^2}{2} च\, ताय - य \int यच\, ताय + \int य^2 च\, ताय$$

$$= \frac{य^2}{2}\int च ताय - य\int यच ताय + \frac{1}{2}\int य^2 च ताय$$

इसी प्रकार से वार वार करते जाओ तो अन्त में

$$च_{न+1}\lfloor न = य^न \int चताय - नय^{न-1}\int यचताय + \frac{न(न-1)}{\lfloor 2} य^{न-2}\int य^2 चताय \cdots$$

$$\cdots + (-1)^द \frac{न(न-1)(न-2)\cdots(न-द+1)}{\lfloor द} य^{न-द}\int य^द च ताय$$

$$+(-1)^न\int य^न च ताय$$

यह एक सिद्धान्त उत्पन्न हो जायगा।

इस की सत्यता के लिये मानो कि किसी न के मान में यह सिद्धान्त सत्य है तो $च_{न+2} = \int च_{न+1} ताय$ और $\lfloor न\; च_{न+2} = \int \lfloor न\; च_{न+1}$ ताय

$$= \int\{य^न ताय\int च ताय\} - \int\{नय^{न-1} ताय\int यच ताय\}$$

$$+\int\left\{\frac{न(न-1)}{\lfloor 2} य^{न-2} ताय \int य^2 च ताय\right\}\cdots$$ प्रत्येक { } अन्तर्गत का

खण्डचलानयन से मान ले आने से

$$\lfloor न\; च_{न+2} = \frac{य^{न+1}}{न+1}\int चताय - \frac{1}{न+1}\int य^{न+1} चताय - य^न\int यचताय + \int य^{न+1} चताय$$

$$+\frac{न}{\lfloor 2} य^{न-1}\int य^2 चताय - \frac{न}{\lfloor 2}\int य^{न+1} चताय + \cdots$$

न+१ से दोनों पक्षों को गुणकर दहने पक्ष को यथा क्रम लिखने से

$$च_{न+2}\lfloor न+1 = य^{न+1}\int चताय - (न+1)य^न\int यचताय$$

$$+\frac{न(न+1)}{\lfloor 2}य^{न-1}\int य^2 चताय - \cdots$$

वा, $च_{म+1}\lfloor म = य^म \int चताय - मय^{म-1}\int यचताय$

$$+\frac{म(म-1)}{\lfloor 2}य^{म-2}\int य^2 चताय - \cdots$$

इस लिये यदि यह सिद्धान्त किसी न मान में सत्य हो तो न+१ में भी सत्य होगा परन्तु यदि न=२ तो $च_3$ के मान से स्पष्ट है कि यह

सिद्धान्त सत्य है इसलिये न के सब मान में यह सिद्धान्त सत्य ठहरा ।

५६ । $\int$ ज्या^{न}यताय वा $\int$ कोज्या^{न}यताय के मान के लिये यदि चलन-कलन के ३०० प्रक्रम की युक्ति से ज्या^{न}य वा कोज्या^{न}य का रूप ज्या और कोटिज्या की श्रेढ़ी में ले आवो तो बहुत ही सुगमता चलानयन में होगी। जैसे चलनकलन के ३०० प्रक्रम की युक्ति से सिद्ध है कि

८ ज्या^{४}य=कोज्या४य—४कोज्या२य+३

इस लिये

$$८\int ज्या^{४}यताय=\int कोज्या४यताय—४\int कोज्या२यताय+\int ३ताय$$

$$=\frac{ज्या४य}{४}—२ज्या२य+३य$$

$$\therefore \int ज्या^{४}यताय = \frac{ज्या४य}{३२}-\frac{ज्या२य}{४}+\frac{३य}{८}$$ यह पहले लघूकरण-सिद्धान्त की अपेक्षा बड़े लाघव से सिद्ध हुआ ।

इस प्रकार और भी बहुत उपाय से जिस में सुगमता हो वैसी क्रिया करनी चाहिये ।

५७ । इस प्रक्रम में विद्यार्थियों को जिस में बोध हो इसलिये कुछ उदाहरण क्रिया समेत दिखाते हैं ।

(१) $\left(\frac{१}{२न}\right)^{त}+\left(\frac{२}{२न}\right)^{त}+\left(\frac{३}{२न}\right)^{त}+\cdots$ २ न पद तक जो यह श्रेढी है इस में $\left(\frac{१}{२}+\frac{१}{२न}\right)^{त}+\left(\frac{१}{२}+\frac{२}{२न}\right)^{त}+\cdots$न पद तक जो यह श्रेढी है इस का भाग देने से क्या लब्धि होगी यदि न=∞ ।

यहां प्रश्नानुसार न के अनन्त मान में

$$\frac{\left(\frac{१}{२न}\right)^{त}+\left(\frac{२}{२न}\right)^{त}+\left(\frac{३}{२न}\right)^{त}+\cdots २न \text{ पद तक}}{\left(\frac{१}{२}+\frac{१}{२न}\right)^{त}+\left(\frac{१}{२}+\frac{२}{२न}\right)^{त}+\left(\frac{१}{२}+\frac{३}{२न}\right)^{त}+\cdots न \text{ पद तक}}$$ इसका मान जानना है

अंश और हर को $\frac{१}{२न}$ से गुण देने से

$$अंश=\frac{१}{२न}\left\{\left(\frac{१}{२न}\right)^{त}+\left(\frac{२}{२न}\right)^{त}+\left(\frac{३}{२न}\right)+\cdots २ न \text{ पद तक}\right\}$$

$$हर=\frac{१}{२न}\left\{\left(\frac{१}{२}+\frac{१}{२न}\right)^{त}+\left(\frac{१}{२}+\frac{२}{२न}\right)^{त}+\left(\frac{१}{२}+\frac{३}{२न}\right)^{त}+\cdots न \text{ पद तक}\right\}$$

४०वें प्रक्रम के समीकरण के साथ अंश और हर दोनों की तुलना करो तो अंश में $\frac{१}{२न}$=च, अ=०, क=०+२नच=१ और फ(य)=$(य)^{त}$

इस लिये अंश का मान=$\int_{0}^{१}$फ(य)ताय=$\int_{0}^{१}य^{त}ताय=\frac{१}{त+१}$

और हर में पहला पद फ(अ)=$\left(\frac{१}{२}+\frac{१}{२न}\right)^{त}$ ∴ अ=$\frac{१}{२}+\frac{१}{२न}$

और $\frac{१}{२न}$=च ∴ क−अ=चन=$\frac{१}{२}$ और क=$\frac{१}{२}$+अ=१+$\frac{१}{२न}$

और फ(य)=$(य)^{त}$ इस लिये $\int$फ(य)ताय=$\int(य)^{त}ताय=\frac{(य)^{त+१}}{त+१}$

$$\text{इस लिये हर}=\int_{\frac{१}{२}+\frac{१}{२न}}^{१+\frac{१}{२न}}\text{फ(य)ताय}=\frac{\left(१+\frac{१}{२न}\right)^{त+१}}{त+१}-\frac{\left(\frac{१}{२}+\frac{१}{२न}\right)^{त+१}}{त+१}$$

$$=\frac{१-\left(\frac{१}{२}\right)^{त+१}}{त+१}\text{ यदि न}=\infty$$

$$\text{इस लिये ऊपर के भिन्न का मान}=\frac{\text{अं}}{\text{ह}}=\frac{\frac{१}{त+१}}{\frac{१-\left(\frac{१}{२}\right)^{त+१}}{त+१}}=\frac{१}{१-\left(\frac{१}{२}\right)^{त+१}}$$

यही उत्तर हुआ ।

(२) सिद्ध करो कि यदि फ(य)=फ(अ+य) तो

$$\int_{0}^{म\text{अ}}\text{फ(य)ताय}=म\int_{0}^{\text{अ}}\text{फ(य)ताय}$$

यहां $\int_{0}^{म\text{अ}}$फ(य)ताय इसका मान यदि २ प्रक्रम से श्रेढी में लावो तो

$\frac{म\text{अ}}{न}\left\{\text{फ}(०)+\text{फ}\left(\frac{म\text{अ}}{न}\right)+\text{फ}\left(\frac{२म\text{अ}}{न}\right)+\cdots\text{फ}\left[\frac{म\text{अ}(न-१)}{न}\right]\right\}$ ऐसा होगा ...... (१)

परन्तु प्रश्न से फ(य)=फ(अ+य) ∴ फ(०)=फ(अ), फ$\left(\frac{म\text{अ}}{न}\right)$=फ$\left(\text{अ}+\left(\frac{म\text{अ}}{न}\right)\right)$, इत्यादि । इनका उत्थापन देने से (१) का मान

$\frac{म\text{अ}}{न}\left\{(\text{अ})+\text{फ}\left(\text{अ}+\frac{म\text{अ}}{न}\right)+\text{फ}\left(\text{अ}+\frac{२म\text{अ}}{न}\right)+\cdots\text{फ}\left[\text{अ}+\frac{म\text{अ}(न-१)}{न}\right]\right\}$

$=\int_{\text{अ}}^{म\text{अ}+\text{अ}}$फ(य)ताय यह हुआ ।

इसी रीति से फ(य) पर से

$$\int_{अ}^{मंअ+अ} फ(य)ताय = \frac{मंअ}{न}\left\{फ(अ)+फ\left(अ+\frac{मंअ}{न}\right)+फ\left(अ+\frac{२मंअ}{न}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.+फ\left[अ+\frac{मंअ(न-१)}{न}\right]\right\} \cdots\cdot (२)$$

यहां भी जब $फ(य)=फ(य+अ) \therefore फ(अ)=फ(२अ)$,

$फ\left(अ+\frac{मंअ}{न}\right)=फ\left(२अ+\frac{मंअ}{न}\right)$ इ० इन का उत्थापन (२) में देने से (२) का मान

$$\frac{मंअ}{न}\left\{फ(२अ)+फ\left(२अ+\frac{मंअ}{न}\right)+\cdots+फ\left[२अ+\frac{मंअ(न-१)}{न}\right]\right\}$$

$$= \int_{२अ}^{मंअ+२अ} फ(य)ताय \text{ यह हुआ}$$

इस पर से सिद्ध हुआ कि

$$\int_{0}^{मंअ} फ(य)ताय = \int_{अ}^{मंअ+अ} फ(य)ताय = \int_{२अ}^{मंअ+२अ} फ(य)ताय \text{ इत्यादि।}$$

मं के स्थान में १, का उत्थापन देने से

$$\int_{0}^{अ} फ(य)ताय = \int_{अ}^{२अ} फ(य)ताय = \int_{२अ}^{३अ} फ(य) = \cdots = \int_{अ(म-१)}^{मअ} फ(य)ताय \quad (३)$$

अब ४१वें प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$\int_{0}^{मअ} फ(य)ताय = \int_{0}^{अ} फ(य)ताय + \int_{अ}^{२अ} फ(य)ताय$$

$$+\int_{२अ}^{३अ} फ(य)ताय + \cdots \int_{(म-१)अ}^{मअ} फ(य)ताय = म\int_{0}^{अ} फ(य)ताय$$

(३) से सिद्ध हुआ।

अथवा जब $फ(य)=फ(अ+य)$ इस लिये $फ(0)=फ(अ)$ और $फ(अ)=फ(२अ)$ इस लिये य के 0 और अ के बीच मानों में जो $\int_{0}^{अ} फ(य)ताय$ इस का मान होगा वही य के २ अ और अ के बीच मानों में भी $\int_{अ}^{२अ} फ(य)ताय$ इस का मान होगा यों आगे भी सिद्ध कर सक्ते हो कि $\int_{अ}^{२अ} फ(य)ताय = \int_{२अ}^{३अ} फ(य)ताय$, इत्यादि। इस पर से ४१वें प्रक्रम के (२) समीकरण से पहले के ऐसा उत्तर निकाल सक्ते हो।

(३) $\int_{0}^{\frac{\pi}{२}}$ ला ज्याय ताय इस का मान क्या होगा

यहां ४१वें प्रक्रम के (४) समीकरण से

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} लाज्यायताय = \int_{0}^{\frac{\pi}{२}} ला\left(\frac{\pi}{२}-य\right)ताय = \int_{0}^{\frac{\pi}{२}} ला कोज्याय ताय$$

$\therefore २\int_0^{\frac{\pi}{२}} \text{लाज्यायताय} = \int_0^{\frac{\pi}{२}} (\text{लाज्याय} + \text{लाकोज्याय})\text{ताय} = २\,\text{र}$

यदि $\int_0^{\frac{\pi}{२}} \text{ला ज्याय ताय} = \text{र},$

वा $२\text{र} = \int_0^{\frac{\pi}{२}} \text{ला}(\text{ज्यायकोज्याय})\text{ताय} = \int_0^{\frac{\pi}{२}} \{\text{लाज्या२य} - \text{ला२}\}\text{ताय}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{२}} \text{ला ज्या२यताय} - \frac{१}{२}\pi\,\text{ला२}$

२ य के स्थान में य का उत्थापन देने से सिद्ध कर सक्ते हो

कि $\int_0^{\frac{\pi}{२}} \text{लाज्या२यताय} = \frac{१}{२}\int_0^{\pi} \text{ला ज्यायताय} = \frac{१}{२}\int_0^{\frac{\pi}{२}} \text{ला ज्याय ताय}$

४५वें प्रक्रम के (६) समीकरण से

इस लिये $२\,\text{र} = \text{र} - \frac{१}{२}\pi\,\text{ला}\,२ \;\therefore\; \text{र} = -\frac{१}{२}\pi\,\text{ला}\,२ = \frac{१}{२}\pi\,\text{ला}\,\frac{१}{२}$

(४) $\int_0^{\pi} \frac{\text{यज्यायताय}}{१+\text{कोज्या}^२\text{य}}$ इस का क्या मान होगा।

इस का मान $\text{र}_१$ मान कर ४५वें प्रक्रम के (५)वें समीकरण से

$$\text{र}_१ = \int_0^{\pi} \frac{\text{यज्याय ताय}}{१+\text{कोज्या}^२\text{य}} = \int_0^{\frac{\pi}{२}} \left\{ \frac{\text{यज्यायताय}}{१+\text{कोज्या}^२\text{य}} + \frac{(\pi-\text{य})\text{ज्यायताय}}{१+\text{कोज्या}^२\text{य}} \right\}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{२}} \left[\frac{\text{यज्यायताय}}{१+\text{कोज्या}^२\text{य}} - \frac{\text{यज्यायताय}}{१+\text{कोज्या}^२\text{य}} + \frac{\pi\,\text{तायज्याय}}{१+\text{कोज्या}^२\text{य}} \right]$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{२}} \frac{\pi\,\text{ज्याय ताय}}{१+\text{कोज्या}^२\text{य}} = \pi\int_0^{\frac{\pi}{२}} \frac{\text{ज्याय ताय}}{१+\text{कोज्या}^२\text{य}}$$

$$= -\pi\int_0^{\frac{\pi}{२}} \frac{\text{तार}}{१+\text{र}^२} \quad (\text{यदि र} = \text{कोज्याय})$$

परन्तु $\int \frac{\text{तार}}{१+\text{र}^२} = \text{स्प}^{-१}\text{र} = \text{स्प}^{-१}(\text{कोज्याय})$

इस लिये जब $\text{य} = ०$ तो $\text{कोज्याय} = १$ और $\text{स्प}^{-१}(\text{कोज्याय}) = \frac{\pi}{४}$

और जब $\text{य} = \frac{\pi}{२}$ तो $\text{कोज्याय} = ०$ और $\text{स्प}^{-१}(\text{कोज्याय}) = ०$

इस लिये $-\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{तार}}{१+\text{र}^२} = -\pi \left(0 - \frac{\pi}{४}\right) = \frac{\pi^२}{४}$ यह उत्तर हुआ ।

(५) $\int_0^१ \frac{\text{ला}(१+\text{य})}{१+\text{य}^२}$ ताय इस का क्या मान होगा ।

यहां यदि स्पर=य तो ताय=छे^{२}र तार=(१+स्प^{२}र) तार

इस लिये $\frac{\text{ला}(१+\text{य})}{१+\text{य}^२}$ ताय= $\frac{\text{ला}(१+\text{स्पर})}{१+\text{स्प}^२\text{र}}$(१+स्प^{२}र)तार=ला (१+स्पर) तार

$\therefore \int_0^१ \frac{\text{ला}(१+\text{य})}{१+\text{य}^२}$ ताय= $\int_0^{\frac{\pi}{४}}$ला(१+स्पर)तार= $\int_0^{\frac{\pi}{४}}$ ला $\{१+\text{स्प}(\frac{\pi}{४}-\text{र}\}$ तार

४१वें प्रक्रम के (४) समीकरण से । परन्तु स्प$(\frac{\pi}{४}-\text{र}) = \frac{१-\text{स्पर}}{१+\text{स्पर}}$

इस लिये १+स्प$(\frac{\pi}{४}-\text{र}) = \frac{२}{१+\text{स्पर}}$ और ला$\{१+\text{स्प}(\frac{\pi}{४}-\text{र})\}$=ला२—ला(१+स्पर)

इस का उत्थापन देने से

$\int_0^{\frac{\pi}{४}}$ ला (१+स्पर) तार= $\int_0^{\frac{\pi}{४}}\{$ ला २ तार—ला (१+स्पर) तार$\}$

पक्षान्तरनयन से

२$\int_0^{\frac{\pi}{४}}$ ला(१+स्पर) तार= $\int_0^{\frac{\pi}{४}}$ तार ला २= $\frac{\pi}{४}$ ला २

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{४}}$ ला (१+स्पर) तार = $\frac{\pi}{८}$ ला २ ।

यहां देखो इस प्रकार से कैसे लाघव से उत्तर निकला है

यहां यदि ला (१+य) का रूप य$-\frac{\text{य}^२}{२}+\frac{\text{य}^३}{३}-\frac{\text{य}^४}{४}+\cdots$ ऐसा बना कर इस में साधारण बीजगणित की रीति से १+य^२ का भाग दो तो

$$\frac{\text{ला}(१+\text{य})}{१+\text{य}^२} = \text{य} - \frac{\text{य}^२}{२} - \frac{२}{३}\text{य}^३ + \frac{\text{य}^४}{४} + \frac{१३}{१५}\text{य}^५ \cdots$$ ऐसा होगा

इस में य के गुणक १ को $\text{गु}_१$, और $\text{य}^२$ के गुणक $-\frac{१}{२}$ को $\text{गु}_२ \cdots \text{य}^{\text{न}-२}$ के गुणक को $\text{गु}_{\text{न}-२}$ माना ता $\text{य}^\text{न}$ का गुणक $-(\frac{१}{\text{न}} + \text{गु}_{\text{न}-२})$ यह होगा यदि न सम हो और विषम हो तो $(\frac{१}{\text{न}} - \text{गु}_{\text{न}-२})$ यह गुणक होगा ।

यदि $\frac{\text{ला}(१+\text{य})}{१+\text{य}^२}$ इस में ऊपर के श्रेढी का उत्थापन देकर चलमान निकाला तो

$$\int \frac{\text{ला}(१+\text{य})\text{ताय}}{१+\text{य}^२} = \frac{\text{य}^२}{२} - \frac{१}{२}\frac{\text{य}^३}{३} - \frac{२}{३}\frac{\text{य}^४}{४} + \frac{१}{४}\frac{\text{य}^५}{५} + \frac{१३}{१५}\frac{\text{य}^६}{६} \cdots$$ ऐसा होगा

इस लिये $\int_0^१ \frac{\text{ला}(१+\text{य})\text{ताय}}{१+\text{य}^२} = \frac{१}{२} - \frac{१}{२}\cdot\frac{१}{३} - \frac{२}{३}\cdot\frac{१}{४} + \frac{१}{४}\cdot\frac{३}{५} + \frac{१३}{१५}\cdot\frac{१}{६} \cdots$

इस लिये $\frac{\pi}{८}$ ला२ $= \frac{१}{२} - \frac{१}{२}\cdot\frac{१}{३} - \frac{२}{३}\cdot\frac{१}{४} + \frac{१}{४}\cdot\frac{१}{५} + \frac{१३}{१५}\cdot\frac{१}{६} \cdots$

ऐसा यह अत्यन्त चमत्कार सिद्ध होता है ।

(६) $\int_0^\pi \text{ष}^\text{न}$लाज्याष ताष इस का मान $\int_0^\pi \text{ष}^२$लाज्याष ताष इस का फल होगा यह सिद्ध करो । यदि न $>$ २ ।

यहां ४५वें प्रक्रम के (४) समीकरण से

$$\int_0^\pi \text{ष}^\text{न}\text{लाज्याष ताष} = \int_0^\pi (\pi - \text{ष})^\text{न}\text{लाज्याष ताष} = \int_0^\pi \pi^\text{न}(१-\frac{\text{ष}}{\pi})^\text{न}\text{लाज्याष ताष}$$

$$= \pi^\text{न}\int_0^\pi \left\{ १ - \text{न}\frac{\text{ष}}{\pi} + \frac{\text{न}(\text{न}-१)}{२}\frac{\text{ष}^२}{\pi^२} - \frac{\text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२)}{\lfloor ३}\frac{\text{ष}^३}{\pi^३} + \cdots + (-१)^\text{न}\frac{\text{ष}^\text{न}}{\pi^\text{न}} \right\}\text{लाज्याष ताष}$$

$$= \pi^\text{न}\int_0^\pi \left\{ १ - \text{न}\frac{\text{ष}}{\pi} + \frac{\text{न}(\text{न}-१)}{\lfloor २}\frac{\text{ष}^२}{\pi^२} - \frac{\text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२)}{\lfloor ३}\frac{\text{ष}^३}{\pi^३} + \cdots \right\}\text{लाज्याषताष}$$

$$+ \int_0^\pi (-१)^\text{न}\text{ष}^\text{न}\text{ लाज्याष ताष}$$

समशोधन से

$$\int_0^\pi \text{ष}^{\text{न}}\text{लाज्याष ताष} - \int_0^\pi (-1)^{\text{न}}\text{ष}^{\text{न}}\text{लाज्याष ताष}$$

$$= \pi^{\text{न}}\int_0^\pi \text{लाज्याष ताष} - \text{न}\pi^{\text{न}-1}\int_0^\pi \text{षलाज्याष ताष}$$

$$+ \frac{\text{न}(\text{न}-1)}{\underline{|2}}\pi^{\text{न}-2}\int_0^\pi \text{ष}^2\text{लाज्याष ताष} \cdots\cdots$$

$$+(-1)^{\text{न}-1}\pi\int_0^\pi \text{ष}^{\text{न}-1}\text{लाज्याष ताष} \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

(१) इस में न के स्थान में २ का उत्थापन देने से

$0 = \pi^2\int_0^\pi \text{लाज्याषताष} - 2\pi\int_0^\pi \text{षज्याषताष}$ ऐसा होगा

इस लिये

$$2\pi\int_0^\pi \text{षलाज्याषताष} = \pi^2\int_0^\pi \text{लाज्याषताष}$$

$$\therefore \int_0^\pi \text{षलाज्याषताष} = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \text{लाज्याषताष}$$

परन्तु ४१वें प्रक्रम के (६)वें समीकरण से और इस प्रक्रम के (३) उदाहरण से $\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \text{लाज्याषताष} = \frac{\pi^2}{2}\text{ला}\frac{1}{2}$

इस लिये $\int_0^\pi \text{षलाज्याषताष} = \frac{\pi^2}{2}\text{ला}\frac{1}{2}$ यह सिद्ध हुआ।

यदि $\int_0^\pi \text{लाज्याषताष} = \pi\ \text{ला}\frac{1}{2} = \text{च}_1$ तो

$$\int_0^\pi \text{षलाज्याषताष} = \frac{\pi^2}{2}\text{ला}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}\text{च}_1$$

इन का उत्थापन (१)में देने से और न के स्थान में ३ मानने से

$$2\int_0^\pi \text{ष}^3\text{लाज्याषताष} = \pi^3\text{च}_1 - \frac{3}{2}\pi^3\text{च}_1 + 3\pi\int_0^\pi \text{ष}^2\text{लाज्याषताष}$$

इस प्रकार से वार वार उत्थापन देने से

$\int_0^\pi \text{ष}^{\text{न}}\text{लाज्याषताष} = \text{फ}(\text{च}_2)$ ऐसा हो जायगा जहां

$\text{च}_2 = \int_0^\pi \text{ष}^2\text{लाज्याषताष}$ ।

अभ्यास के लिये प्रश्न।

१। सिद्ध करो कि यदि फ(य) = फ(—य) तो

$\int_{-\text{अ}}^{\text{अ}}\text{फ}(\text{य})\text{ताय} = 2\int_0^{\text{अ}}\text{फ}(\text{य})\text{ताय}$ । $\int_{-\text{अ}}^{0}\text{फ}(\text{य})\text{ताय} = \int_0^{+\text{अ}}\text{फ}(\text{य})\text{ताय}$ ।

और $\int_0^{-\text{अ}}\text{फ}(\text{य}) = -\int_0^{+\text{अ}}\text{फ}(\text{य})\text{ताय}$

२। यदि फ(य) = — फ(—य) तो सिद्ध करो कि

$\int_{-अ}^{+अ} फ(य)ताय = 0$ । $\int_{-अ}^{0} फ(य)ताय = -\int_{0}^{+अ} फ(य)ताय$ ।
और $\int_{0}^{-अ} फ(य)ताय = \int_{0}^{+अ} फ(य)$ ।

३ । यदि $फ(य) = फ(-य)$ और $फा(य) = -फा(-य)$ तो सिद्ध करो कि

$$\int_{-अ}^{+अ} \{फ(य)+फा(य)\} ताय = \int_{-अ}^{+अ} फ(य)ताय = \int_{-अ}^{+अ}\{फ(य)-फा(य)\} ताय ।$$

४ । सिद्ध करो कि

$$\int_{-\infty}^{+\infty} इ^{-य^२} ताय = \sqrt{\pi} \text{ और } \int_{-अ}^{+अ} ज्याय^३ ताय = 0$$

५ । सिद्ध करो कि

$$\int_{-अ}^{+अ} \frac{कोज्यायताय}{१+य^२} = \int_{-अ}^{+अ} \frac{कोज्या२यताय}{(१+य^२)(कोज्या-ज्याय)}$$

६ । सिद्ध करो कि

$$\int_{अ}^{क} फ(य)ताय = \frac{क-अ}{२ग}\int_{-ग}^{+ग} फ\left(\frac{क+अ}{२}+\frac{क-अ}{२ग}य\right)ताय$$

७ । सिद्ध करो कि

$$\int_{अ}^{क} फ(य)ताय = \frac{क-अ}{ग-घ}\int_{घ}^{ग} फ\left(\frac{अग-कघ}{ग-घ}+\frac{क-अ}{ग-घ}य\right)ताय$$

८ । सिद्ध करो कि

$$\int ला(१+नकोज्याय)ताय = य\, ला\frac{न}{२ना}+२नाज्याय-\frac{२}{२.२}ना^२ज्या२य$$
$$+\frac{२}{३.३}ना^३ज्या३य-\frac{२}{४.४}ना^४ज्या४य+\cdots\cdots$$

$$जहां\ ना = \frac{१-\sqrt{१-न^२}}{न}$$

९ । सिद्ध करो कि

$$\int_{0}^{\pi} ला(१+नकोज्याय)ताय = \pi\, ला\frac{न^२}{२(१-\sqrt{१-न^२})}$$

१० । सिद्ध करो कि

$$\int ला(१+२मकोज्याय+म^२)ताय$$

$$= २\left(मज्याय - \frac{म^२}{२^२}ज्या२य + \frac{म^३}{२^३}ज्या३य - \frac{म^४}{२^४}ज्या४य + \cdots\right)$$

$$\text{वा} \int \text{ला}\,(१+२\text{म}\,\text{कोज्या}\,\text{य}+\text{म}^२)\,\text{ताय}$$

$$= २\text{य}\,\text{ला}\,\text{म}+२\left[\frac{\text{ज्या}\,\text{य}}{\text{म}}-\frac{\text{ज्या}\,२\text{य}}{२^२\text{म}^२}+\frac{\text{ज्या}\,३\text{य}}{३^२\text{म}^३}-\frac{\text{ज्या}\,४\text{य}}{४^२\text{म}^४}+\cdots\right]$$

११। सिद्ध करो कि

$$\int \text{ला}(१+\text{न}\,\text{कोज्या}\,\text{य})\,\text{ताय} = २\text{य}\;\text{ला}\,\text{कोज्या}\,\frac{\text{ष}}{२}$$
$$+\;२\left(\text{स्प}\,\frac{\text{ष}}{२}\,\text{ज्या}\,\text{य} - \frac{१}{२^२}\text{स्प}^२\,\frac{\text{ष}}{२}\,\text{ज्या}\,२\text{य}+\cdots\right)$$

यदि $\text{न} = \text{ज्या}\,\text{ष}$

१२। सिद्ध करो कि

$$\int_0^{\frac{\pi}{२}}\text{ला}(१+\text{न}_0\text{ज्या}^२\text{य})\,\text{ताय}=\frac{\pi}{४}\text{ला}\left\{(१+\text{न}_0)(१+\text{न}_१)^{\frac{१}{२}}(१+\text{न}_२)^{\frac{१}{४}}(१+\text{न}_३)^{\frac{१}{८}}\cdots\right\}$$

$$\text{जहां}\quad \text{न}_{\text{द}+१}=\frac{\text{न}_\text{द}^२}{४(\text{न}_\text{द}+१)}$$

यहां ४१वें प्रक्रम के (४) समीकरण से $\int_0^{\frac{\pi}{२}}\text{ला}(१+\text{न}_0\text{ज्या}^२\text{य})\text{ताय}$ $=\int_0^{\frac{\pi}{२}}\text{ला}(१+\text{न}\,\text{कोज्या}^२\text{य})\text{ताय}$ फिर इन दोनों को जोड़ कर एक नियम परम्परा बनावो।

१३। १२वें और ९वें प्रश्न से सिद्ध करो कि

$$\left\{\frac{१+(१+\text{न}_0)^{\frac{१}{२}}}{२}\right\}^४=(१+\text{न}_0)\;(१+\text{न}_१)^{\frac{१}{२}}(१+\text{न}_२)^{\frac{१}{४}}(१+\text{न}_३)^{\frac{१}{८}}\cdots\cdots$$

१४। सिद्ध करो कि

$$\left\{\text{फ}(\text{अ})\text{फ}(\text{अ}+\tfrac{\text{ग}}{\text{न}})\text{फ}(\text{अ}+\tfrac{२\text{ग}}{\text{न}})\cdots\cdots\text{फ}(\text{अ}+\tfrac{\text{न}-१}{\text{न}}\text{ग})\right\}^{\frac{१}{\text{न}}}<\frac{१}{\text{ग}}\int_\text{अ}^{\text{अ}+\text{ग}}\text{फ}(\text{य})\text{ताय}$$

यदि न का मान अनन्त हो तो।

१५। प्रथमाध्याय के ३३वें प्रश्न से पहले यह सिद्ध करो कि

$$\int \text{इ}^{\text{कय}}\text{कोज्या}\,\text{अय}\,\text{ताय}=\frac{\text{इ}^{\text{कय}}\text{कोज्या}(\text{अय}-\text{ष})}{(\text{अ}^२+\text{क}^२)^{\frac{१}{२}}}+\text{स्थि},\ \text{जहां}\ \text{स्प}\,\text{ष}=\frac{\text{अ}}{\text{क}}$$

फिर इस पर से यह सिद्ध करो कि $इ^{कय}$कोज्याअय ताय इस के चल का चल फिर उस के चल का चल यों न वार तक जो चल होगा उस का प्रमाण

$$\frac{इ^{कय}कोज्या(अय-नष)}{(अ^{२}+क^{२})^{\frac{न}{२}}} + गा + गा_{१}य + गा_{२}य^{२} + गा_{३}य^{३} + \cdots$$

$$+ गा_{न-१}य^{न-१}$$ यह होगा ।

जहां गा, $गा_{१}$, $गा_{२}$ इत्यादि स्थिराङ्क हैं ।

१६ । ८वें से सिद्ध करो कि

$$लाज्याय = ला\tfrac{१}{२} - कोज्या२य - \tfrac{१}{२}कोज्या४य - \tfrac{१}{३}कोज्या६य - \tfrac{१}{४}कोज्या८य \cdots,$$ और

$$लाकोज्याय = ला\tfrac{१}{२} + कोज्या२य - \tfrac{१}{२}कोज्या४य + \tfrac{१}{३}कोज्या६य - \tfrac{१}{४}कोज्या८य + \cdots$$

१७ । सिद्ध करो कि यदि किसी श्रेढ़ी का न संख्यक पद

$$\frac{त(त+अ)(त+२अ)\cdots\cdots(त+नअ)}{द(द+अ)(द+२अ)\cdots\cdots(द+नअ)}$$ यह हो तो यह श्रेढ़ी सान्त होगी

यदि द $>$ त+अ और यदि द $<$ त+अ तो श्रेढ़ी का मान अनन्त होगा ।

१८ । सिद्ध करो कि किसी श्रेढ़ी के न+१ संख्यक पद में न संख्यक पद का भाग देने से यदि लब्धि

$$\frac{य^{त}+आय^{त-१}+काय^{त-२}+\cdots}{य^{त}+अय^{त-१}+कय^{त-२}+\cdots}$$ यह हो तो यदि अ $>$ का+१ तो

श्रेढ़ी का मान सान्त और यदि अ $<$ का+१ तो अनन्त होगा ।

१९ । यदि $आ = \int_{अ}^{क} च^{२} ताय$, $का = \int_{अ}^{क} चज ताय$ और $गा = \int_{अ}^{क} ज^{२} ताय$ तो सिद्ध करो कि आ×गा $>$ $का^{२}$ ।

बीजगणित का $(अ_{१}^{२}+अ_{२}^{२}+\cdots+अ_{न}^{२})(क_{१}^{२}+क_{२}^{२}+\cdots+क_{न}^{२})$ $>(अ_{१}क_{१}+अ_{२}अ_{२}+\cdots अ_{न}क_{न})^{२}$ यह सिद्धान्त देखो ।

२० सिद्ध करो कि ।

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ ला कोस्पय ताय=०

२१। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \frac{२ \text{ अकताय}}{य^४+य^२(अ^२+क^२)+अ^२क^२} = \frac{\pi}{अ+क}$

२२। सिद्ध करो कि $\int_0 \frac{अ(१-क^२य^२) \text{ ताय}}{\sqrt{(अ^२-य^२)}} = \frac{\pi}{२}\left(१-\frac{अ^२क^२}{२}\right)$

२३। सिद्ध करो कि यदि न का मान अनन्त हो तो
$\frac{१}{न^६}\{१^५+२^५+३^५+\cdots+(न-१)^५\} = \frac{१}{६}$

२४। सिद्ध करो कि यदि न का मान अनन्त हो तो
$\frac{१+(१+\frac{१}{न})^२+(१+\frac{२}{न})^२+\cdots+(१+\frac{न-१}{न})^२}{१+(१+\frac{१}{न})^३+(१+\frac{२}{न})^३+\cdots+(१+\frac{न-१}{न})^३} = \frac{२८}{४५}$

२५। सिद्ध करो कि $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ कोज्यायलाकोज्यायताय=ला (२)—१

२६। सिद्ध करो कि
$\int$ लाज्यायताय=यला$\frac{१}{२}$–($\frac{१}{२}$ ज्या २ य+ $\frac{१}{२.४}$ ज्या ४ य+ $\frac{१}{३.६}$ ज्या ६ य+ · · ·)

२७। सिद्ध करो कि
$\int$ लाकोज्यायताय=यला$\frac{१}{२}$+$\frac{१}{२}$ज्या२य–$\frac{१}{२.४}$ज्या४य+$\frac{१}{३.६}$ज्या६य–$\frac{१}{४.८}$ज्या८य+· · ·

२८। सिद्ध करो कि $\int$ लास्पयताय= —ज्या२य—$\frac{१}{६}$ज्या६य— · · · · · ·

२९। सिद्ध करो कि $\frac{१}{२अ(ला२)^क} + \frac{१}{३अ(ला३)^क} + \frac{१}{४अ(ला४)^क}$ +···+अनन्त

इस श्रेढ़ी का मान सान्त होगा यदि अ 7१ और क का मान चाहे जो हो।

३०। $(अ-१)+(अ^{\frac{१}{२}}-१)+(अ^{\frac{१}{३}}-१)+(अ^{\frac{१}{४}}-१)+\cdots+(अ^{\frac{१}{न}}-१)$

यह सान्त होगा यदि न =∞ उ० नहीं।

३१। सिद्ध करो कि
$य+\frac{य^२}{\lfloor२}+\frac{य^३}{\lfloor३}+\frac{य^४}{\lfloor४}+\cdots$ यह सर्वदा सान्त होगा।

३२ । सिद्ध करो कि $\int इ^{-य}\{फ(य)+फ'(य)\}$ ताय$=इ^{य}$फ (य)

३३ । सिद्ध करो कि $\int_0^1 \frac{यइ^{य}ताय}{(१+य)^२} = \frac{इ—२}{२}$

३४ । सिद्ध करो कि यदि

फ(य)$=अ_0+अ_1य+अ_2य^2+अ_3य^3+\cdots+$ अनन्त यह सान्त हो तो $\int$फ(य)ताय इस का मान भी यदि श्रेढ़ी में ले आवें तो उस श्रेढ़ी का मान भी सान्त होगा

३५ । यदि $इ^{कय}$ ताय का न वार चल निकालैं तो सिद्ध करो कि उसका

मान $=\frac{इ^{कय}}{क^{न}} + आ_1य^{न-1}+आ_2य^{न-2}+\cdots+आ_{न-1}य+आ_न$

जहां $आ_1$, $आ_2$, इत्यादि स्थिराङ्क हैं।

३६ । एक आदमी अपने (अ) स्थान से पूर्व को चला । दूसरा जिस का (क) स्थान अ से ठीक उत्तर की ओर एक मील पर था वहां से उसके मिलने के लिये चला । पहले की प्रतिक्षण की गति को उसके और अ स्थान के सैक अन्तर के लघुरिक्थ से गुण देने और उसके और क स्थान के अन्तरवर्ग का भाग देने से जो लब्ध हो उतना प्रतिक्षण में दूसरा चलता था तो बताओ कि जब पहला अपने स्थान से एक मील गया उस समय दूसरा अपने स्थान से कितना गया होगा ।

उ० $\frac{\pi}{८}$ ला (२) $= \frac{२६}{१००}$ मील

३७ । अ स्थान से साथ ही घोड़ दौड़ में क, ख, और ग घोड़े दौड़े। किसी क्षण में अ स्थान से जितनी मील दूरी पर क होता था उस से और उसके वर्ग से उसके उस क्षण की गति को गुण दो तो वह क्रम से ख और ग की उस क्षण की गति होती है तो बतावो कि क और ख, फिर अ स्थान से क और ख, क और ग, और ख और ग कितनी कितनी दूरी पर मिलेंगे । उ० ख, ग $\frac{३}{२}$ । क, ग, $\sqrt{३}=१\frac{३}{४}$ और क, ख, २ मील दूरी पर मिलेंगे ।

इति चतुर्थोध्याय ।

पञ्चमाध्याय ।

दो वा अनेक चलराशियों के वश से चलानयन ।

वा द्विगुण चल ।

५८ । पिछले अध्यायों में उन चलानयनों का वर्णन है जिन में एक ही चल है अर्थात् जब तात्कालिक सम्बन्ध फ(य) इस चाल का है तब इस के चलानयन का वर्णन हो चुका । परन्तु चलनकलन से जहां दो चलराशि वा अनेक चलराशि के फल हों वहां सिद्ध है कि

$$स = फ(य,र) \text{ तो } \frac{ता^2स}{तायतार} = फा(य,र) \text{ वा } स = फ(य,र,ल) \text{ तो}$$

$$\frac{ता^3स}{तायतारताल} = फा(य,र,ल)$$ इस लिये अब इस अध्याय का मुख्य उद्देश्य यह है कि फा(य,र) वा फा(य,र,ल) पर से स के मान को ले आने का नियम जानना ।

५९ । चलनकलन के (६)वें अध्याय से प्रसिद्ध है कि

$$\frac{ता^2स}{ताय\,तार} = \frac{ता}{ताय}\left[\frac{तास}{तार}\right] = \frac{तास_1}{ताय} = फ(य,र)$$

इस लिये $स_1 = \int फ(य,र)\, ताय$ यह ठीक पिछले अध्यायों से सिद्ध हो जायगा यदि फल में र को स्थिर मान लो । मानो कि

$\int फ(य,र)\, ताय = फा(य,र)$ इस लिये $\frac{तास}{तार} = फा(य,र)$

$\therefore स = \int फा(य,र)\, तार$ यह भी पिछले अध्यायों से प्रसिद्ध हो जायगा यदि इस में य को स्थिर मानो ।

यह भी विचारो तो जिस तरह से $\frac{ता^2स}{तायतार}$ इस का मान चलनकलन से आता है ठीक उस के विपरीत क्रिया से यहां स आता है ।

६० । चलनकलन के (६)वें अध्याय से सिद्ध है कि $\frac{ता^2स}{तायतार} = \frac{ता^2स}{तारताय}$

इस लिये

$$स = \int फा(य,र) तार = \int\left\{\int फ(य,र) ताय\right\} तार \text{ वा, } स = \int\left\{फ(य,र) तार\right\} ताय$$

इस तरह से दो रीति स के जानने के लिये उत्पन्न होती है कि फ(य,र) में पहले र को स्थिर मान ताय के वश से चल ज्ञान करो फिर इस चल में य को स्थिर मान तार के वश से नया चल निकालो तो स का मान होगा। वा पहले य को स्थिर मान तार के वश से चल निकालो फिर इस में र को स्थिर मान ताय के वश से चलज्ञान करो तो यही स का मान होगा।

इस प्रकार से स का दो मान आया कल्पना करो कि एक मान श, दूसरा $श_1$ है तो विपरीत क्रिया से

$$\frac{ता^2 श_1}{ताय\,तार} = फ(य,र) = \frac{ता^2 श}{तार\,ताय}$$

अन्तर करने से

$$0 = \frac{ता^2 श_1}{ताय\,तार} - \frac{ता^2 श}{तायतार} = \frac{ता}{ताय}\left\{\frac{ताश_1}{तार} - \frac{ताश}{तार}\right\} = \frac{ता}{ताय}\left\{\frac{ताश_2}{तार}\right\}$$

यदि $श_1 - श = श_2$ इस लिये $\frac{ताश_2}{तार}$ यह य का कोई फल नहीं हो सक्ता सेवाय स्थिराङ्क के क्यों कि $\frac{ता(स्थि)}{ताय}$ यही शून्य के समान होता है इस लिये $\frac{ताश_2}{तार} = फि(र) \therefore श_2 = \int फि(र)\, तार + स्थि$ इस में भी स्थिराङ्क य का कोई फल होगा क्यों कि फि(र) में य को स्थिर माना है। मानो कि स्थि=फी(य) इस लिये $श_2 = श_1 - श = \int फि(र)\, तार + फी(य)$

$$= फा(र) + फी(य)$$

यदि $\int फि(र)\, तार = फा(र)$

इस से यह सिद्ध होता है कि दोनों विधियों से जो दो प्रकार के स उत्पन्न होते हैं उनका अन्तर दो फलों के योग तुल्य है जिन में एक केवल य का और दूसरा केवल र का फल है।

६१। पिछले प्रक्रम में जो स=$\int\{\int$फ(य,र) ताय$\}$तार यह है इस में यदि { } इस को उड़ा दें तो $\int\int$फ(य,र)ताय तार ऐसा होगा। अब यदि $\int\int$फ(य,र)तायतार इस का अर्थ ऐसा समझें कि पहले ताय के वश से चल निकाल फिर तार के वश से निकाला है तो { } इस के देने का कुछ आवश्यक नहीं। इसी प्रकार $\int\int$फ(य,र)तारताय इस से यह समझो कि पहले तार के वश से फिर ताय के वश से चल निकाला गया है। इसी तरह $\int\int\int$फ(य, र, ल)तायतारताल इस से समझना चाहिये कि पहले ताय, तब तार, और फिर ताल के वश से चल का मान अपेक्षित है अर्थात् फल के पास जो ता रहे उस के वश से पहले फिर ज्यों ज्यों दूर में ता हैं क्रम से उन के वश से चल निकालना है।

मैंने लाघव के लिये वार वार अनेक कोष्ठ न लिखकर यह संकेत मान लिया है इस में कुछ विशेष नहीं चाहे उलटे ही रीति से तुम उसी अर्थ को प्रकाश कर सक्ते हो अर्थात् जो ता सब से दूर हो उसी के वश से पहले फिर यथासन्नों के वश से।

जैसे यदि फ(य,र)=अय^{2}र+कर^{2}य तो

$\int\int$फ(य,र) ताय तार=$\int\int$(अय^{2}र+कर^{2}य)तायतार

$$=\int\left\{\frac{\text{अय}^3\text{र}}{3}+\frac{\text{कर}^2\text{य}^2}{2}\right\}\text{तार}$$

$$=\frac{\text{अय}^3\text{र}^2}{6}+\frac{\text{कर}^3\text{य}^2}{6}=\frac{\text{य}^2\text{र}^2}{6}(\text{अय}+\text{कर})$$ यह पहला स का मान हुआ।

और $\int\int$फ(य,र) तार ताय=$\int\int$(अय^{2}र+कर^{2}य)तारताय

$$=\int\left\{\frac{\text{अय}^2\text{र}^2}{2}+\frac{\text{कर}^3\text{य}}{3}\right\}\text{ताय}$$

$$=\frac{\text{अय}^3\text{र}^2}{6}+\frac{\text{कर}^3\text{य}^2}{6}=\frac{\text{य}^2\text{र}^2}{6}(\text{अय}+\text{कर})$$ यह दूसरा स हुआ।

यहां पर स्थिराङ्कों को छोड़ दिया है

६२ । जब साठवें प्रक्रम से सिद्ध है कि

$$\int\int फ(य,र)तारताय - \int\int फ(य,र)तायतार = फि(य) + फी(र)$$

इस लिये $\int\int फ(य,र)तारताय = \int\int फ(य,र)तायतार + फि(य) + फी(र)$ (१)

यहां यदि $\int फ(य,र)\ ताय = फा(य,र)$ और $\int फ(य,र) तार = फा_1(य,र)$

तो $\int\int फ(य,र)\ ताय\ तार = \int फा(य,र)\ तार = फा_2(य,र)$

और $\int\int फ(य,र)तारताय = \int फा_1(य,र) ताय = फा_3(य,र)$

इस लिये $\int_{ग}^{घ}\int_{अ}^{क} फ(य,र)तारताय = \int_{ग}^{घ}\{फा_1(य,क) - फा_1(य,अ)\}\ ताय$

वा $\int_{ग}^{घ}\int_{अ}^{क} फ(य,र)तारताय = \int_{ग}^{घ} फा_1(य,क)ताय - \int_{ग}^{घ} फा_1(य,अ)ताय$

$= फा_3(घ,क) - फा_3(ग,क) - फा_3(घ,अ) + फा_3(ग,अ), \cdots\cdots\cdots$ (२)

इसी तरह $\int_{अ}^{क}\int_{ग}^{घ} फ(य,र)तायतार = \int_{अ}^{क}\{फा(घ,र) - फा(ग,र)\}\ तार$

$= \int_{अ}^{क} फा(घ,र)\ तार - \int_{अ}^{क} फा(ग,र)\ तार$

$= फा_2(घ,क) - फा_2(घ,अ) - फा_2(ग,क) + फा_2(ग,अ) \cdots\cdots\cdots$ (३)

परंतु (१) से

$$फा_3(य,र) = फा_2(य,र) + फि(य) + फी(र)$$

इस लिये, $फा_3(घ,क) = फा_2(घ,क) + फि(घ) + फी(क)$

$$फा_3(ग,क) = फा_2(ग,क) + फि(ग) + फी(क)$$

$$फा_3(घ,अ) = फा_2(घ,अ) + फि(घ) + फी(अ)$$

$$फी_3(ग,अ) = फा_2(ग,अ) + फि(ग) + फी(अ)$$

इन का उत्थापन (२) में देने से

$$\{फा_3\ (घ,क) + फा_3\ (ग,अ)\} - \{फा_3(ग,क) + फा_3(घ,अ)\}$$

$$= \{फा_2\ (घ,क) + फा_2\ (ग,अ)\} - \{फा_2\ (घ,अ) + फा_2(ग,क\}$$

अर्थात् (२) और (३) तुल्य हुये। इस लिये इस पर से

$$\int_{ग}^{घ}\int_{अ}^{क} फ(य,र)\ तार\ ताय = \int_{अ}^{क}\int_{ग}^{घ} फ(य,र)तायतार$$

यह सिद्ध हुआ।

६३। ऊपर के प्रक्रम से जो सिद्धान्त उत्पन्न हुआ उसे (२) प्रक्रम के ऐसा श्रेढ़ी द्वारा भी प्रकाश कर सक्ते हैं।

मानो फ(य,र) में य के मान, अ से लेकर क तक बीच में

अ, $य_1$, $य_2$, ······ $य_{न-1}$, क हैं।

जहां $य_1 - अ = च_1$, $य_2 - य_1 = च_2$ ········ $क - य_{न-1} = च_न$ ।

और र के मान ग से लेकर घ तक बीच में

ग, $र_1$, $र_2$, ········ $र_{म-1}$, घ हैं

जहां $र_1 - ग = ज_1$, $र_2 - र_1 = ज_2$ ········ $घ - र_{म-1} = ज_म$

अब यहां यह इच्छा है कि $च_त ज_द फ(य_{त-1}, र_{द-1})$ इस में द के स्थान में १, २, ३ ··· म का और त के स्थान में १, २, ३, ··· न का उत्थापन देने से जो श्रेढ़ियां उत्पन्न होंगीं उन का योग जानें। यहां न और म का मान अनन्त है।

लाघव के लिये कल्पना करो कि श्रेढ़ियों का कोई पद बनाने के लिये च ज फ(य,र) यह एक मुद्रा अर्थात् सांचा है जहां च, ज, और य, र के स्थान में जिस पद का मान जानना होगा उस की संख्या रख देना होगा और $य_0 = अ$, $र_0 = ग$ ऐसा समझना। इस सांचे में च के स्थान में△य और ज के स्थान में△र को रख दें जैसा कि चलनकलन में प्रसिद्ध है तो सांचे का रूप△य△र फ(य,र) ऐसा होगा।

जैसे किसी खिलौने के सांचे में मट्टी, लोहा चांदी, सोना इत्यादि के रखने से जितनी मूर्त्तियां बनेंगी सब के मोल और रंग में तो फ़र्क़ परन्तु रूप एकसा होगा इसी तरह इस सांचे से जितने पद बनेंगे सब के रंग और मोल अर्थात् मान तो भिन्न भिन्न परन्तु रूप एकसा होगा।

सांचे में त के स्थान में १, द के स्थान में १, २, ३ · ··· म का उत्थापन देने से

$$च_1 \{ ज_1 फ(अ,ग) + ज_2 फ(अ,र_1) + ज_3 फ(अ,र_2) + \cdots\cdots ज_म फ(अ,र_{म-1}) \} \cdots\cdots (1) \text{ श्रेढ़ी}$$

त के स्थान में २ का और द के स्थान में १,२, ··· म का उत्थापन देने से

$$च_2 \{ ज_1 फ(य_1,ग) + ज_2 फ(य_1,र_1) + ज_3 फ(य_1,र_2) + \cdots + ज_म फ(य_1,र_{म-1}) \cdots (2) \text{ श्रेढ़ी}$$

इसी तरह $च_3 \{ ज_1 फ(य_2, ग) + ज_2 फ(य_2, र_1) + ज_3 फ(य_2, र_2) + \cdots$

$\vdots \qquad + ज_म फ(य_2, र_{म-1}) \cdots$ (३) श्रेढ़ी

$च_{त+1} \{ ज_1 फ(य_त, ग) + ज_2 फ(य_त, र_1) + ज_3 फ(य_त, र_2 र_2) + \cdots$

$\vdots \qquad ज_म फ(य_त, र_{म-1}) \} \cdots$ (त+१) श्रेढ़ी

$च_न \{ ज_1 फ(य_{न-1} ग) + ज_2 फ(य_{न-1}, र_1) + ज_3 फ(य_{न-1},) + \cdots$

$+ ज_म फ(य_{न-1}, र_{म-1}) \} \cdots$ (न) श्रेढ़ी

इन में यदि $म=\infty$ तो $\{ \;\}$ कोष्ठकान्तर्गत (त+१) श्रेढ़ी का योग (२) प्रक्रम से $\int_ग^घ फ(य_त, र)$ तार यह होगा । कल्पना करो कि यह $फा(य_त)$ के समान है तो त के स्थान में ०, १, २, ... न—१ का उत्थापन देने से क्रम से ऊपर के श्रेढ़ियों का मान ।

$च_1 फा(अ)$

$च_2 फा(य_1)$

$च_3 फा(य_2)$

$\vdots$

$च_न फा(य_{न-1})$

इन का योग अब (२) ही प्रक्रम से सिद्ध है कि यदि $न=\infty$ तो $\int_अ^क फा(य)$ताय यह अर्थात् $\int_अ^क \int_ग^घ फ(य, र)$तारताय यह होगा ।

इसी तरह यदि हर एक श्रेढ़ियों का $\{ \;\}$ कोष्ठकान्तर्गत ऊर्ध्वाधर एक एक पदों का पहले योग करो तो

$\int_अ^क फ(य, ग)$ ताय$=फा_1(ग), फा_1(र_1)$ इत्यादि होगा फिर सब पदों का योग अर्थात् श्रेढ़ियों का योग$=ज_1 फा_1(र) + ज_2 फा_1(र_1) + ज_3 फा_1(र_2) + \cdots$
$+ \int ज_म फा_1(र_{म-1}) = \int_ग^घ फा_1(र)$ तार$= \int_ग^घ \int_अ^क फ(य, र)$तायतार

परन्तु श्रेढ़ियों के तिर्यक् पदों का योग कर वा ऊर्ध्वाधर पदों का योग कर फिर उन को जोड़ने से श्रेढ़ियों का योग तो एक ही होगा इस लिये

$$\int_अ^क \int_ग^घ फ(य, र)\text{तारताय} = \int_ग^घ \int_अ^क फ(य, र)\text{तायतार}$$

यह सिद्ध हुआ ।

६४ । जब निश्चय है कि $\int फ(य, र)$तार इस में य स्थिर मान है तो $\int_{फ_1(य)}^{फ_2(य)} फ(य, र)$तार इस का भी मान जान सक्ते हैं फिर इस पर से

$\int_{अ}^{क}\int_{फ_1(य)}^{फ_2(य)}$ फ(य,र)तायतार इस का मान आ जायगा ।

यहां भी यदि (६३)वें प्रक्रम से श्रेढ़ियों की परम्परा बनावोगे तो विशेष इतना ही होगा कि ग, $र_1, र_2$ इत्यादि प्रत्येक श्रेढ़ियों में य के वश से भिन्न भिन्न होंगे जैसे (त+१) श्रेढ़ी के { } अन्तर्गत

$ज_1फ(य_त,ग)+ज_2फ(य_त,र_1)+ज_3फ(य_त,र_2)+\cdots ज_मफ(य_त,र_{म-1})$

इन पदों में

$ग=फ_1(य_त), ज_1=र_1—फ_1(य_त), ज_2=र_2—र_1, \cdots ज_म=फ_2(य_त)—र_{म-1}$

ऐसा मानना पड़ेगा फिर पूर्ववत् सिद्ध कर सक्ते हो कि इन पदों का योग

$\int_{फ_1(य_त)}^{फ_2(य_त)}$ फ(य$_त$,र) तार यही होगा ।

कल्पना करो कि $\int_{फ_2(य_त)}^{फ_2(य_त)}$ फ(य$_त$,र)तार

यह फा(य$_त$) के समान है तो, त के स्थान में ०,१,२,··· न-१ का उत्थापन देने से

$\int_{अ}^{क}\int_{फ_1(य)}^{फ_2(य)}$ फ(य,र)तारताय का भी मान जान जाओगे ।

६५ । यदि फ(य,र)=फा(य)×फि(र) तो तार के वश चलनयन से

$\int$फा(य)×फि(र)तार=फा(य)$\int$फि(र)तार=फा(य)फि$_1$(र)+फा(य)स्थि जहां

$\int$फि(र)तार=फि$_1$(र)+स्थि इस लिये

$\int_{ग}^{घ}$फा(य) फि(र)तार=फा(य){फि$_1$(घ)—फि$_1$(ग)}

और $\int$फा(य){फि$_1$(घ)-फि$_1$(ग)} ताय={फि$_1$(घ)-फि$_1$(ग)} $\int$फा(य)ताय

={फि$_1$(घ)—फि$_1$(ग)} {फा$_1$(य)+स्थि$_1$}

यदि $\int$फा(य)ताय=फा$_1$(य)+स्थि$_1$

इस लिये

$\int_{अ}^{क}\int_{ग}^{घ}$फ(य)×फि(र)तारताय={फि$_1$(घ)-फि$_1$(ग)} {फा$_1$(क)-फा$_1$(अ)}

=$\int_{ग}^{घ}$फि(र)तार×$\int_{अ}^{क}$फा(य)ताय

इस से यह सिद्ध होता है कि यदि अ, क, ग, घ स्थिराङ्क हों अर्थात् य, वा र का कोई फल न हों तो

$\int_{अ}^{क}\int_{ग}^{घ}$ फा(य)×फि(र)तारताय= $\int_{अ}^{क}$ फा(य)ताय× $\int_{ग}^{घ}$ फि(र)तार ऐसा होगा ।

९६ । इसी तरह जहां तीन चलराशि के वश से

$\int_{अ}^{क}\int_{ग}^{घ}\int_{त}^{थ}$ फ(य,र,ल)तालतारताय ऐसा स्वरूप हो वहां यह समझना चाहिये कि पहले र,य को स्थिर मान ताल के वश से त,थ के भीतर सान्तचल निकाला गया फिर इस में य,ल को स्थिर मान, तार के वश से ग,घ के भीतर सान्तचल का मान निकाला गया फिर इस का ताय के वश से अ,क के भीतर सान्तचल का मान निकाला गया है । इसे त्रिगुणचल कहते हैं ।

९३प्रक्रम से फ(य,र,ल)△ल△र△य△इस सांचे से जो श्रेढ़ियां बनेंगी उन का (२)प्रक्रम से यदि योग करो तो वह

$\int_{अ}^{क}\int_{ग}^{घ}\int_{त}^{थ}$ फ(य,र,ल)तालतारताय इसी के समान होगा । विद्यार्थियों को चाहिये कि श्रेढ़ियों का रूप फैला कर उनके योग पर से परस्पर सब की तुलना कर अपना मन भरलें ।

यहां पूर्व युक्ति से प्रसिद्ध है कि थ, और त य,र के फल, घ और ग केवल य के फल हो सक्ते हैं परन्तु क और अ सर्वदा स्थिराङ्क ही रहेंगे ।

९७ । इस प्रक्रम में कुछ उदाहरण दिखलाते हैं ।

(१) $\int\int$ (य^{२}+र+र^{२})तायतार इसका क्या मान होगा ।

यहां फ(य,र)=य^{२}+र+र^{२}

इस लिये $\int$फ(य,र) ताय=य$\left(\frac{य^{२}}{३}+र+र^{२}\right)$ र को स्थिर मानने से

फिर $\int\int$फ(य,र)तायतार= $\int$य$\left(\frac{य^{२}}{३}+र+र^{२}\right)$तार=य$\left[\frac{य^{२}र}{३}+\frac{र^{२}}{२}+\frac{र^{३}}{३}\right]$

य को स्थिर मानने से

इस लिये $स = \frac{य^3र}{३} + \frac{र^2य}{२} + \frac{र^3य}{३}$

यहां यदि $\int\int फ(य,र)तारताय$ इस का मान जानना हो तो

पहले $\int फ(य,र)तार = \int (य^2+र+र^2)तार = य^2र + \frac{र^2}{२} + \frac{र^3}{३}$, य को स्थिर

मानने से फिर $\int\int फ(य,र)तारताय$

$$= \int \left[(य^2र + \frac{र^2}{२} + \frac{र^3}{३} \right] ताय = \frac{य^3र}{३} + \frac{र^2य}{२} + \frac{र^3य}{३}$$ यह दूसरा

स हुआ। दोनों स्थानों में स्थिराङ्क छोड़ दिया है।

स्थिराङ्क लेने से पहले

$$\int फ(य,र)\ ताय = \int (य^2+र+र^2)ताय = \frac{य^3}{३} + र\,य + र^2\,य + स्थि$$

$$फिर\ \int\int फ(य,र)तायतार = \int (\frac{य^3}{३} + र\,य + र^2य + स्थि)\ तार$$

$$= \frac{य^3र}{३} + \frac{र^2य}{२} + \frac{र^3य}{३} + स्थि\ र + स्थि_१ = \frac{य^3र}{३} + \frac{र^2य}{२} + \frac{र^3य}{३} + फी\ (र)$$

यह स का मान हुआ।

$$फिर \int फ(य,र)\ तार = \int (य^2+र+र^2)तार = य^2र + \frac{र^2}{२} + \frac{र^3}{३} - स्थि_२$$

$$और\ \int\int फ(य,र)तारताय = \int (य^2र + \frac{र^2}{२} + \frac{र^3}{३} - स्थि_२)\ ताय$$

$$= \frac{य^3र}{३} + \frac{र^2य}{२} + \frac{र^3य}{३} - स्थि_२य - स्थि_३ = \frac{य^3र}{३} + \frac{र^2य}{२} + \frac{र^3य}{३} - फा\ (य)$$

इस लिये दोनों स का अन्तर फी (र)+फा(य) यह हुआ।

(२) $\int\int फ(य,र)तारताय$ इस का क्या मान होगा

यदि फ(य,र) =ज्यायर

यहां $\int$ फ(य,र) तार $=\int$ ज्यायर तार $=-\dfrac{\text{कोज्यायर}}{\text{य}}$ ।

और $\int\int$ फ(य,र) तार ताय $=-\int\dfrac{\text{कोज्या(यर)ताय}}{\text{य}}$

$=-\int\dfrac{\text{कोज्यायर तायर}}{\text{यर}}=-\int\dfrac{\text{कोज्यालताल}}{\text{ल}}$, यदि ल=यर,

परन्तु

$$\frac{\text{कोज्याल}}{\text{ल}}=\frac{\text{१}-\frac{\text{ल}^{\text{२}}}{\underline{|\text{२}}}+\frac{\text{ल}^{\text{४}}}{\underline{|\text{४}}}-\frac{\text{ल}^{\text{६}}}{\underline{|\text{६}}}+\cdots}{\text{ल}}=\frac{\text{१}}{\text{ल}}-\frac{\text{ल}}{\underline{|\text{२}}}+\frac{\text{ल}^{\text{३}}}{\underline{|\text{४}}}-\frac{\text{ल}^{\text{५}}}{\underline{|\text{६}}}+\cdots$$

इस लिये

$$-\int\frac{\text{कोज्यालताल}}{\text{ल}}=-\int\frac{\text{कोज्यायरतायर}}{\text{यर}}=\text{लाल}+\frac{\text{ल}^{\text{२}}}{\text{२}\underline{|\text{२}}}-\frac{\text{ल}^{\text{४}}}{\text{४}\underline{|\text{४}}}+\frac{\text{ल}^{\text{६}}}{\text{६}\underline{|\text{६}}}-\cdots$$

$=-\text{लायर}+\dfrac{\text{य}^{\text{२}}\text{र}^{\text{२}}}{\text{२}\underline{|\text{२}}}-\dfrac{\text{य}^{\text{४}}\text{र}^{\text{४}}}{\text{४}\underline{|\text{४}}}+\dfrac{\text{य}^{\text{६}}\text{र}^{\text{६}}}{\text{६}\underline{|\text{६}}}-\cdots\cdots$, यही उत्तर हुआ।

(३) (२)उदाहरण में $\int_{\text{अ}}^{\text{क}}\int_{0}^{\text{१}}$ फ(य,र)तारताय का क्या मान होगा।

(२) उदाहरण से $\int$ फ(य,र)तार $=-\dfrac{\text{कोज्यायर}}{\text{य}}$

इस लिये $\int_0^{\text{१}}$ फ(य,र)तार $=-\dfrac{\text{कोज्याय}}{\text{य}}+\dfrac{\text{१}}{\text{य}}$

और $\dfrac{\text{१}}{\text{य}}-\dfrac{\text{कोज्याय}}{\text{य}}=-\dfrac{\text{१}}{\text{य}}+\dfrac{\text{य}}{\underline{|\text{२}}}-\dfrac{\text{य}^{\text{३}}}{\underline{|\text{४}}}+\cdots\cdots+\dfrac{\text{१}}{\text{य}}$

$$=\frac{\text{य}}{\underline{|\text{२}}}-\frac{\text{य}^{\text{३}}}{\underline{|\text{४}}}+\frac{\text{य}^{\text{५}}}{\underline{|\text{६}}}-\frac{\text{य}^{\text{७}}}{\underline{|\text{८}}}+\cdots$$

इस लिये $\int\int_{0}^{१}$ फ(य,र)तारताय $= \frac{य^{२}}{२\underline{|२}} - \frac{य^{४}}{४\underline{|४}} + \frac{य^{६}}{\underline{|६}} - \frac{य^{८}}{८\underline{|८}} + \cdots$

और $\int_{अ}^{क}\int_{0}^{१}$ फ(य,र)तारताय $= \frac{क^{२}-अ^{२}}{२\underline{|२}} - \frac{क^{४}-अ^{४}}{४\underline{|४}} + \frac{क^{६}-अ^{६}}{६\underline{|६}} - \frac{क^{८}-अ^{६}}{८\underline{|८}} + \cdots$

यही उत्तर हुआ।

(४) $\int_{0}^{अ}\int_{0}^{य}\int_{0}^{य+र} इ^{य+र+ल}$ तालतारताय इस का मान जानना चाहिये।

यहां $\int इ^{य+र+ल}$ ताल $= इ^{य+र+ल}$, य, और र को स्थिर मानने से

इस लिये $\int_{0}^{य+र} इ^{य+र+ल}$ ताल $= इ^{२य+२र} - इ^{य+र}$ ।

$\int\int_{0}^{य+र} इ^{य+र+ल}$ तालतार $= \int इ^{२य+२र}$ तार $- \int इ^{य+र}$ तार

$= \frac{इ^{२य+२र}}{२} - इ^{य+र}$

इस लिये

$\int_{0}^{य}\int_{0}^{य+र} इ^{य+र+ल}$ तालतार $= \frac{इ^{४य}}{२} - \frac{इ^{२य}}{२} - इ^{२य} + इ^{य} = \frac{इ^{४य}}{२}$

$- \frac{३}{२} इ^{२य} + इ^{य}$

और $\int\int_{0}^{य}\int_{0}^{य+र} इ^{य+र+ल}$ तालतारताय $= \frac{इ^{४य}}{८} - \frac{३इ^{२य}}{४} + इ^{य}$

इस लिये

$\int_{0}^{अ}\int_{0}^{य}\int_{0}^{य+र} इ^{य+र+ल}$ तालतारताय $= \frac{इ^{४अ}}{८} - \frac{१}{८} - \frac{३}{४} इ^{२अ} + \frac{३}{४} + इ^{अ} - १$

$= \frac{इ^{४अ}}{८} - \frac{३}{४} इ^{२अ} + इ^{अ} - \frac{३}{८}$

यही उत्तर हुआ।

(५) यदि फ(य,र) $= (य^{२}+य)(र^{३}+र)$

तो $\int_{अ}^{क}\int_{ग}^{घ}$ फ(य,र)तारताय इस का क्या मान होगा।

यहां $\int$ फ(य,र)तार $= (य^{२}+य)\left\{\frac{र^{४}}{४} + \frac{र^{२}}{२}\right\}$

$$\therefore \int_{ग}^{घ} फ(य,र)तार = (य^2+य)\left\{\frac{घ^4-ग^4}{४}+\frac{घ^2-ग^2}{२}\right\}$$

$$फिर \int\int_{ग}^{घ} फ(य,र)तारताय = \left\{\frac{य^3}{३}+\frac{य^2}{२}\right\}\left\{\frac{घ^4-ग^4}{४}+\frac{घ^2-ग^2}{२}\right\}$$

इस लिये $\int_{अ}^{क}\int_{ग}^{घ} फ(य,र)तारताय$

$$=\left\{\frac{क^3-अ^3}{३}+\frac{क^2-अ^2}{२}\right\}\left\{\frac{घ^4-ग^4}{४}+\frac{घ^2+ग^2}{२}\right\}$$ यह

$\int_{अ}^{क}(य^2+य)ताय \times \int_{ग}^{घ}(र^3+र)तार$ इस के तुल्य होता है ।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

१ । $\dfrac{(\frac{अ}{य}-कय)ताय}{\sqrt{(अ+य\sqrt{ग}-कय^2)(कय^2+य\sqrt{ग}-अ)}}$ इस का मान क्या होगा ।

यहां $र=\frac{अ}{य}+कय$ कल्पना करो तो चल का मान $कोज्या^{-1}\dfrac{र}{\sqrt{(ग+४अक)}}$

२ । $\int\dfrac{२(म^2-१)स्पयताय}{१+म^2स्प^2य}$ इस का क्या मान होगा।

उ० $ला\,(कोज्या^2य+म^2ज्या^2य)$

३ । सिद्ध करो कि $\displaystyle\int\frac{ताय}{य^{न+१}\sqrt{१+(\frac{अ}{य})^{२न}}}=\frac{१}{नअ^न}ला\frac{य^न}{अ^न+\sqrt{अ^{२न}+य^{२न}}}$

४ । सिद्ध करो कि $\int\frac{१-स्पय}{१+स्पय}ताय = ला\,ज्या\,(\frac{\pi}{४}+य)-य$

५ । सिद्ध करो कि $\displaystyle\frac{३}{२}\frac{य^{\frac{१}{२}}}{\sqrt{(अ^3-य^3)}}=ज्या^{-१}\frac{य^{\frac{३}{२}}}{अ^{\frac{३}{२}}}$ (मानो कि $र=य^{\frac{३}{२}}$)

६ । सिद्ध करो कि

$$\int\frac{४अ^3ताय}{य^4+अ^2य^2+अ^4}=ला\,\frac{य^2+अय+अ^2}{य^2-अय+अ^2}+\frac{२}{\sqrt{३}}स्प^{-१}\frac{यअ\sqrt{३}}{अ^2-य^2}$$

७ । सिद्ध करो कि यदि $प = \frac{\pi}{न}$ और $न = \infty$ तो

$$\left\{ज्याप ज्या२प ज्या३प \cdots ज्याप(न-१)\right\}^{\frac{1}{न}} = \frac{१}{२}$$

८ । सिद्ध करो कि यदि $प = \frac{\pi}{न}$ और न = अनन्त तो

$$\left\{२प ब२प २प३प \cdots २पप(न-१)\right\}^{\frac{1}{न}} = १$$

९ । सिद्ध करो कि यदि $प = \frac{\pi}{न}$ और $न = \infty$ तो

$$कोज्याप कोज्या२प कोज्या३प \cdots कोज्याप(न-१)$$
$$= ज्याप ज्या२प ज्या३प \cdots ज्याप(न-१)$$

१० । सिद्ध करो कि यदि फ(य,र) = यर कोज्यायर तो यदि स्थिराङ्क को छोड़ दें तो $फ(य,र) - \int\int फ(य,र) तार ताय = कोज्यायर\ (यर+१)$

११ । सिद्ध करो कि यदि $\int_{क}^{अ} फ(य) ताय = १$ और फ(य) सर्वदा धन हो तो

$$\left\{\int_{क}^{अ} फ(य) कोज्यागय ताय\right\}^2 + \left\{\int_{क}^{अ} फ(य) ज्यागय ताय\right\}^2 \angle\ १$$

यहां (२) प्रक्रम और (४०) वें प्रक्रम से पहले सिद्ध करो कि

$$\int_{क}^{अ} फ(य) ताय = (अ-क)\ फ\{क+प\ (अ-क)\} = १$$

इस लिये $\int_{क}^{अ} \{फ(य)\}^2 ताय = \int_{क}^{अ} फ(य)\ फ(य) ताय =$

$$= फ\{क+प\ (अ-क)\} \int_{क}^{अ} फ(य) ताय = फ\{क+प\ (अ-क)\}$$

और $\int_{क}^{अ} कोज्या^2 गय ताय = \frac{१}{ग} \int_{क}^{अ} कोज्या^2 गय ताय ग$

$$= \frac{१}{ग}\left\{\frac{गअ-कग}{२} + \frac{ज्या२अग - ज्या२गक}{४}\right\}$$

(क्यों कि $\int कोज्या^2 गय ताय ग = \frac{यग}{२} + \frac{ज्या२गय}{४}$)

∴ इस लिये

$$\int_{क}^{अ} \{फ(य)\}^2 ताय \times \int_{क}^{अ} कोज्या^2 गय ताय$$
$$= फ\{क+प(अ-क)\}\ \left\{\frac{अ-क}{२} + \frac{ज्या२अग - ज्या२गक}{४ग}\right\}$$

यह $\left\{\int_{क}^{अ} फ(य) कोज्यागय ताय\right\}^2$ इस से बड़ा होगा (४ अध्याय के १९ वें प्रश्न से)

इसी तरह $\int ज्या^2 गय ताय = \frac{१}{ग} \int ज्या^2 गय ताय ग = \frac{यग}{२} - \frac{ज्या२गय}{४}$

इस लिये $\int_{क}^{अ} ज्या^{२} गय\ ताय = \frac{१}{ग}\left\{\frac{अग-कग}{२} - \frac{ज्या२अग-ज्या२कग}{४}\right\}$

इस लिये $\int_{क}^{अ}\{फ(य)\}^{२} ताय \times \int_{क}^{अ} ज्या^{२} गय\ ताय$

$\angle फ\{क+ष(अ-क)\}\left\{\frac{अ-क}{२} - \frac{ज्या२अग-ज्या२कग}{४ग}\right\}$

यह बड़ा होगा $\left\{\int_{क}^{अ} फ(य)\ ज्या\ गय\ ताय\right\}^{२}$ इस से।

और तब दोनों का योग $\angle फ\{क+ष(अ-क)\}\{अ-क\}=१$ यह बड़ा होगा $\left\{\int_{क}^{अ} फ(य)\ कोज्यागयताय\right\}^{२} + \left\{\int_{क}^{अ} फ(य)\ ज्यागयताय\right\}^{२}$ इस से।

१२। सिद्ध करो कि यदि $\int_{क}^{अ} फ(य) ताय=१$ और फ(य) सर्वदा धन हो तो

$\int_{क}^{अ} य^{२} फ(य)\ ताय > \left\{\int_{क}^{अ} यफ(य)\ ताय\right\}^{२}$

६८। चलराशिकलन अब समाप्त हो गया। पिछले अध्यायों में जो अनेक सिद्धान्त और उदाहरण दिखला आये हैं उन्हीं का प्रपञ्च सब अगले अध्यायों में हैं।

जैसे व्यक्तगणित में परिकर्माष्टक और बीजगणित में वर्गप्रकृति पर्यन्त गणित मुख्य हैं आगे सब दोनों गणितों में इन्हीं का सर्वत्र प्रपञ्च है इसी तरह यहां भी आगे सर्वत्र पिछले सिद्धान्तों का ही प्रपञ्च है इस लिये विद्यार्थियों को चाहिये कि इन पांचो अध्यायों में जो कुछ लिखा गया है उन का अच्छी तरह से ध्यान देकर अभ्यास करें विना उन के जाने अगले अध्यायों का ज्ञान होना अत्यन्त दुर्घट है।

इति पञ्चमाध्याय।

षष्ठाध्याय ।
वक्रक्षेत्रों का चापानयन ।

६९ । चलनकलन के १६वें अध्याय से सिद्ध है कि यदि किसी वक्र का र=फ(य) ऐसा समीकरण हो तो $\frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}}=\sqrt{१+\frac{\text{तार}^२}{\text{ताय}^२}}$ ऐसा होगा

इस लिये ताचा= $\sqrt{\text{ताय}^२+\text{तार}^२}$ । यहां पर वक्र के समीकरण पर से ताचा का मान फा(य) ताय ऐसा होगा फिर पिछले अध्यायों के बल

से $\int\text{ताचा}=\text{चा}+\text{स्थि}=\int\text{ताय}\sqrt{१+\frac{\text{तार}^२}{\text{ताय}^२}}=\int\sqrt{\text{ताय}^२+\text{तार}^२}=\int\text{तायफा(य)}$

यह सिद्ध हो जायगा ।

$\text{चा}+\text{स्थि}=\int\text{ताय}\sqrt{१+\frac{\text{तार}^२}{\text{ताय}^२}}$ इस लिये कल्पना करो कि

जब $\text{य}=\text{य}_१$ तब $\text{चा}=\text{चा}_१$ और जब $\text{य}=\text{य}_२$ तब $\text{चा}=\text{चा}_२$

इस लिये $\text{चा}_२-\text{चा}_१=\int_{\text{य}_१}^{\text{य}_२}\text{ताय}\sqrt{१+\frac{\text{तार}^२}{\text{ताय}^२}}$

इस लिये दो कोटियों के बीच में वक्र का जो चाप है उसके जानने के लिये स्थिराङ्क का कुछ भी प्रयोजन नहीं केवल $\text{य}_१$ और $\text{य}_२$ जो उन दो कोटियों के भुज हों उन के बीच $\int\text{ताय}\sqrt{१+\frac{\text{ताय}^२}{\text{ताय}^२}}$ इस का मान ले आना चाहिये ।

७० । जिस परवलय (Parabola) का $\text{र}^२=४\,\text{अय}$ यह समीकरण है उसके चाप का प्रमाण जानना है ।

यहां $\text{र}^२=४\,\text{अय}$ $\therefore\ \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\frac{२\text{अ}}{\text{र}}$ और $१+\frac{\text{तार}^२}{\text{ताय}^२}=\frac{\text{र}^२+४\text{अ}^२}{\text{र}^२}=\frac{४\text{अय}+४\text{अ}^२}{४\,\text{अय}}$

$=\frac{य+अ}{य}$ । इस लिये $\int \left(\frac{य+अ}{य}\right)^{\frac{1}{2}} ताय = \int \frac{य+अ}{\sqrt{य^2+अय}} ताय$

$$=\int \frac{य+\frac{अ}{2}}{\sqrt{य^2+अय}} ताय + \int \frac{\frac{अ}{2} ताय}{\sqrt{य^2+अय}} = \sqrt{य^2+यअ} + \frac{अ}{2} ला \left(य+\frac{अ}{2}+\sqrt{य^2+अय}\right)$$

(६)वें प्रक्रम के (३) उदाहरण से।

इस लिये $चा+स्थि=\sqrt{य^2+यअ}+\frac{अ}{2}ला\left(य+\frac{अ}{2}+\sqrt{य^2+अय}\right)$ ...... (१)

इस में यदि $य=0$ तो क्षेत्र लक्षण से $चा=0$

इस लिये $स्थि=\frac{अ}{2} ला \left(\frac{अ}{2}\right)$

इस का उत्थापन (१) में देने से

$$परवलय\ का\ चाप=\sqrt{य^2+यअ}+\frac{अ}{2} ला \left(य+\frac{अ}{2}+\sqrt{य^2+अय}\right)-\frac{अ}{2} ला \frac{अ}{2}$$

$$=\sqrt{य^2+यअ}+\frac{अ}{2} ला \left(\frac{2य+अ+2\sqrt{य^2+अय}}{अ}\right)$$

इस में यदि य=अ तो नाभी से जो लम्ब य अक्ष पर होगा वह एक भाग में जहां परवलय को काटेगा वहां से शिरः स्थान तक का चाप मान

$अ\sqrt{2}+\frac{अ}{2} ला \left(\frac{3अ+2\sqrt{2अ^2}}{अ}\right)=अ\sqrt{2}+\frac{अ}{2} ला (3+2\sqrt{2})$ यह हुआ

७१। चक्रालद का चापानयन (चलनकलन में २८६ प्रक्रम का ११वां वक्र देखो।

इस में $\frac{ताचा}{ताय}=\sqrt{\frac{2क}{य}}$ (चलनकलन का ३८८ पृष्ठ देखो)

इस लिये $\int ताचा=चा=(2क)^{\frac{1}{2}} य^{-\frac{1}{2}} ताय=2 (2क)^{\frac{1}{2}} (य)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{8कय}$

यहां क्षेत्र लक्षण से जब $य=0$ तब $चा=0$ इस लिये स्थिराङ्क का मान शून्य होगा।

७२। जिस वक्र का $र=अय^{\frac{म}{न}}$ यह समीकरण है उसके चाप का आनयन।

$$र=अय^{\frac{म}{न}} \therefore \frac{तार}{ताय}=\frac{म}{न} अय^{\frac{म}{न}-1}$$

और $\sqrt{\frac{\text{ता}\text{र}^2}{\text{ता}\text{य}^2}+१} = \sqrt{१+\frac{\text{म}'^2\text{अ}^2}{\text{न}'^2}\text{य}^{\frac{२\text{म}'-२\text{न}'}{\text{न}'}}}$

अब $\int \text{ताय}\sqrt{१+\frac{\text{म}'^2\text{अ}^2}{\text{न}'^2}\text{य}^{\frac{२\text{म}'-२\text{न}'}{\text{न}'}}}$ इस का मान १२वें प्रक्रम के (४)

उदाहरण में यदि $\frac{\text{प}}{\text{ब}}=\frac{१}{२}$। $\text{म}=१$, $\text{न}=\frac{२\text{म}'-२\text{न}'}{\text{न}'}$ माना तो

$\frac{\text{म}}{\text{न}}=\frac{\text{न}'}{२(\text{म}'-\text{न}')}$ यह यदि अभिन्न और धन हो तो विदित हो जायगा।

अथवा $\frac{\text{न}'}{२(\text{म}'-\text{न}')}+\frac{१}{२}$ यह अभिन्न और ऋण हो तो भी उसी उदाहरण से

चल का मान विदित हो जायगा। यदि पहला ऋण अभिन्न दूसरा धन अभिन्न तो भी द्वितीयाध्याय से चल का मान विदित हो जायगा।

जैसे यदि $\frac{\text{म}'}{\text{न}'}=\frac{३}{२}$। तो $\frac{\text{म}'-\text{न}'}{\text{न}'}=\frac{१}{२}$ $\therefore \frac{\text{न}'}{२(\text{म}'-\text{न}')}=१$ अभिन्न

इस लिये $\sqrt{१+\frac{\text{ता}\text{र}^2}{\text{ता}\text{य}^2}}=\sqrt{१+\frac{९\text{अ}^2}{४}\text{य}}=\frac{३\text{अ}}{२}\sqrt{\frac{४}{९\text{अ}^2}+\text{य}}$

इस लिये $\int \text{ताचा}=\text{चा}+\text{स्थि}=\frac{३\text{अ}}{२}\int\left[\frac{४}{९\text{अ}^2}+\text{य}\right]^{\frac{१}{२}}\text{ताय}=\text{अ}\left[\frac{४}{९\text{अ}^2}+\text{य}\right]^{\frac{३}{२}}$

इस में यदि $\text{य}=०$ तो क्षेत्रलक्षण से $\text{चा}=०$ इस लिये

$\text{स्थि}=\text{अ}\times\frac{८}{२७\text{अ}^3}=\frac{८}{२७\text{अ}^2}$। इस का उत्थापन देने से

$\text{चा}=\left\{\left[\frac{४}{९\text{अ}^2}+\text{य}\right]^{\frac{३}{२}}-\frac{८}{२७\text{अ}^3}\right\}$

७३। कातन्वली (Catenary) के चाप का आनयन।

इस में $र=\frac{ग}{२}\left(इ^{\frac{य}{ग}}+इ^{-\frac{य}{ग}}\right)$ इस लिये $\frac{तार}{ताय}=\frac{१}{२}\left(इ^{\frac{य}{ग}}-इ^{-\frac{य}{ग}}\right)$

और $\sqrt{१+\frac{तार^२}{ताय^२}}=\sqrt{\frac{१}{४}\left(इ^{\frac{२य}{ग}}+इ^{-\frac{२य}{ग}}+२\right)}=\frac{१}{२}\left(इ^{\frac{य}{ग}}+इ^{-\frac{य}{ग}}\right)$ इसलिये

$\int ताय\sqrt{१+\frac{तार^२}{ताय^२}}=चा+स्थि=\frac{ग}{२}\left(इ^{\frac{य}{ग}}-इ^{-\frac{य}{ग}}\right)$

यदि मूल विन्दु से गणना करें जहां य=० तो यहां स्थिराङ्क शून्य होगा।

७४। जिस वक्र का $य^{\frac{२}{३}}+र^{\frac{२}{३}}=अ^{\frac{२}{३}}$ यह समीकरण है उस के चाप का आनयन।

यहां $\frac{तार}{ताय}=-\frac{र^{\frac{१}{३}}}{य^{\frac{१}{३}}}$ इस लिये $\frac{ताचा}{ताय}=\left\{\frac{य^{\frac{२}{३}}+र^{\frac{२}{३}}}{य^{\frac{२}{३}}}\right\}^{\frac{१}{२}}=\frac{अ^{\frac{१}{३}}}{य^{\frac{१}{३}}}$

इस लिये $च=अ^{\frac{१}{३}}\int ताय\, य^{-\frac{१}{३}}=\frac{३}{२}अ^{\frac{१}{३}}य^{\frac{२}{३}}+स्थि$

जहां य=० उस विन्दु से यदि गणना करें तो स्थिराङ्क शून्य होगा।

चलितवृत्त का व्यासार्द्ध यदि स्थिरवृत्त के व्यासार्द्ध का चतुर्थांश हो तो इस वक्र को एक प्रकार का अति चक्रालद कहते हैं। (चलनकलन में २८६ प्रक्रम का १३वां वक्र देखो)।

७५। ६६वें प्रक्रम से यह भी कह सकते हो कि यदि र के वश से तात्कालिक सम्बन्ध का ज्ञान करें तो $\frac{ताचा}{तार}=\sqrt{१+\frac{ताय^२}{तार^२}}$ ऐसा होगा। इसलिये

$$चा=\int तार\sqrt{१+\frac{ताय^२}{तार^२}}+स्थि \text{ ।} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (१)$$

इसी तरह यदि य और र तीसरे चलराशि का फल हों तो चलनकलन के १५३ वें प्रक्रम के (३) समीकरण से

$$\int ताचा=चा=\int\sqrt{\left\{\frac{ताय^२}{ताका^२}+\frac{तार^२}{ताका^२}\right\}}ताका+स्थि \cdots\cdots (२)$$

ऐसे ही चलनकलन के १५५ वें प्रक्रम से यदि ध्रुवीय भुज युग्म हों तो

$$\text{चा} = \int \left\{ \text{श्रु}^2 + \frac{\text{ताश्रु}^2}{\text{ताप}^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \text{ताप} + \text{स्थि} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$\text{वा}\ \text{चा} = \int \left\{ 1 + \text{श्रु}^2 \frac{\text{ताप}^2}{\text{ताश्रु}^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \text{ताश्रु} + \text{स्थि} \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

अथवा यदि स्प भ = श्रु· $\frac{\text{ताप}}{\text{ताश्रु}}$ जहां भ, श्रुति और स्पर्शरेखा से उत्पन्न कोण का मान है तो

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}} = \frac{\text{श्रु}}{\text{ज्याभ}}\ \text{इस लिये}\ \ \text{चा} = \int \frac{\text{श्रु}}{\text{ज्याभ}}\ \text{ताप} + \text{स्थि} \\ \text{और}\ \frac{\text{ताचा}}{\text{ताश्रु}} = \frac{1}{\text{कोज्याभ}},\ \text{इस लिये चा} = \int \frac{\text{ताश्रु}}{\text{कोज्याभ}} + \text{स्थि} \end{array}\right\} \cdots\cdots (5)$$

चलनकलन के १३१ वें प्रक्रम से ज्याभ = $\frac{\text{ल}}{\text{श्रु}}$, और कोज्याभ= $\frac{\sqrt{\text{श्रु}^2 - \text{ल}^2}}{\text{श्रु}}$

इन का उत्थापन (५) वें में देने से

$$\text{चा} = \int \frac{\text{श्रु}^2 \text{ताप}}{\text{ल}} + \text{स्थि},\ \text{और चा} = \int \frac{\text{श्रुताश्रु}}{\sqrt{\text{श्रु}^2 - \text{ल}^2}} + \text{स्थि} \cdots\cdots (6)$$

यहां ध्रुवविन्दु से स्पर्शरेखा पर पड़े लम्ब का मान ल है।
(चलनकलन का १४वां अध्याय देखो)

इन सब पर से जहां जिस प्रकार से चलानयन में लाघव देख पड़े वहां उस प्रकार से चाप का मान निकालो।

जिन प्रकारों में मूल लेने से ताचा का मान आता है वहां बीजगणित से स्पष्ट है कि एक ताचा का मान धन और दूसरा ऋण होगा इस लिये बुद्धिमानों को चाहिये कि प्रश्न के अनुसार जहां जिस का प्रयोजन हो उसको ग्रहण करें जैसे ७३ वें प्रक्रम में कातन्वली के चापा-

नयन में जो $\frac{१}{४}(इ^{\frac{२य}{ग}} + इ^{-\frac{२य}{ग}} + २)$ इस का मूल लिया है वह धन माना है इस पर से जो चाप का मान आता है वह भी धन आता है अर्थात् मूलबिन्दु से य अक्ष में दहनी ओर यदि य का मान धन मानो तो र अक्ष से दहने भाग में जो वक्र का भाग है उस के चाप का मान वह है। और इसी में यदि मूल ऋण मानो तो चाप का मान पूर्व ही के तुल्य ऋण आवेगा ऐसी दशा में य, अक्ष में मूल बिन्दु से वाम भाग में य और र अक्ष से वाम भाग में जो वक्र खण्ड है उस के चाप का मान समझना चाहिये। (चलनकलन में २८६ प्रक्रम का १३वां वक्र देखो)

७६। लाघुरिक्थिक वक्र के चाप का आनयन

यहां वक्र का समीकरण $र = अइ^{\frac{य}{क}}$ (चलनक०, २८६ प्र०, १ वक्र)

इस लिये $\frac{तार}{ताय} = \frac{अ}{क} इ^{\frac{य}{क}} = \frac{र}{क} \therefore \frac{\sqrt{र^२+क^२}}{क} = \sqrt{१+\frac{तार^२}{ताय^२}}$

और $चा = \frac{१}{क}\int\sqrt{(र^२+क^२)}ताय$ देखो यहां फल में र का मान है और चल ताय के वश से निकालना है इस लिये र के स्थान में जब तक कोई तत्तुल्य य के फल का उत्थापन न दोगे तब तक चल ज्ञान कठिन है। इस लिये यहां ७५ प्रक्रम के (१) समीकरण से

$\frac{ताय}{तार} = \frac{क}{र}$ और $\sqrt{१+\frac{ताय^२}{तार^२}} = \frac{ताचा}{तार} = \frac{\sqrt{र^२+क^२}}{र}$

$$और\ चा = \int\frac{\sqrt{(र^२+क^२)}तार}{र} = \int\frac{क^२तार}{र\sqrt{(र^२+क^२)}} + \int\frac{रतार}{\sqrt{(र^२+क^२)}}$$

$$= क\cdot ला\frac{र}{क+\sqrt{(र^२+क^२)}} + \sqrt{र^२+क^२} + स्थि$$ (१२ वें प्रक्रम का २३वां अभ्यास के लिये जो प्रश्न हैं उसे देखो)

अब यहां जो $य = ०$ तो $र = अ$ इस में मानो कि $चा = चा_१$ तो

$$चा_1 = क\cdot ला \frac{अ}{क+\sqrt{अ^2+क^2}} + \sqrt{अ^2+क^2} + स्थि$$

इस लिये $चा - चा_1 = क\cdot ला \frac{र(क+\sqrt{अ^2+क^2})}{अ(क+\sqrt{र^2+क^2})} + \sqrt{र^2+क^2} - \sqrt{अ^2+क^2}$ ।

६७। दीर्घवृत्त के चाप का आनयन।

दीर्घवृत्त का समीकरण, $र^2 = \frac{क^2}{अ^2}(अ^2 - य^2) \therefore \frac{र^2}{क^2} + \frac{य^2}{अ^2} = 1$

(चलनकलन का १०८वां प्रक्रम देखो)

यहां यदि $य = अ ज्या प$ और $र = क कोज्या प$ मान लें तो

$\frac{ताय}{ताप} = अ कोज्या प, \frac{तार}{ताप} = - क ज्या प$। अब ७५वें प्रक्रम के (२) समीकरण से $\frac{ताचा}{ताप} = \sqrt{(अ^2 कोज्या^2 प + क^2 ज्या^2 प)}$

इस लिये

$$चा = \int \sqrt{(अ^2 कोज्या^2 प + क^2 ज्या^2 प)} ताप = अ \int \sqrt{(कोज्या^2 प + \frac{क^2}{अ^2} ज्या^2 प)} ताप$$

$$= अ \int \sqrt{(1 - इ^2 ज्या^2 प)} ताप$$ यहां $1 - इ^2 = \frac{क^2}{अ^2}$ और अ = बृहद्व्यासार्द्ध,

क = लघुव्यासार्द्ध, $स्पप = \frac{कय}{अर} = \frac{य}{\sqrt{अ^2 - य^2}}$ ।

यहां $\sqrt{(1 - इ^2 ज्या^2 प)}$ इस का मान द्वियुक्पद सिद्धान्त से बिना फैलाये चल ज्ञान नहीं हो सक्ता इस लिये फैलाने से

$$चा = अ \int (1 - \frac{1}{2} इ^2 ज्या^2 प - \frac{1.1}{2.4} इ^4 ज्या^4 प - \frac{1.1.3}{2.4.6} इ^6 ज्या^6 प - \cdots) ताप$$

यदि 0 और अ के बीच य के मान में अथवा 0 और $\frac{\pi}{2}$ के बीच प के मान में यदि ऊपर के चल का ज्ञान ३५वें प्रक्रम के लघूकरण सिद्धान्त से वा १२वें प्रक्रम के १५वें उदाहरण से करो तो दीर्घवृत्त के परिधि का चतुर्थांश

$$= \text{अ}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ताष} - \frac{1}{2}\text{इ}^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^2\text{षताष} - \frac{1.1}{2.4}\text{इ}^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^4\text{षताष} - \frac{1.1.3}{2.4.6}\text{इ}^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^6\text{ष} \cdots\right\}$$

$$= \frac{\pi\text{अ}}{2}\left[1 - \frac{1}{2^2}\text{इ}^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4^2}\text{इ}^4 - \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}\text{इ}^6 - \frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}\text{इ}^8 - \cdots\right]$$

इस का चौगुना करने से यदि प $= 2\pi$अ $=$ वृहद्व्यास से उत्पन्न वृत्त की परिधि । तो दीर्घवृत्त की परिधि

$$= \text{प}\left(1 - \frac{1}{2^2}\text{इ}^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4^2}\text{इ}^4 - \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}.\text{इ}^6 - \cdots\right)$$

इस में यदि आदि के दो पदों को केवल ग्रहण करो और इ^4 का मान बहुत अल्प होने के कारण और पदों को छोड़ दो तो दीर्घवृत्त की परिधि $= \text{प}\left(1 - \frac{1}{2^2}\text{इ}^2\right)$

$$= \text{प}\left[\frac{4 - \text{इ}^2}{4}\right] = \text{प}\left[\frac{3 - \frac{\text{क}^2}{\text{अ}^2}}{4}\right] = \text{प}\left[\frac{3\text{अ}^2 - \text{क}^2}{4\text{अ}^2}\right]$$

यों अनेक प्रकार बना सक्ते हो (दीर्घवृत्त लक्षण देखो)

८८ । अतिपरवलय के चाप का आनयन ।

इस का समीकरण $\text{र}^2 = \frac{\text{क}^2}{\text{अ}^2}(\text{य}^2 - \text{अ}^2)$ वा $\frac{\text{य}^2}{\text{अ}^2} - \frac{\text{र}^2}{\text{क}^2} = 1$

(चलनकलन का १११ वां प्रक्रम देखो)

यहां यदि य $=$ अछेष और र $=$ कस्पष ऐसा मानो तो

$\frac{\text{ताय}}{\text{ताष}} = -$ अस्पषछेष, $\frac{\text{तार}}{\text{ताष}} = \text{कछे}^2\text{ष}$

इस लिये ७५ वें प्रक्रम के (२) समीकरण से

$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताष}} = \sqrt{(\text{अ}^2\text{स्प}^2\text{षछे}^2\text{ष} + \text{क}^2\text{छे}^4\text{ष})}$

$$=\sqrt{(\text{अ}^{२}\text{स्प}^{४}\text{ष}+\text{अ}^{२}\text{स्प}^{२}\text{ष}+\text{क}^{२}\text{स्प}^{४}\text{ष}+\text{२क}^{२}\text{स्प}^{२}\text{ष}+\text{क}^{२})}$$

$$=\sqrt{\left\{(\text{अ}^{२}+\text{क}^{२})\text{स्प}^{४}\text{ष}+\text{स्प}^{२}\text{ष}(\text{अ}^{२}+\text{२क}^{२})+\text{क}^{२}\right\}}$$

$$=\text{क}\sqrt{\left\{\frac{\text{अ}^{२}+\text{क}^{२}}{\text{क}^{२}}\text{स्प}^{४}\text{ष}+\frac{\text{अ}^{२}+\text{२क}^{२}}{\text{क}^{२}}\text{स्प}^{२}\text{ष}+\text{१}\right\}}$$

इस को फैलाने से सर्वंच स्पष का कोई घात रहेगा जिस के चल का ज्ञान ३७ वें प्रक्रम के (३) उदाहरण से स्पष्ट हो जायगा।

अथवा $\text{र}=\frac{\text{क}}{\text{अ}}\sqrt{\text{य}^{२}-\text{अ}^{२}}$ इसी समीकरण से यहां

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\frac{\text{क}}{\text{अ}}\,\frac{\text{य}}{\sqrt{(\text{य}^{२}-\text{अ}^{२})}}\;\therefore\;\frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}}=\left\{\frac{(\text{क}^{२}+\text{अ}^{२})\,\text{य}^{२}-\text{अ}^{४}}{\text{अ}^{२}\,(\text{य}^{२}-\text{अ}^{२})}\right\}^{\frac{१}{२}}$$

$$=\left[\frac{\text{इ}^{२}\text{य}^{२}-\text{अ}^{२}}{\text{य}^{२}-\text{अ}^{२}}\right]^{\frac{१}{२}}\ \text{यदि}\ \frac{\text{क}^{२}+\text{अ}^{२}}{\text{अ}^{२}}=\text{इ}^{२}$$

इस लिये

$$\text{चा}=\int\sqrt{\left[\frac{\text{इ}^{२}\text{य}^{२}-\text{अ}^{२}}{\text{य}^{२}-\text{अ}^{२}}\right]}\,\text{ताय}=\text{अ}\int\sqrt{\left[\frac{\text{इ}^{२}\text{ल}^{२}-\text{१}}{\text{ल}^{२}-\text{१}}\right]}\,\text{ताल}\text{।}\ \{\text{यदि य}=\text{अल}\}$$

$$=\text{अइ}\int\text{ल}\,\frac{\sqrt{(\text{१}-\frac{\text{१}}{\text{इ}^{२}\text{ल}^{२}})}}{\sqrt{\text{ल}^{२}-\text{१}}}\,\text{ताल}$$

$$=\text{अ}\left\{\int\frac{\text{इल}}{\sqrt{(\text{ल}^{२}-\text{१})}}\left(\text{१}-\frac{\text{१}}{\text{२}}\,\frac{\text{१}}{\text{इ}^{२}\text{ल}^{२}}-\frac{\text{१.१}}{\text{२.४}}\,\frac{\text{१}}{\text{इ}^{४}\text{ल}^{४}}-\frac{\text{१.१.३}}{\text{२.४.६}}\,\frac{\text{१}}{\text{इ}^{६}\text{ल}^{६}}-\cdots\right)\text{ताल}\right\}$$

$$=\text{अ}\left\{\int\frac{\text{इल}}{\sqrt{(\text{ल}^{२}-\text{१})}}\,\text{ताल}-\frac{\text{१}}{\text{२इ}}\int\frac{\text{ताल}}{\text{ल}\sqrt{\text{ल}^{२}-\text{१}}}\right.$$

$$\left.-\frac{\text{१.१}}{\text{२.४इ}^{३}}\int\frac{\text{ताल}}{\text{ल}^{३}\sqrt{\text{ल}^{२}-\text{१}}}-\frac{\text{१.१.३}}{\text{२.४.६इ}^{५}}\int\frac{\text{ताल}}{\text{ल}^{५}\sqrt{\text{ल}^{२}-\text{१}}}\cdots\right\}$$

यहां $\int \frac{\text{ताल}}{\text{ल}^{\text{म}}\sqrt{\text{ल}^2-1}} = \frac{1}{\text{म}-1}\frac{\sqrt{\text{ल}^2-1}}{\text{ल}^{\text{म}-1}} + \frac{\text{म}-2}{\text{म}-1}\int\frac{\text{ताल}}{\text{ल}^{\text{म}-2}\sqrt{\text{ल}^2-1}}$ इस लघूकरण सिद्धान्त से आदि पद को छोड़ और सब पदों के चल का मान जान सक्ते हो।

और आदि पद $\frac{\text{इल}}{\sqrt{\text{ल}^2-1}}$ ताल इस का चल इ$\sqrt{\text{ल}^2-1}$ यह है।

यहां म का मान विषम है इस लिये सब खण्डों में अन्त में $\int\frac{\text{ताल}}{\text{ल}\sqrt{\text{ल}^2-1}}$ $=$ छे$^{-1}$ल यह होगा

यदि ० और अनन्त के बीच ल के मान में चाप का मान अपेक्षित हो तो ऊपर के लघूकरण सिद्धान्त से

$$\text{अइल} - \text{चा} = \frac{\pi\text{अ}}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\text{इ}} + \frac{1.1}{2^2.4}\cdot\frac{1}{\text{इ}^3} + \frac{1.1.3^2}{2^2.4^2.6}\frac{1}{\text{इ}^5}\right.$$

$$\left. + \frac{1.1.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2.8}\cdot\frac{1}{\text{इ}^7} + \cdots\right)$$ यह सिद्ध होगा।

७६। आर्किमिडिज़ के सर्पिल का चापानयन (The Spiral of Archimedes.) (चलनकलन में २८६ प्रक्रम का (४) वक्र देखो)

इस का समीकरण $\text{अ}_{\text{ु}} = \text{अ}\text{प}$ इस लिये $\frac{\text{ताअ}_{\text{ु}}}{\text{ताप}} = \text{अ}$। ७५ प्रक्रम के (३) समीकरण से $\frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}} = \sqrt{\left\{\text{अ}_{\text{ु}}^2 + \frac{\text{ताअ}_{\text{ु}}^2}{\text{ताप}^2}\right\}}$

इस लिये $\text{चा} = \int\sqrt{\left\{\text{अ}_{\text{ु}}^2 + \frac{\text{ताअ}_{\text{ु}}^2}{\text{ताप}^2}\right\}}\,\text{ताप} = \int\sqrt{(\text{अ}_{\text{ु}}^2 + \text{अ}^2)}\,\text{ताप}$

$= \text{अ}\int\sqrt{(1+\text{प}^2)}\text{ताप} = \frac{\text{अप}}{2}\sqrt{1+\text{प}^2} + \frac{\text{अ}}{2}\,\text{ला}\{\text{प}+\sqrt{1+\text{प}^2}\} + \text{स्थि}$।

यदि प = ० तो चा = ० इस लिये स्थिराङ्क का मान शून्य होगा।

८० । जिस वक्र का $\text{भु} = \text{अ}(१+\text{कोज्याप})$ यह समीकरण है उस के चाप का मान जानना। (चलनकलन के २८५ प्रक्रम का (१) उदाहरण देखो) यहां $\frac{\text{ताभु}}{\text{ताप}} = -\text{अज्याप}$ इस लिये

$$\text{चा} = \int\sqrt{\{\text{अ}^2(१+\text{कोज्याप})^2 + \text{अ}^2\text{ज्या}^2\text{प}\}}\,\text{ताप}$$

$$= \text{अ}\int\sqrt{(२+२\text{कोज्याप})}\text{ताप} = २\text{अ}\int\text{कोज्या}\frac{\text{प}}{२}\text{ताप} = ४\,\text{अज्या}\frac{\text{प}}{२} + \text{स्थि}।$$

यदि चाप की गणना वहां से करें जहां $\text{प} = 0$ तो स्थिराङ्क का मान शून्य होगा। मूल का मान ऋण लेने से दूसरी दिशा का चाप $= -४\,\text{अज्या}\frac{\text{प}}{२}$ ऐसा होगा। यहां यदि $\text{प} = \pi$ तो ऊपर के आधे का प्रमाण $= ४\text{अज्या}\frac{\text{प}}{२} = ४\text{अ}$ और ऋण मान से नीचे के आधे का प्रमाण $= ४\text{अज्या}\frac{\text{प}}{२} = ४\text{अ}$।

इस लिये समग्र चाप का प्रमाण $= ८\text{अ}$ यह हुआ।

इस वक्र को अङ्गरेज़ी में क्यारडियाइड (Cardioid.) कहते हैं।

८१ । लाघुरिक्थिक सर्पिल के चाप आनयन।

(चलनकलन में २८६ प्रक्रम का (२) वक्र देखो)

यहां $\text{भु} = \text{अ}\cdot\text{इ}^{\frac{\text{प}}{\text{क}}}$, इस लिये $\text{प} = \text{क}\cdot\text{ला}\frac{\text{भु}}{\text{अ}}$ और $\frac{\text{ताप}}{\text{ताभु}} = \frac{\text{क}}{\text{भु}}$

इस लिये ७५ प्रक्रम के (४) समीकरण से

$$\text{चा} = \int\sqrt{\left[\text{भु}^2\frac{\text{ताप}^2}{\text{ताभु}^2} + १\right]}\text{ताभु} = \int\sqrt{(\text{क}^2+१)}\text{ताभु} = \text{भु}\sqrt{\text{क}^2+१}$$

भुजों का प्रमाण $\text{भु}_१$, $\text{भु}_२$ मानो तो उन के बीच के चाप का प्रमाण $(\text{भु}_२ - \text{भु}_१)\sqrt{\text{क}^2+१}$ यह होगा। . . . . (१)

चलनकलन से सिद्ध है कि इस सर्पिल में भुज और स्पर्शरेखा से उत्पन्न कोण की स्पर्शरेखा सर्वदा स्थिरक है इस लिये इस कोण को यदि भ कहो तो (१) को $(\text{भु}_२ - \text{भु}_१)\,\text{छेभ}$ ऐसे भी लिख सक्ते हो

८२ । अपचक्रावृत्त (Epicycloid.) के चाप का आनयन।

(चलनकलन में २८६ प्रक्रम का (१३) वक्र देखो)

इस में चलनकलन से सिद्ध कर सक्ते हो कि मूल विन्दु से स्पर्शरेखा पर पड़े लम्ब का मान

$= ल = (अ+२क) ज्या \frac{अष}{२क}$ और $असु^2 = अ^2 + ४क (अ+क) ज्या^2 \frac{अष}{२क}$

इस लिये $ल^2 = \frac{ग^2(असु^2 - अ^2)}{ग^2 - अ^2}$ जहां $ग = अ + २क$

अब ७५वें प्रक्रम के (६)वें समीकरण से

$$चा = \frac{\sqrt{(ग^2 - अ^2)}}{अ} \int \frac{असु\, ताअसु}{\sqrt{(ग^2 - असु^2)}} = - \frac{\sqrt{(ग^2 - अ^2)}}{अ} \sqrt{(ग^2 - असु^2)} + स्थि$$

परमनीच और परमउच्च में जहां क्रम से अ, अ+२क=ग असु ति हैं इन के बीच में

$$चाप\ का\ मान = \int_{अ}^{अ+२क} \frac{असु\, ताअसु}{\sqrt{(ग^2 - असु^2)}} = \frac{\sqrt{(ग^2 - अ^2)}}{अ} \sqrt{ग^2 - अ^2} = \frac{ग^2 - अ^2}{अ}$$

$$= \frac{(अ^2 + ४अक + ४क^2 - अ^2)}{अ} = \frac{४क(अ+क)}{अ}$$ इस लिये इस का दूना

$\frac{८क(अ+क)}{अ}$ यह अपचक्राभास के पूरे चाप का प्रमाण है जिस की उत्पत्ति चलितवृत्त के एक वार समग्र भ्रमण करने से होगी ।

८३। इसी प्रकार अतिचक्राभास (Hypocycloid) के चापानयन में भी

$ल^2 = \frac{ग^2(अ^2 - असु^2)}{अ^2}$, जहां $ग = अ - २क$

मानो कि $ग^2 < अ^2$ तो $\frac{ताचा}{ताअसु} = \pm \frac{\sqrt{अ^2 - ग^2}}{अ} \frac{असु}{\sqrt{(असु^2 - ग^2}}$ इस पर से पूर्ववत्

$चा = \pm \frac{\sqrt{अ^2 - ग^2}}{अ} \sqrt{असु^2 - ग^2} + स्थि$ और चलितवृत्त के एक वार घूम जाने में

$चाप = \frac{८क(अ-क)}{अ}$ ।

यदि $ग^2 > अ^2$ तो पहले सम्बन्ध को अर्थात् $\frac{ताचा}{तास्मु}$ इस के स्थान को

$\pm \frac{\sqrt{ग^2 - अ^2}}{अ} \quad \frac{स्मु}{\sqrt{(ग^2 - स्मु^2)}}$ ऐसे लिख सक्ते हो। इस स्थिति में क > अ तब

चलितवृत्त के एक वार घूम जाने में वक्र के चाप का प्रमाण $\frac{८क(क-अ)}{अ}$ यह

होगा। जब अ=२क तब ग=0 और ल=0। ऐसी स्थिति में

$\frac{ताचा}{तास्मु} = १$ इस लिये चा=स्मु+स्थि। और चलितवृत्त के एक वार घूम जाने में

चा= २ अ = स्थिरवृत्त का व्यास।

यदि अ=क तो ल= $\frac{१}{0}$ और $ग^2 = अ^2$, स्मु=अ। ऐसी स्थिति में अति

चक्राभास विन्दु रूप होगा।

जब $ल^2 = \frac{ग^2(स्मु^2 - अ^2)}{ग^2 - अ^2} \therefore स्मु^2 - ल^2 = \frac{स्मु^2 ग^2 - स्मु^2 अ^2 - ग^2 स्मु^2 + ग^2 अ^2}{ग^2 - अ^2}$

$= \frac{अ^2(ग^2 - स्मु^2)}{ग^2 - अ^2} \therefore \sqrt{ग^2 - स्मु^2} = \frac{\sqrt{ग^2 - अ^2}\sqrt{स्मु^2 - ल^2}}{अ}$ इस का उत्थापन

अपचक्राभास के चापमान में देने से चा= $\pm \frac{(ग^2 - अ^2)\sqrt{स्मु^2 - ल^2}}{अ^2}$ + स्थि

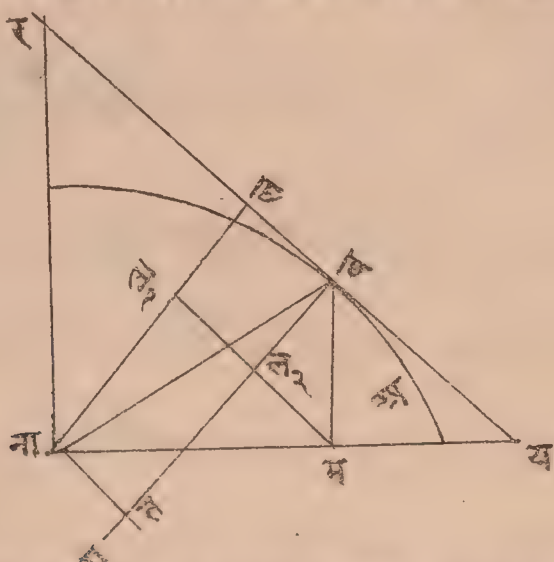
ऐसा भी हो सक्ता है।

८४। मूलविन्दु से वक्र के किसी स्पर्श रेखा पर पड़े लम्ब और लम्ब और य अक्ष से उत्पन्न कोण इन दोनों के वश से वक्र का चापानयन।

कल्पना करो किसी वक्र का ना मूलविन्दु नार=र अक्ष, नाय=य अक्ष। ब विन्दु की स्पर्शरेखा बल। ना से इस पर पड़ा हुआ लम्ब=ल और ∠लनाय=प है।

वक्र में मानो कि चाप की गणना अ विन्दु से आरम्भ हो कर ब को ओर है। ब विन्दु का भुज=य=नाम और कोटि=र=बम। म विन्दु

से नाल पर पड़े हुये लम्ब का मूल विन्दु ल_1 और मल_1 पर ब विन्दु से पड़े हुये लम्ब को वल_2 समझो। दोनों अक्षों को परस्पर लम्बरूप मान लो।



त्रिकोणमिति से, $\text{नाल}=\text{ल}=\text{नाम कोज्याप}+\text{वल}_2=\text{यकोज्याप}+\text{र ज्याप}$

और $\text{बल}=\text{च}=\text{नाम ज्याप}-\text{मल}_2=\text{यज्याप}-\text{र कोज्याप}$

चलनकलन से —कोस्पप$=\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ क्योंकि गणना अ से व की ओर है इस लिये ज्यों ज्यों र बढ़ेगा त्यों त्यों य की गति ऋण होगी।

$$\sqrt{१+\text{कोस्प}^2\text{प}}=\sqrt{१+\frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}}=\frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}}=-\text{ को छेप (ऊपर की युक्ति से)}$$

ताप के वश से ल का तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से।

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}}=\text{कोज्याप}\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}}-\text{यज्याप}+\text{ज्याप}\frac{\text{तार}}{\text{ताप}}+\text{रकोज्याप}$$

$$=\text{कोज्याप}\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}}+\text{ज्याप}\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\cdot\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}}-(\text{यज्याप}-\text{रकोज्याप})$$

$$=\text{कोज्याप}\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}}-\text{कोज्याप}\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}}-\text{च}=-\text{च}$$

एक वार और तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{\text{ता}^2\text{ल}}{\text{ताप}^2}=-\frac{\text{ताच}}{\text{ताप}}=-(\text{ज्याप}\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}}+\text{कोज्यापय}-\text{कोज्याप}\frac{\text{तार}}{\text{ताप}}+\text{ज्यापर})$$

$$= -\frac{\text{ज्या}^2\text{प}}{\text{ज्याप}}\,\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} - \text{कोज्याप}\,\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\cdot\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} - \text{ल}$$

$$= \text{ज्या}^2\text{पकोछेप}\,\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} + \text{कोज्याप कोस्पप}\,\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} - \text{ल}$$

$$= \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}}(\text{ज्या}^2\text{पकोछेप} + \text{कोज्या}^2\text{पकोछेप}) - \text{ल}$$

$$= \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}}\,\text{कोछेप} - \text{ल} = -\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}}\cdot\frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} - \text{ल} = -\text{ल} - \frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}}$$

इस लिये चलानयन से

$$\int\frac{\text{ता}^2\text{ल}}{\text{ताप}^2}\,\text{ताप} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} = -\int\text{लताप} - \int\frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}}\,\text{ताप} = -\int\text{लताप} - \text{चा} = -\text{च}$$

वा $\text{च} - \text{चा} = \int\text{लताप}$ ।

वक्र के समीकरण पर से और $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -\text{कोस्पप}$ इस से य और र का मान प के रूप में आ सक्ता है इन का उत्थापन ल में देने से ल भी कोई प का फल होगा फिर $\text{चा} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} + \int\text{ल ताप}$ इस पर से चाप का मान जान सक्ते हो। ब की ओर गणना करने से चा का ऋण चिन्ह छोड़ दिया है।

ऊपर जो प, ल इत्यादि का परस्पर सम्बन्ध दिखलाया है वह सब हम ने द्युचरचार नामक ग्रन्थ में लिखा है। बालावबोध के लिये यहां भी थोड़ा सा दिखला दिया है।

ऊपर जो $\text{ल} = \text{यकोज्याप} + \text{रज्याप}$

$\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} = -\text{च} = -\text{यज्याप} + \text{रकोज्याप}$

ये सिद्ध हुए हैं इन पर से

$\text{लकोज्याप} = \text{यकोज्या}^2\text{प} + \text{रज्यापकोज्याप}$

$\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}}\text{ज्याप} = -\text{चज्याप} = -\text{यज्या}^2\text{प} + \text{रज्यापकोज्याप}$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{अन्तर करने से} & \text{ल·कोज्याप} - \text{ज्याप}\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} = \text{य}\\ \text{इसी प्रकार} & \text{ल ज्याप} + \text{कोज्याप}\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} = \text{र}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(1)$$

यदि एक ऐसे वक्र का ज्ञान करना हो जिस के चाप पर से उद्दिष्ट $\int \text{लताप}$ इस का ज्ञान अपेक्षित हो जहां ल कोई प का फल है तो (१) समीकरण से स्पष्ट है कि ल, कोज्याप, ज्याप, और $\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}}$ इन सब पर से उस वक्र का भुज, और कोटि विदित हो जांयगे।

इसी क्षेत्र में यदि वक्र जातीयवृत्त का केन्द्र ग और व्यासार्द्ध गव=वि मानो (चलनकलन का १८वां अध्याय देखो) तो चलनकलन के १६८ और १७१ प्रक्रमों से, $\text{वि}=\text{स्रु}\frac{\text{तास्रु}}{\text{ताल}}=\frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}}$, इसलिये $\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}}=\text{स्रु}\frac{\text{तास्रु}}{\text{ताचा}}$

$$\text{और}\qquad \text{च}=\text{स्रु}\,\text{कोज्या}\angle\text{नावल}=-\,\text{स्रु}\frac{\text{तास्रु}}{\text{ताच}}$$

इस लिये $-\text{च}=\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}}$।

ना विन्दु से वक्र जातीय व्यासार्द्ध के ऊपर नात लम्ब डालो तो स्पष्ट है कि नात=च=वल। और वक्र के प्रति विन्दु के भिन्न-भिन्न जो वक्र-जातीय वृत्त केन्द्र होंगे उन पर गये हुये वक्र अर्थात् अवलुत (चलन-कलन का १७५ वां प्रक्रम देखो) के साथ नात का वैसाही सम्बन्ध रहेगा जैसा कि व विन्दु के साथ वल अर्थात् च का है। यदि त विन्दु का अतीय भुज युग्म ल', प' मानें और तग=च' तो

$\text{प}'=\text{प}-\frac{\text{ग}}{२}$ और $\text{ल}'=\text{च}$

$$\text{और गत}=\text{च}'=-\frac{\text{ताल}'}{\text{ताप}'}=-\frac{\text{ताल}'}{\text{ताप}}=-\frac{\text{ताच}}{\text{ताप}}=\frac{\text{ता}^{२}\text{ल}}{\text{ताप}^{२}}$$

क्योंकि अवलुत के लक्षण से गव रेखा अवलुत की स्पर्श रेखा होगी)

$$\text{और वि}=\text{वत}+\text{तग}=\text{ल}+\text{च}'=\text{ल}+\frac{\text{ता}^{२}\text{ल}}{\text{ताप}^{२}}$$

$$\text{परंतु वि}=\frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}},\ \text{इस लिये}\ \frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}}=\text{ल}+\frac{\text{ता}^{२}\text{ल}}{\text{ताप}^{२}}$$

और $\text{चा}=\int \text{ल ताप}+\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}}$ यही पहले भी सिद्ध हुआ था।

यदि प्रत्येक स्पर्शरेखाओं के ऊपर ना विन्दु से लम्ब डाले जायं और

उन लम्ब मूलों में लगाकर एक वक्र करें और इसके ल विन्दु पर जो स्पर्शरेखा होगी उस पर ना विन्दु से जो लम्ब पड़ा उसको $ल_१$ कहो तो चलनकलन के १३१ वें प्रक्रम से $\frac{१}{ल_१^२} = \frac{१}{ल^२} + \frac{१}{ल^४} \cdot \frac{ताल^२}{ताप^२}$ (क्योंकि इस वक्र की श्रुति=ल है) इस में $\frac{ताल}{ताप}$ के स्थान में –च का उत्थापन देने से

$$\frac{१}{ल_१^२} = \frac{१}{ल^२} + \frac{च^२}{ल^४} = \frac{ल^२+च^२}{ल^४} = \frac{श्रु^२}{ल^४}$$

इस लिये $ल_१ = \frac{ल^२}{श्रु}$ यह एक चमत्कृत सिद्धान्त उत्पन्न होता है।

ऊपर के क्षेत्र में अ विन्दु से ब की ओर जब चा = $चा_१$ तो च = $च_१$ और जब चा = $चा_२$ तब च = $च_२$ ऐसा मानो तो

$$चा_२ - चा_१ + च_२ - च_१ = \int_{प_१}^{प_२} लताप \text{ यह उत्पन्न होगा}$$

जहां $चा_२$ और $चा_१$ सम्बन्धी $प_२$ और $प_१$ हैं।

ध्रुव स्थान से किसी $प_१$ में यदि श्रुति का मान $श्रु_१$ और च का मान $च_१$ हो तो स्पष्ट है कि श्रुति नियत अक्ष के चारो ओर घूम कर जब फिर अपने पहले स्थान पर पहुंचेगी तब प का मान $प_२ = प_१ + २\pi$ यह और $श्रु_२ = श्रु_१$। $च_२ = च_१$ ऐसी स्थिति में जो सीमित वक्र होंगे उनके परिधि का मान $= \int_{प_१}^{प_१+२\pi}$ लताप यही होगा।

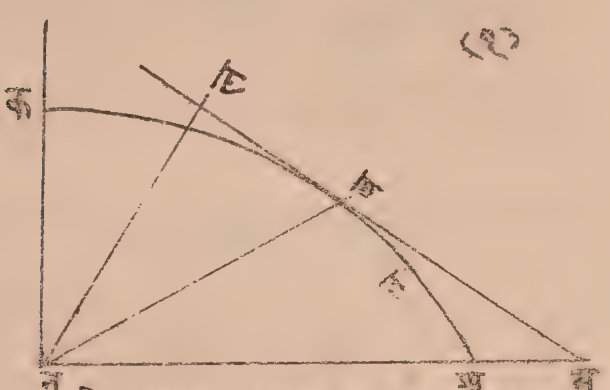
८५। ८४ प्रक्रम के सिद्धान्त की व्याप्ति दिखाने के लिये दो उदाहरण दिखलाते हैं।

(१) मानो कि अतबक एक दीर्घ वृत्त का चतुर्थांश है जिस का केन्द्र न, बृहद्व्यासार्द्ध नअ = अ, लघुव्यासार्द्ध नक = क, ब विन्दु की स्पर्शरेखा लबस और उस पर केन्द्र से पड़ा लम्ब नल = ल है तो न को मूल विन्दु मानने से इसका समीकरण $\frac{र^२}{क^२} + \frac{य^२}{अ^२} = १$ यह होगा। यहां यदि

$\angle$ लनश $=$ $प_{1}$ तो ८४ प्रक्रम से ल $=$ यकोज्याप$+$रज्याप ।

बल $=$ च $=$ यज्याप $-$ रकोज्याप ।

और $\frac{र^{2}}{क^{2}}=1-\frac{य^{2}}{अ^{2}}\therefore\frac{2र}{क^{2}}\frac{तार}{ताय}=-\frac{2य}{अ^{2}}$ और $\frac{तार}{ताय}=-\frac{य}{र}\frac{क^{2}}{अ^{2}}$



और ल $=$ यकोज्याप$+$रज्याप$=$ज्यापर $\left(कोस्पप\times\frac{य}{र}+1\right)$ ......

$$=ज्यापर\left\{\frac{अ^{2}}{क^{2}}कोस्प^{2}प+1\right\}\cdots\cdots(1)$$

परन्तु $\frac{यक^{2}}{रअ^{2}}=कोस्पप\ \therefore\ \frac{य^{2}क^{4}}{र^{2}अ^{4}}=कोस्प^{2}प$ । $\frac{य^{2}}{र^{2}}=\frac{अ^{4}कोस्प^{2}प}{क^{4}}$

और $\dfrac{\frac{य^{2}}{अ^{2}}}{\frac{र^{2}}{क^{2}}}=\frac{अ^{2}कोस्प^{2}प}{क^{2}}$ । एक में जोड़ देने से

$$\frac{क^{2}}{र^{2}}=\frac{अ^{2}कोस्प^{2}प+क^{2}}{क^{2}},$$

मूल लेने से $\frac{क}{र}=\sqrt{1+(1-इ^{2})^{-1}कोस्प^{2}प}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$$\therefore\ र=\frac{क}{\sqrt{1+(1-इ^{2})^{-1}कोस्प^{2}प}}$$

इस का उत्थापन (1) में देने से

$$ल = ज्याप र \left\{ \frac{अ^2}{क^2} कोस्प^2 प + १ \right\}$$

$$= ज्याप \frac{क}{\sqrt{१ + (१ - इ^2)^{-१} कोस्प^2 प}} \{ (१ - इ^2)^{-१} कोस्प^2 प + १ \}$$

$$= ज्यापक \sqrt{\{ १ + (१ - इ^2)^{-१} कोस्प^2 प \}}$$

$$= अ\sqrt{१ + इ^2} \sqrt{\{ ज्या^2 प - इ^2 ज्या^2 प + कोज्या^2 प \}} = अ\sqrt{\{ १ - इ^2 ज्या^2 प \}}$$

अब $अ\sqrt{(१ - इ^2 ज्या^2 प)}$ इस ल पर से

$$अब + बल = अ \int \sqrt{१ - इ^2 ज्या^2 प}$$

वक्र में ब विन्दु ऐसा कल्पना करें जिसका भु $= य' =$ अज्याप और कोटि $= र' =$ ककोज्याप तो ११ वें प्रक्रम से

$$कत = अ \int \sqrt{(१ - इ^2 ज्या^2 प)}$$

इस लिये अब+बल = कत यह सिद्ध हुआ। . . . . . . (अ)

और ब विन्दु का भुज यदि य तो ८४वें प्रक्रम से ल के रूप में य

$$= ल कोज्याप - \frac{ताल}{ताप} ज्याप = अकोज्याप \sqrt{१ - इ^2 ज्या^2 प} + \frac{अइ^2 ज्या^2 पकोज्याप}{\sqrt{(१ - इ^2 ज्या^2 प)}}$$

$$= \frac{अकोज्याप}{\sqrt{(१ - इ^2 ज्या^2 प)}} \quad . . . . (क)$$

$$\left(क्योंकि\ यहां\ बल = च = - \frac{ताल}{ताप} = \frac{अइ^2 ज्यापकोज्याप}{\sqrt{(१ - इ^2 ज्या^2 प)}} \right)$$

बल के मान में (क) का उत्थापन देने से

बल $= इ^2 य ज्याप$। इसी जगह यदि त के भुज का $य' =$ अज्याप इस का उत्थापन दें तो

$$बल = \frac{इ^2 य य'}{अ}$$ इस पर से और (अ) के रूप से

$$\text{कत}-\text{अब}=\text{बल}=\frac{\text{इ}^2\text{यय}'}{\text{अ}}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{ग})$$

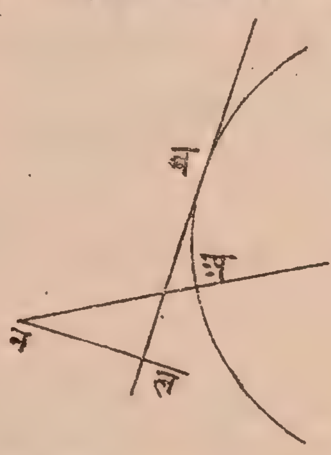
इस सिद्धान्त को फयागनानी (Fagnani) ने निकाला है इस लिये उन के आदरार्थ इसे फयागनानी का सिद्धान्त (Fagnani's Theorem) कहते हैं। बल का मान चलनकलन के ११वें अध्याय से भी $\text{इ}^2\text{य}\text{ज्या}\text{प}$ यह निकाल सक्ते हो।

(क) का वर्ग कर देने से $\dfrac{\text{अ}^2-\text{अ}^2\text{ज्या}^2\text{प}}{1-\text{इ}^2\text{ज्या}^2\text{प}}=\dfrac{\text{अ}^2-\text{य}'^2}{1-\dfrac{\text{इ}^2\text{य}'^2}{\text{अ}^2}}=\text{य}^2$

छेदगम कर समशोधन से

$\text{इ}^2\text{य}^2\text{य}'^2-\text{अ}^2(\text{य}^2+\text{य}'^2)+\text{अ}^4=0$ इस से यह सिद्ध होता है कि य के स्थान में य' का और य' के स्थान में य का उत्थापन देने से भी पूर्ववत् फल उत्पन्न होगा। इस लिये $\text{कब}-\text{अत}=\dfrac{\text{इ}^2\text{यय}'}{\text{अ}}$ यह भी होगा

(२)



मानो कि किसी अतिपरवलय का केन्द्र न, अ शिरःस्थान, बल ब बिन्दु पर स्पर्श रेखा और इस पर न से पड़ा लम्ब नल है।

यहां पर भी यदि $\angle$ अन ल=प और नल=ल तो (१) उदाहरण के ऐसा सिद्ध कर सक्ते हो कि

$$\text{बल}-\text{अब}=\text{अ}\int\sqrt{(1-\text{इ}^2\text{ज्या}^2\text{प})}\ \text{ताप}$$

चलनकलन के १३वें अध्याय से अति परवलय के अनन्त दूर की स्पर्श रेखा अर्थात् असीमपथ निकालो तो उस समय $\frac{\text{ताम}}{\text{ताय}} = \pm \frac{\text{क}}{\text{अ}} =$ इस लिये उस स्थान में प का मान अ$_1$ कहो तो कोस्पअ$_1 = \frac{\text{क}}{\text{अ}} = \sqrt{\text{इ}^2 - 1}$ अति परबलय के लक्षण से उस समय अ स्थान से अनन्त दूर तक जो अति परबलय का चाप हो उसको न स्थान से असीमपथ जो हो उसके मान में घटा देने से शेष$=$अ$\int_0^{\text{अ}_1} \sqrt{(1-\text{इ}^2\text{ज्या}^2\text{प})}$ ताप यही होगा।

यह शेष वही है जो ९८ प्रक्रम के अन्त में सिद्ध हुआ है क्योंकि उस समय अइल यह असीमपथ ह्री का मान होगा।

८४ प्रक्रम में जो सिद्धान्त दिखलाया है अर्थात् चा$= \frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} + \int$लताप यह लिजेण्ड्र (Legendre) का निकाला हुआ है (See Traité des Fanctions Elliptiques)

८६। अति परबलय के चाप का मान जानने के लिये ल्याण्डन का सिद्धान्त (Landen's Theorem on a Hyperbolic Arc.)

अति परबलय का कोई चाप कोई दो दीर्घवृत्तों के चाप से प्रकाशित कर सक्ते हैं।

किसी त्रिभुज में जहां आ, का, गा कोण और उन के सम्मुख भुज अ, क, ग हैं सरल त्रिकोणमिति से स्पष्ट है कि

$$\text{ग} = \text{अकोज्या का} + \text{ककोज्या आ}। \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

मानो कि शिरःस्थान का बहिर्गत कोण गा$=$आ$+$का है। और अ, क दो भुज तो स्थिर और बाक़ी सब अवयव त्रिभुज में चल हैं

तो गा$=$आ$+$का और ताआ$+$ताका$=$तागा इससे (१) को गुण देने से। गतागा $=$(अकोज्या का$+$ककोज्या आ)ताआ$+$(अकोज्या का$+$ककोज्या आ) ताका चलज्ञान करने से

$\int$गतागा$=\int$अकोज्या काताआ$+\int$ककोज्याआताका$+$२अज्याका$+$स्थि वा सरलत्रिकोणमिति से

$$\int \sqrt{(\text{अ}^2 + \text{क}^2 + 2\text{अक कोज्या गा})}\text{तागा} = \int \sqrt{(\text{अ}^2 - \text{क}^2\text{ज्या}^2\text{आ})}\ \text{ताआ}$$
$$+ \int \sqrt{(\text{क}^2 - \text{अ}^2\text{ज्या}^2\text{का})}\ \text{ताका} + 2\text{अज्याका} + \text{स्थि} \cdots\cdots\cdots (2)$$

परन्तु $\sqrt{(अ^2+क^2+२अक\,कोज्या\,गा)}$

$=\sqrt{\{(अ-क)^2 ज्या^2 \frac{गा}{२}+(अ+क)^2 कोज्या^2 \frac{गा}{२}\}}$

इस लिये (२) का रूप

$\int\sqrt{\{(अ-क)^2 ज्या^2 \frac{गा}{२}+(अ+क)^2 कोज्या^2 \frac{गा}{२}\}}$

$=\int\sqrt{(अ^2-क^2 ज्या^2 आ)}ताआ+\int\sqrt{(क^2-अ^2 ज्या^2 का)}ताका$

$+२अज्याका+स्थि$

इस में $\left(\frac{अ-क}{अ+क}\right)^2=१-इ^2$, $ज्या^2\frac{गा}{२}=ज्या^2 ष$ ।

$\frac{क^2}{अ^2}=इ_1^2$ । $ज्या^2 आ=ज्या^2 ष_1$ । $\frac{अ^2}{क^2}=इ_2^2$ । $ज्या^2 का=ज्या^2 ष_2$ कल्पना करें जहां अ>क तो

$२(अ+क)\int\sqrt{(१-इ^2 ज्या^2 ष)}ताष$

$=अ\int\sqrt{(१+इ_1^2 ज्या^2 ष_1)}ताष_1+क\int\sqrt{(१-इ_2^2 ज्या^2 ष_2)}ताष_2$

$+२अज्याका+स्थि \cdots\cdots (३)$

देखो यहां बायें पक्ष का चल उस दीर्घ वृत्त के द्विगुण चाप का प्रमाण है जिसका बृहद्व्यास= २(अ+क) और दहने पक्ष का प्रथम चल उस दीर्घ वृत्त का एक चाप है जिसका बृहद्व्यासार्द्ध = अ । दोनो मे क्रम से इ और $इ_1$ ऊपर की कल्पना से निष्पत्तिमान है । (९७वां प्रक्रम देखो) इन दोनों के अन्तर तुल्य समीकरण से दहने पक्ष का चल होगा जो कि ८५वें प्रक्रम के (२) उदाहरण से एक सरल रेखा और उस अति परवलय के चाप के अन्तर समान है जिस का लघुव्यास=२क और निष्पत्तिमान=$\frac{अ^2}{क^2}$ यह है ।

इस पर से किसी समय में ८५वें प्रक्रम के (२) उदाहरण से चल का मान जान कर और २अज्याका के ज्ञान से दोनों दीर्घ वृत्तों के चापों पर से अति परवलय का चाप जान सक्ते हैं ।

जब सरल त्रिकोणमिति से स्पष्ट है कि

अज्याका=कज्याआ । गा=आ+का

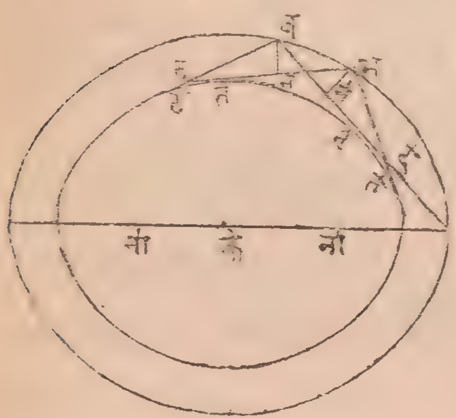
इस लिये आ ० से लेकर π तक जब पहुंचेगा तो गा भी ० से लेकर π तक पहुंचेगा। और अज्याका=कज्याआ के नियम से उस समय का ० से लेकर $अ_{1}$ (जहां $अ_{1}=ज्या^{-1}\frac{क}{अ}$) तक पहुंच कर फिर घटते घटते ० तक आजायगा। ऐसी स्थिति में ककोज्याआ और ताका दोनों ऋण होंगे इस लिये क कोज्याआ ताका सर्वदा धन रहेगा तब सान्त-चलानयन से (३) का रूप

$$२(अ+क)\int_{0}^{\frac{\pi}{२}}\sqrt{(१-इ^{२}ज्या^{२}प)}\,ताप$$

$$=२अ\int_{0}^{\frac{\pi}{२}}\sqrt{(१-इ_{१}^{२}ज्या^{२}प_{१})}\,ताप_{१}+२क\int_{0}^{अ_{१}}(१-इ_{२}^{२}ज्या^{२}प_{२})\,ताप_{२}$$

ऐसा होगा। इस में दो का भाग दे कर समशोधन से यह दिखला सक्ते हो कि अति परवलय का अनन्त चाप और असीमपथ का अन्तर दो दीर्घ वृत्तों के चतुर्थांश परिध्यन्तर तुल्य है। यह भी ल्याण्डेन (Landen) की कल्पना है।

८७। डाक्टर ग्रेव का सिद्धान्त (Theorem of Dr. Graves) कल्पना करो कि एक नाभिक दो दीर्घवृत्त हैं। बड़े दीर्घवृत्त के परिधि में कोई ब बिन्दु लेकर छोटे दीर्घवृत्त पर वहां से बट, बट′ दो स्पर्शरेखा डालो तो बट और बट′ के योग में दीर्घवृत्त का टट′ चाप घटा दो तो शेष सर्वदा स्थिर रहेगा



ब बिन्दु के अत्यन्त निकट बड़े दीर्घवृत्त में एक भ बिन्दु कल्पना करो और वहां से छोटे दीर्घवृत्त पर भत, भत′ दो स्पर्श-रेखा खींचो इन दोनों का पहली स्पर्श-रेखा में क्रम से द और द′ बिन्दु पर योग समझो। बट′ पर भन′ और भत पर बन लम्ब समझो।

देखो दोनों दीर्घवृत्त एक नाभिक हैं इस लिये दीर्घवृत्त कला से $\angle$ बभन$=\angle$ भबन′ $\therefore$ बन′$=$भन

और बट$=$टद$+$दन$=$टद$+$दत$+$तन$=$टत$+$तन$=$टत$+$तभ$-$भन।

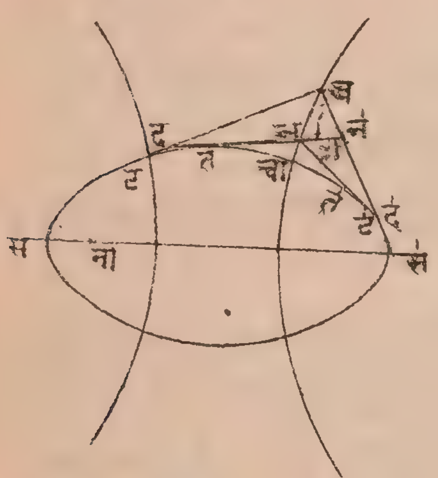
इसी तरह बट′=बन′+त′भ−ट′त′ ।

दोनों के योग से बट+बट′=भत+भत′+टत−ट′त′ ।

दोनों में टट′ चाप को घटा देने से बट+बट′−टट′=भत+भत′−तत′

अर्थात् ब विन्दु यदि भ पर हो तो भी शेष वही रहता है। इसी प्रकार थोड़ा थोड़ा विन्दुओं को हटा हटा सर्वत्र दिखला सक्ते हो कि शेष एक ही रहेगा ।

८८ । इसी तरह यदि एक अति परवलय और एक दीर्घवृत्त दोनों एक नाभिक हों तो अति परवलय के किसी विन्दु से जो दो स्पर्शरेखा दीर्घवृत्त में होंगी उनका अन्तर स्पर्शरेखान्तर्गत अति परवलय और दीर्घवृत्त का जो सम्पात विन्दु है वहां से दोनों स्पर्श विन्दु तक जो दीर्घवृत्त के दो चाप होंगे उनके अन्तर तुल्य होता है। क्योंकि यहां भी जो ऊपर की क्रिया करो तो बट=टद+दन=टद+दत+तन=टत+भत+भन



इसी तरह बट′=ट′द′+न′द′+बन′=ट′द′+त′द′+भत′+बन′=ट′त′+भत′+बन′

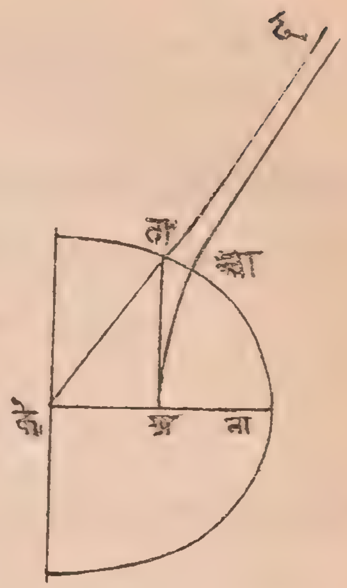
दोनों का अन्तर करने से (बट−बट′)=टत−ट′त′+ (भत−भत′) और टचा−ट′चा=अ =टत+तचा−(ट′त′+ त′चा)

इन दोनों का अन्तर करने से (बट−बट′) −अ=(भत−भत′)−(तचा−त′चा)

इसी प्रकार भ को बदलने से दो दो पद समान होते जांयगे अन्त में जब भ, चा के पास आवेगा तब स्पर्शरेखान्तर और चापान्तर दोनों शून्य हो जांयगे इस लिये (बट—बट′)−(टचा—ट′चा)=0 अर्थात् बट—बट′=टचा—ट′चा ।

यदि दीर्घवृत्त के परिधि ही में कोई विन्दु लेकर अति परवलय ही पर दो स्पर्शरेखा डाली जाय तो भी यहां पर यही सिद्धान्त ठीक ठहरेगा यदि दोनों स्पर्शरेखायें अति परवलय के एक ही शाखा पर हों ।

इस पर से असीमपथ और अति परवलय का अनन्त चाप इनका अन्तर सरलरेखा और अति परवलय के चाप रूप में प्रकाश कर सक्ते हैं। जैसे कल्पना करो कि अचा अति परवलय का असीमपथ केतद है और अ विन्दु की स्पर्शरेखा अत है त विन्दु में लगाकर अति परवलय के साथ एक एकनाभिक दीर्घवृत्त बनाया तो ऊपर के सिद्धान्त से अनन्त दूर पर तद को स्पर्शरेखा समझ लेने से



तद—अत=चादचाप—अचा

केत+अचा इस को जोड़ देने से

तद+केत—अत+अचा=चाद+अचा—अचा+केत

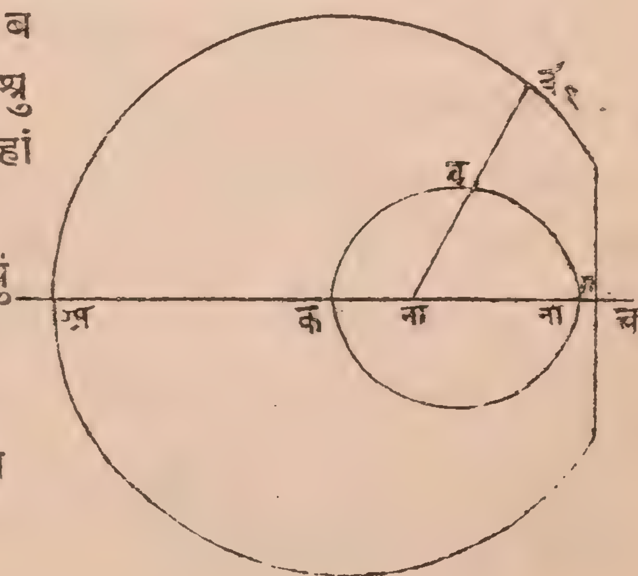
अर्थात् केद—अत+अचा=अद—अचा+केत

समशोधन से केद—अद=अत+केत—२अचा

इस लिये केत और अत के योग में दूने अचा को घटा देने से शेष असीमपथ और अतिपरवलय सम्बन्धि अनन्त चाप का अन्तर होता है यह सिद्ध हुआ।

८६। डिकार्टेस के आवल (Oval of Descartes) का चापानयन

इसकी दोनों नाभी ना, ना́ हैं नाभी से वक्र के किसी विन्दु ब तक जो रेखा हैं उन में त·श्रु+द·श्रु́=न·ग यह नियम है जहां त, द और न स्थिराङ्क हैं ना ना́=ग, नाब=श्रु। ना́ब=श्रु́ यहां यदि ∠ बनाना́=प तो सरल त्रिकोणमिति से



$$\text{श्रु́}^2=\text{श्रु}^2+\text{ग}^2-\text{२श्रुगकोज्याप}$$

$$=\left(\frac{\text{न·ग}-\text{श्रु·त}}{\text{द}}\right)^2$$

$$= \left\{ \frac{न^2 ग^2 - २तनगञ्ज + ञ्ज^2 त^2}{द^2} \right\}$$

छेदगम और समशोधन से

$$ञ्ज^2(द^2 - त^2) - २ञ्ज ग(द^2 कोज्या प - तन) - ग^2(न^2 - द^2) = 0$$

$$वा \quad ञ्ज^2 - \frac{२ञ्जग(द^2 कोज्याप - तन)}{द^2 - त^2} - \frac{ग^2(न^2 - द^2)}{द^2 - त^2}$$

$$अथवा \; ञ्ज^2 - २ ञ्जग \frac{तन - द^2 कोज्याप}{त^2 - द^2} + \frac{ग^2(न^2 - द^2)}{त^2 - द^2} = 0$$

इस में यदि $ग \frac{(तन - द^2 कोज्याप)}{त^2 - द^2} = ष_1$ । और

$\frac{(ग^2 न^2 - द^2)}{त^2 - द^2} = आ$ । तो

$$ञ्ज^2 - २ ष_1 ञ्ज + आ = 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

इस पर से $ञ्ज = ष_1 \pm \sqrt{ष_1^2 - आ}$ वा $नाब_1 = ब_1 + \sqrt{ष_1^2 - आ}$ ।

$नाब = ष_1 - \sqrt{ष_1^2 - आ}$ इस से सिद्ध होता है कि यदि त, द, न सम्भाव्य और अतुल्य संख्या हों तो

इस वक्र में दो आवल होंगे एक बाहर में और दूसरा भीतर में रहेगा जैसा कि इस चेत्र में देख पड़ता है ।

अब यहां (१) का तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{ताञ्ज}{ताप} \cdot \frac{1}{ञ्ज} = \frac{ष'_1}{\sqrt{ष_1^2 - आ}} \quad जहां \quad ष'_1 = \frac{ताष_1}{ताप}$$

इस पर से

$$\frac{ताचा}{ताप} \cdot \frac{1}{ञ्ज} = \frac{\sqrt{ष_1^2 + ष'^2_1 - आ}}{\sqrt{(ष_1^2 - आ)}}$$

$$\text{या चा}= \int \frac{\text{ष}_1\sqrt{(\text{ष}_1^2+\text{ष}_1'^2-\text{आ})}\text{ताप}}{\sqrt{(\text{ष}_1^2-\text{आ})}} \pm \int \sqrt{(\text{ष}_1^2+\text{ष}_1'^2-\text{आ})}\,\text{ताप}$$

यहां धन चिन्ह बाहरी आबल के लिये और ऋण चिन्ह भीतरी के लिये है। इस लिये दोनों के सजातीय चापों का अन्तर$=२\int\sqrt{(\text{ष}_1^2+\text{ष}_1'^2-\text{आ})}\,\text{ताप}$

$$=२\int\sqrt{(\text{अ}^2+२\text{अक कोज्याप}+\text{क}^2-\text{आ})}\text{ताप} \quad \cdots \quad (२)$$

$$\text{यदि ष}_1= \frac{\text{ग}(\text{तन}-\text{द}^2\text{ कोज्याप})}{\text{त}^2-\text{द}^2} = \text{अ}+\text{क कोज्याप} \text{ ।}$$

देखेा (२) का रूप ८६ प्रक्रम से एक दीर्घवृत्त के चाप समान हेा सक्ता है इस लिये दोनें आवलेां के सजातीय चापेां का अन्तर एक दीर्घवृत्त के चाप रूप में प्रकाशित कर सक्ते हैं। इस सिद्धान्त को राबर्टस ने निकाला है (Mr. W. Roberts) त, द, और न, के भिन्न भिन्न मानें पर से यही आबल, वृत्त, दीर्घवृत्त, अतिपरवलय इत्यादि का रूप हेा जायगा इस लिये आबल को इन सब वक्रों का उत्पादक कह सक्ते हैं।

९० । यदि किसी वक्रक्षेत्र के अनवलूत का समीकरण मालूम हेा तेा चलनकलन के १७६वें प्रक्रम के (३) समीकरण से चलज्ञान के बिना ही वक्र के चाप का ज्ञान हेा सक्ता है क्येांकि अनवलूत समीकरण पर से $\text{चा}\pm\text{वि}=\text{ट}$ इस में जेा वक्र जातीय वृत्त का व्यासार्द्ध वि है उस का मान अनवलूत के भुजकेाटि रूप में ला सक्ते हैं और ये भुजकेाटि अवलूत के भुजकेाटि रूप में आ सक्ते हैं इस प्रकार अनवलूत के समीकरण पर से वि का ज्ञान हेा जायगा फिर स्थिर ग के वश से चाप का मान भी विदित हेा जायगा।

जैसे यदि उस परवलय को अनवलूत कल्पना करेा जिसका $\text{र}^2=४\text{अय}$ यह समीकरण है तेा चलनकलन के १७८ प्रक्रम के (१) उदाहरण से अवलूत का समीकरण $२७\text{अ}\,\text{र}'^2=४(\text{य}'-२\text{अ})^3$ और $\text{वि}=२\text{अ}\left(\frac{\text{य}'+\text{अ}}{३\text{अ}}\right)^{\frac{3}{2}}$ यह होगा इस लिये $\text{चा}\pm२\text{अ}\left(\frac{\text{य}'+\text{अ}}{३\text{अ}}\right)^{\frac{3}{2}}=\text{ट}$ । यहां चाप की गणना

यदि उस विन्दु से करें जिस का भु=यं=२अ अर्थात् उस विन्दु से जो कि परवलय के शिरोविन्दु के सजातीय है तो क्षेत्र के देखने से विदित होता है कि वहां चा=० इस लिये

ट=−२अ ऋण चिन्ह ग्रहण करने से क्योंकि यहां ज्यों ज्यों यं बढ़ेगा त्यों त्यों चा भी बढ़ेगा इस लिये $चा=२अ\left(\frac{यं+अ}{३अ}\right)^{\frac{३}{२}}-२अ$.

यदि यहां वक्र के $२७अर^२=४(य-२अ)^३$ इस समीकरण पर से $\frac{ताचा}{ताय}$ का मान जान कर चलज्ञान से चाप का आनयन करो तो भी ऊपर आया हुआ मान आ जायगा ।

९१ । वक्र के भुज कोटि के रूप में यदि चाप का मान विदित हो तो उस के अनवलूत का समीकरण जान सक्ते हैं ।

चलनकलन के १७६ प्रक्रम के (२) समीकरण से

$$\frac{\frac{तायं}{ताय}}{य-य}=\pm\frac{१}{वि}\cdot\frac{ताचा}{ताय}$$ जहां य अनवलूत का भुज है

$$समशोधनादि\ से\ य=यं\mp वि\frac{तायं}{ताचा}\ \cdots\cdots\cdots\ (१)$$

$$इसी\ तरह\ \ र=रं\mp वि\frac{तारं}{ताचा}\ \cdots\cdots\cdots\ (२)$$

यदि चा, यं और रं के रूप में विदित हो और वक्र का समीकरण जानते हों तो $\frac{ताचा}{ताय}$ और $\frac{ताचा}{तार}$ जान सक्ते हैं और वि, चा ± वि = ट इस समीकरण पर से जान जायंगे फिर इन का उत्थापन (१) और (२) में देने से अनवलूत का भुज कोटि जान जायंगे ।

जैसे किसी कातन्वली (The Catenary) का समीकरण

$$र' = \frac{ग}{२}\left(इ^{\frac{य'}{ग}} + इ^{-\frac{य'}{ग}}\right)$$

और $$चा' = \frac{ग}{२}\left(इ^{\frac{य'}{ग}} - इ^{-\frac{य'}{ग}}\right)$$ यह है।

यहां मान लो कि चाप की गणना उस विन्दु से है जिस का भु = य' = ० और को = र' = ग अब इन पर से कातन्वली के अनवलूत (Involute) का समीकरण जान जायंगे जिस की प्रवृत्ति वक्र के निर्दिष्ट विन्दु (जिस के भुज कोटि का मान अभी मान लिया है) के वश से होगी।

अब ऊपर के र' और चा' के मान से

$$\frac{तार'}{ताय'} = \frac{१}{२}\left(इ^{\frac{य'}{ग}} - इ^{-\frac{य'}{ग}}\right) = \frac{चा'}{ग}$$

$$\frac{ताचा'}{ताय'} = \frac{१}{२}\left(इ^{\frac{य'}{ग}} + इ^{-\frac{य'}{ग}}\right) = \frac{र'}{ग}$$

भाग देने से

$$\frac{तार'}{ताचा'} = \frac{चा'}{र'}, \text{ और } \frac{ताय'}{ताचा'} = \frac{ग}{र'}$$

और यहां ऐसी ही कल्पना किया है कि चा' = ० तो वि = ० इस लिये स्थिराङ्क शून्य होगा। तब चा' = वि।

इन का उत्थापन (१) और (२) में देने से

$$य = य' - \frac{चा'.ग}{र'},\ र = र' - \frac{चा'^2}{र'} = \frac{र'^2 - चा'^2}{र'} = \frac{ग^2}{र'}$$

$$\text{और } चा' = \sqrt{(र'^2 - ग^2)} = \sqrt{\left(\frac{ग^4}{र^2} - ग^2\right)} = \frac{ग}{र}\sqrt{ग^2 - र^2}$$

इस लिये $\frac{\text{चा}'}{\text{र}'} = \frac{\sqrt{(\text{ग}^2 - \text{र}^2)}}{\text{ग}}$, इस तरह से $\text{य}' = \text{य} + \sqrt{(\text{ग}^2 - \text{र}^2)}$

इस का उत्थापन वक्र के समीकरण में देने से

$$\text{र}' = \frac{\text{ग}}{२}\left(\text{इ}^{\frac{\text{य}'}{\text{ग}}} + \text{इ}^{-\frac{\text{य}'}{\text{ग}}}\right)$$

इस लिये $\sqrt{(\text{र}'^2 - \text{ग}^2)} = \frac{\text{ग}}{२}\left(\text{इ}^{\frac{\text{य}'}{\text{ग}}} - \text{इ}^{-\frac{\text{य}'}{\text{ग}}}\right)$

जोड़ देने से $\text{र}' + \sqrt{(\text{र}'^2 - \text{ग}^2)} = \text{ग}\text{इ}^{\frac{\text{य}'}{\text{ग}}}$

लघुरिक्थ लेने से $\text{य}' = \text{ग}\cdot\text{ला}\,\frac{\text{र}' + \sqrt{(\text{र}'^2 - \text{ग}^2)}}{\text{ग}}$

इसी तरह $\text{य} + \sqrt{(\text{ग}^2 - \text{र}^2)} = \text{ग}\cdot\text{ला}\,\frac{\text{ग} + \sqrt{(\text{ग}^2 - \text{र}^2}}{\text{र}}$

इस वक्र को अङ्गरेज़ी में (Tractory) कहते हैं हमने इस का नाम चीतर रक्खा है। इस में यदि ग 7 र तो मूल का मान द्विविध आवेगा प्रत्येक य के मान में। ये दोनों मान संख्या में तुल्य परन्तु भिन्न चिन्ह के होंगे। चलनकलन से यदि इस की आकृति बनाओ तो जान पड़ेगा कि जहां य = 0 और र = ग वहां वक्र को एक स्कन्ध होगा जिस में य अक्ष असीमपथ होगा।

९२। यदि अवलूत के चाप का मान अक्षीय भुजयुग्म का फल हो तो ऊपर की युक्ति से अनवलूत का समीकरण भी अक्षीय भुजयुग्म संबन्धी जान सक्ते हो।

चलनकलन के १०७ प्रक्रम के (१) और (२) समीकरण से

$$\text{भ्रु}'^2 = \text{भ्रु}^2 + \text{वि}^2 - २\,\text{ल}\cdot\text{वि} \quad \cdots\cdots (१)$$

$$\text{ल}'^2 = \text{भ्रु}^2 - \text{ल}^2 \quad \cdots\cdots (२)$$

यहां भी पहले के ऐसा स्वश्विशिष्टवर्ग ज्ञात वक्र के हैं अर्थात् अवलूत के और केवल वर्ग अनवलूत के हैं। अवलूत तो ज्ञात ही है और इसी लिये ल′, और स्पु′ का भी सम्बन्ध विदित ही होगा और चां ∓ वि = ट इस लिये यदि चां का मान ल′ स्पु′ के रूप में आ सके तो इस के वश से (१) और (२) में स्पु, ल′ को उड़ा सकोगे और एक समीकरण ल और स्पु में सम्बन्ध दिखाने वाला अनवलूत का ज्ञात हो जायगा।

जैसे सामास्रिक सर्पिल (Equiangular Spiral) में (चलनकलन का २८६ प्रक्रम का (२) वक्र देखो) यदि $\text{भ} = \text{स्प}^{-1}\text{क}$ तो

$$\text{ल}' = \text{स्पु}'\text{ज्याभ}$$

यहां यदि अनवलूत की प्रवृत्ति सर्पिल के ध्रुवविन्दु ही से मानें और उसी विन्दु से यदि चां के गणना का भी आरम्भ करें तो वि = चां = स्पु′छेभ (८१वां प्रक्रम देखो) इस का उत्थापन (१) में देने से

$$\text{स्पु}'^2 = \text{स्पु}^2 + \text{स्पु}'^2\cdot\text{छे}^2\cdot\text{भ} - 2\text{स्पु}'\text{ल}\cdot\text{छेभ}$$

$$= \text{स्पु}'^2\cdot\text{छे}^2\text{भ} + \text{स्पु}'^2\cdot\text{ज्या}^2\text{भ} + \text{ल}^2 - 2\text{स्पु}'\text{ल}\cdot\text{छेभ} \text{। (२) से}$$

इस वर्गसमीकरण पर से

$$\text{ल} - \text{स्पु}'\cdot\text{छेभ} = \pm\, \text{स्पु}'\cdot\text{कोज्याभ}$$

यदि यहां घन चिन्ह ग्रहण करें तो $\text{ल} = \dfrac{\text{स्पु}'(1+\text{कोज्या}^2\text{न})}{\text{कोज्याभ}}$ और (२) से

$$\text{स्पु}'^2 = \frac{1+3\text{कोज्या}^2\text{भ}}{\text{कोज्या}^2\text{भ}}\,\text{स्पु}'^2 \text{ इस पर से } \text{स्पु}\frac{\text{ता स्पु}}{\text{ताल}} = \text{वि}$$

$$= \frac{1+3\text{कोज्या}^2\text{भ}}{\text{कोज्याभ}(1+\text{कोज्या}^2\text{भ})}\,\text{स्पु}'$$

परन्तु वक्र के समीकरण से वि = स्पु′·छेभ इस लिये धन चिन्ह ग्रहण करने से मान असम्भव आता है। इस लिये ऋण चिन्ह लेकर क्रिया करने से

$$\text{ल} = \frac{\text{अु}'\,\text{ज्या}^{2}\text{भ}}{\text{कोज्याभ}} \text{ और तब (२) से } \text{अु}^{2} = \frac{\text{अु}'^{2}\,\text{ज्या}^{2}\text{भ}}{\text{कोज्या}^{2}\text{भ}} \therefore \text{अु}' = \frac{\text{अुकोज्याभ}}{\text{ज्याभ}}$$

इस का उत्थापन ल में देने से ल = अु ज्याभ । देखो यह अनवलूत का समीकरण ठीक अवलूत ही के समीकरण के ऐसा है ।

९३ । यदि वक्र के स्पर्शरेखा से और वक्रस्थ नियतविन्दु की स्पर्शरेखा से उत्पन्न कोण जो हो उस के फल रूप में चाप का मान जानना हो तो भी $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ का मान उस स्पर्शरेखा के फल रूप में जान कर चाप का मान जान सक्ते हो ।

जैसे मानो कि किसी वक्र का समीकरण र = फ(य) मूल विन्दु वक्र ही के चाप की कोई विन्दु है और उसी विन्दु पर र अक्ष स्पर्शरेखा भी है तो वक्र के समीकरण से $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{फ}'(\text{य}) = \text{स्पब} = \frac{1}{\text{स्पब}_{1}}$ (चलनकलन के ११६ वें प्रक्रम से) जहां ब_{1} र अक्ष और बक्र की स्पर्शरेखा से उत्पन्न कोण का मान है ।

अब ऊपर के समीकरण से स्पब_{1} के फल रूप में य का मान जान जावोगे मानो कि य = फा (स्पब_{1}) तो

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताब}_{1}} = \text{फा}'\,(\text{स्पब}_{1})\ \text{छे}^{2}\text{ब}_{1}$$

$$\text{और} \qquad \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \text{कोछेब}_{1}$$

$$\text{इस लिये} \qquad \frac{\text{ताचा}}{\text{ताब}_{1}} = \text{फा}'\,(\text{स्पब}_{1})\ \text{छे}^{2}\text{ब}_{1}\cdot\text{कोछेब}_{1}$$

इस समीकरण पर से ब_{1} के फल रूप में चा का मान जान सक्ते हो यदि वक्र के एक विन्दु पर य अक्ष स्पर्शरेखा हो और उसी नियत विन्दु से चाप का मान जानना हो तो ऊपर ही की युक्ति से समीकरण बना सक्ते हो केवल ब_{1} के स्थान में ब को लेना होगा ।

जैसे चक्रालद (Cycloid) में (चलनकलन के २८६ प्रक्रम का (१५) वक्र देखो)

$$\frac{ताा}{ताय} = \sqrt{\frac{२अ-य}{य}} = \frac{१}{स्पब_1}।$$

इस लिये $\frac{२अ}{य} = \frac{१}{ज्या^2 ब_1}$ और $य = २ अ ज्या^2 ब_1$

$$\frac{ताय}{ताब_1} = ४अज्याब_1 \cdot कोज्याब_1$$

$$\frac{ताचा}{ताब_1} = कोछेब_1, \frac{ताय}{ताब_1} = ४अकोज्याब_1$$

इस लिये $चा = ४अ\cdot ज्याब_1 + स्थि$

यदि चाप की गणना उस विन्दु से करें जहां र अक्ष स्पर्शरेखा है तो स्थिराङ्क शून्य होगा।

इस प्रकार से वक्र के दो स्पर्शरेखाओं से उत्पन्न कोण और वक्र के चाप के बीच सम्बन्ध दिखाने वाले समीकरण को वक्र का चापस्पार्शिक समीकरण कहते हैं।

६४। यदि वक्र का चापस्पार्शिक समीकरण दिया हो तो उस पर से साधारण वक्र का समीकरण विपरीत क्रिया से जान सक्ते हैं।

क्योंकि चापस्पार्शिक समीकरण पर से जानते हैं कि

$$\frac{ताय}{ताचा} = ज्याब_1$$

इस लिये $य = \int ज्या१ताचा$

और इसी तरह $र = \int कोज्याब_1 ताचा$

चापस्पार्शिक समीकरण से जानते हैं कि चा कोई $ब_1$ का फल है इस लिये य, और र का मान ऊपर के चलज्ञान से आ जायगा।

जैसे (१) चक्राभ (Cycloid) में जानते हैं कि चापस्पार्शिक समीकरण $चा = ४अज्याब_1$ यह है

इस लिये $ताचा = ४अकोज्याब_1 \; ताब_1$

इस का उत्थापन य के मान में देने से

$\text{य} = \int \text{ज्या}\text{ब}_1 \text{ताचा} = 4\text{अ}\int \text{ज्या}\text{ब}_1 \text{कोज्या}\text{ब}_1 \text{ता}\text{ब}_1$

$= \text{स्थि} - \text{अकोज्या}\text{ब}_1$ इसी तरह, $\text{र} = \int \text{कोज्या}\text{ब}_1 \text{ताचा}$

$= 4\text{अ}\int \text{कोज्या}^2\text{ब}_1 \text{ता}\text{ब}_1 = \text{स्थि}_1 + 2\text{अ}\text{ब}_1 + \text{अज्या}2\text{ब}_1$

इस लिये यहां दोनों समीकरणों पर से य वा र के फल रूप में ब$_1$, ज्याब$_1$, कोज्याब$_1$ का मान ले आने से य और र के सम्बन्ध पर से वक्र का समीकरण आ जायगा।

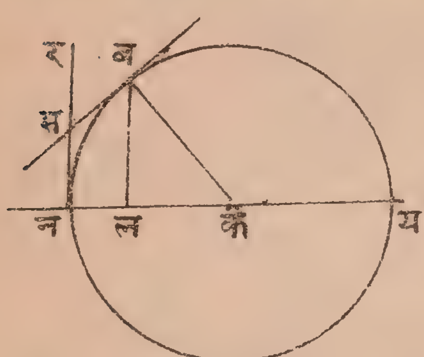
यदि दोनों अक्षों का योगविन्दु वक्र का शिरः स्थान मानें तो स्थि $=$ अ और स्थि$_1 = 0$।

(२) इसी तरह वृत्त का चापस्पार्शिक समीकरण चा $=$ अ·ब$_1$ यह है इस पर से ताचा $=$ अताब$_1$

और $\text{य} = \int \text{ज्या}\text{ब}_1 \text{ताचा} = \text{अ}\int \text{ज्या}\text{ब}_1 \text{ता}\text{ब}_1 = -\text{अकोज्या}\text{ब}_1 + \text{स्थि}$

इसी तरह $\text{र} = \int \text{कोज्या}\text{ब}_1 \text{ताचा} = \text{अ}\int \text{कोज्या}\text{ब}_1 \text{ता}\text{ब}_1$

$= \text{अज्या}\text{ब}_1 + \text{स्थि}_1$ यदि नियत स्पर्शरेखा और व्यासार्द्ध के योगविन्दु ही को मूलस्थान मानें तो स्थि $=$ अ और स्थि$_1 = 0$ इन का उत्थापन देकर य और र के सम्बन्ध से समीकरण $\text{र}^2 = \text{अ}^2 - (\text{अ} - \text{य})^2$।



जैसे यदि न विन्दु गत स्पर्शरेखा नस को नियत स्पर्शरेखा मानो और किसी ब विन्दु को स्पर्शरेखा बस तो $\angle$ बसर $=$ ब$_1$ और वृत्त के धर्म से ब$_1 = \angle$ ब के न। के को केन्द्र समझो इस लिये नब $=$ चा $=$ अ·ब$_1$ (जहां अ $=$ केन $=$ वृत्तव्यासार्द्ध)। इस लिये यदि नसर को र, अक्ष और नकेय को य अक्ष। और न को मूल विन्दु मानो तो ब विन्दु की कोटि $=$ बल $=$ र $= \sqrt{\text{अ}^2 - (\text{अ} - \text{य})^2}$ यही समीकरण पहले भी सिद्ध हुआ था।

(३) इसी तरह चलनकलन के २८६ प्रक्रम के (१३) वक्र अपचक्राभ (Epicycloid) के लक्षण से यदि अ को नियतविन्दु मानो उसी स्पर्शरेखा

य अत्त ही है इस लिये इस अत्त को नियत स्पर्शरेखा मान लेने से चापस्पार्शिक समीकरण से

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{कोज्याप} - \text{कोज्या}\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{क}}\text{प}}{\text{ज्या}\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{क}}\text{प} - \text{ज्याप}} = \text{स्पब}_1$$

$$= \frac{\text{२ज्या}\frac{\text{अ}+\text{२क}}{\text{२क}}\text{प}\cdot\text{ज्या}\frac{\text{अ}}{\text{२क}}\text{प}}{\text{२ज्या}\frac{\text{अ}}{\text{२क}}\text{प}\,\text{कोज्या}\frac{\text{अ}+\text{२क}}{\text{२क}}\text{प}} = \text{स्प}\,\frac{\text{अ}+\text{२क}}{\text{२क}}\text{प}$$

इस लिये $\text{ब}_1 = \frac{\text{अ}+\text{२क}}{\text{२क}}\text{प}$

और ८२ प्रक्रम से

$$\text{चा} = -\frac{\sqrt{(\text{ग}^{२}-\text{अ}^{२})}}{\text{अ}}\sqrt{\text{ग}^{२}-\text{भु}^{२}} + \text{स्थि}$$

परन्तु वक्र के लक्षण से

$$\text{य}^{२} = (\text{अ}+\text{क})^{२}\text{कोज्या}^{२}\text{प} - \text{२}(\text{अ}+\text{क})\ \text{ककोज्यापकोज्या}\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{क}}\text{प} + \text{क}^{२}\text{कोज्या}^{२}\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{क}}\text{प}$$

$$\text{र}^{२} = (\text{अ}+\text{क})^{२}\text{ज्या}^{२}\text{प} - \text{२}\ (\text{अ}+\text{क})\ \text{कज्यापज्या}\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{क}}\text{प} + \text{क}^{२}\text{ज्या}^{२}\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{क}}\text{प}$$

$$\text{भु}^{२} = \text{य}^{२}+\text{र}^{२} = (\text{अ}+\text{क})^{२} - \text{२क}\ (\text{अ}+\text{क})\left\{\text{ज्या}\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{क}}\text{पज्याप} + \text{कोज्या}\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{क}}\text{पकोज्याप}\right\} + \text{क}^{२}$$

$$\text{ग}^{२} = (\text{अ}+\text{२क})^{२} = \text{अ}^{२} + \text{४अक} + \text{४क}^{२}$$

$$\text{ग}^{२} - \text{भु}^{२} = \text{२अक} + \text{२क}^{२} + \text{२क}\ (\text{अ}+\text{क})\ \text{कोज्या}\frac{\text{अ}}{\text{क}}\text{प}$$

$$= \text{२क}\ (\text{अ}+\text{क})\left\{\text{१}+\text{कोज्या}\frac{\text{अ}}{\text{क}}\text{प}\right\} = \text{४क}\ (\text{अ}+\text{क})\text{कोज्या}^{२}\frac{\text{अ}}{\text{२क}}\text{प}$$

$$\sqrt{\text{ग}^{२}-\text{भु}^{२}} = \sqrt{\{\text{४क}\ (\text{अ}+\text{क})\}}\ \text{कोज्या}\frac{\text{अ}}{\text{२क}}\text{प}$$

और $\sqrt{\text{ग}^{२}-\text{अ}^{२}} = \sqrt{\text{४क}\ (\text{अ}+\text{क})}$

चाप में इन का उत्थापन देने से

$$\text{चा} = -\text{४क}\ (\text{अ}+\text{क})\ \text{कोज्या}\frac{\text{अ}}{\text{२क}}\text{प} + \text{स्थि}$$

$$= \frac{\text{४क}(\text{अ}+\text{क})}{\text{अ}}\left(\text{१}-\text{कोज्या}\frac{\text{अप}}{\text{२क}}\right)$$

यदि चाप की गणना वहां से करें जहां $\text{प} = 0$ ।

परन्तु $\text{प} = \dfrac{\text{२कब}_1}{\text{अ}+\text{२क}}$ इस लिये $\text{चा} = \dfrac{\text{४क}(\text{अ}+\text{क})}{\text{अ}}\left\{\text{१} - \text{कोज्या}\,\dfrac{\text{अब}_1}{\text{अ}+\text{२क}}\right\}$

यदि यहां $\text{ब}_1 = \frac{\pi(\text{अ}+\text{२क})}{\text{२अ}} + \text{ब}'_1$

तो $\dfrac{\text{अब}_1}{\text{अ}+\text{२क}} = \frac{\pi}{\text{२}} + \dfrac{\text{अब}'_1}{\text{अ}+\text{२क}}$ $\therefore$ $\text{कोज्या}\,\dfrac{\text{अब}_1}{\text{अ}+\text{२क}} = -\,\text{ज्या}\,\dfrac{\text{अब}'_1}{\text{अ}+\text{२क}}$

इस लिये यदि $\dfrac{\text{४क}(\text{अ}+\text{क})}{\text{अ}}\,\text{ज्या}\,\dfrac{\text{अब}'_1}{\text{अ}+\text{२क}} = \text{चा}'$ तो

$\text{चा} = \frac{\text{४क}(\text{अ}+\text{क})}{\text{अ}} + \text{चा}'$

यहां स्पष्ट है कि वक्र के उच्च स्थान से यदि चा की गणना करें तो

$$\text{चा}' = \frac{\text{४क}(\text{अ}+\text{क})}{\text{अ}}\,\text{ज्या}\,\frac{\text{अब}'_1}{\text{अ}+\text{२क}}$$

यहां स्वर चिन्ह का कुछ भी प्रयोजन नहीं यदि उच्च गत स्पर्शरेखा को नियत स्पर्शरेखा मान लें क्योंकि उस से और इष्ट स्पर्शरेखा से उत्पन्न कोण तब $\text{ब}'_1$ यही होगा

इस लिये उच्च स्थान से गणना करने में

$$\text{चा} = \frac{\text{४क}(\text{अ}+\text{क})}{\text{अ}}\,\text{ज्या}\,\frac{\text{अब}_1}{\text{अ}+\text{२क}}\text{ ।}$$

इसी तरह अति चक्राभ (Hypocycloid) में नीच स्थान से यदि चाप गणना करो तो $\text{चा} = \dfrac{\text{४क}(\text{अ}-\text{क})}{\text{अ}}\,\text{ज्या}\,\dfrac{\text{अब}_1}{\text{अ}-\text{२क}}$ यह समीकरण होगा।

दोनों समीकरणों का रूप $\text{चा} = \text{ट ज्यानब}_1$ ऐसा कह सक्ते हो प्रथम में $\text{ट} = \frac{\text{४}(\text{अ}+\text{क})}{\text{अ}}$, $\text{न} = \frac{\text{अ}}{\text{अ}+\text{२क}} \angle \text{१}$ और दूसरे में $\text{ट} = \frac{\text{४}(\text{अ}-\text{क})}{\text{अ}}$, $\text{न} = \frac{\text{अ}}{\text{अ}-\text{२क}} 7 \text{१}$ इतना ही विशेष है ।

(४) कातन्वली का समीकरण यदि

$\text{र}+\text{ग} = \frac{\text{ग}}{\text{२}}\left(\text{इ}^{\frac{\text{य}}{\text{ग}}} + \text{इ}^{-\frac{\text{य}}{\text{ग}}}\right)$ ऐसा मानें जिस में र अक्ष और वक्र के योग विन्दु को मूल मानें तो

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{1}{2}\left\{\text{इ}^{\frac{\text{य}}{\text{ग}}} - \text{इ}^{-\frac{\text{य}}{\text{ग}}}\right\} \text{। चा} = \frac{\text{ग}}{2}\left\{\text{इ}^{\frac{\text{य}}{\text{ग}}} - \text{इ}^{-\frac{\text{य}}{\text{ग}}}\right\}$$

इस लिये मूल विन्दु गतस्पर्शरेखा से इष्टस्पर्शरेखा जो कोण बनावे उसे ब_1 कहो तो चा = $\text{ग}\cdot\text{स्पब}_1$ ऐसा होगा। इस प्रकार से कातन्वली (Catenary) का चापस्पार्शिक समीकरण उत्पन्न हो गया।

९५। यदि चापस्पार्शिक समीकरण से वक्र जातीय वृत्त का व्यासार्द्ध ले आवें तो चलनकलन के १७१ वें प्रक्रम से

$\text{वि} = \frac{\text{ताचा}}{\text{ताब}}$ (जहां ब = ब_1) ऐसा होगा।

जैसे लाघुरिक्थिक सर्पिल में ८१ प्रक्रम से

$$\left.\begin{aligned}\text{चा} &= \text{ञु}\sqrt{\text{क}^2+1}\\ &= \text{ञु}\cdot\text{छेभ}\end{aligned}\right\}$$ यदि ध्रुव स्थान से चाप गणना करें और चलनकलन के १३१वें प्रक्रम से

$$\text{ल} = \text{ञु}\cdot\text{ज्याभ} \therefore \frac{\text{ताल}}{\text{ताञु}} = \text{ज्याभ}$$ इस लिये चलनकलन के १६८ वें प्रक्रम से

$$\text{वि} = \text{ञु}\cdot\frac{\text{ताञु}}{\text{ताल}} = \text{ञु}\cdot\frac{1}{\text{ज्याभ}}$$

वि का भाग चा में देने से $\frac{\text{चा}}{\text{वि}} = \text{ज्याभ}\cdot\text{छेभ} = \text{स्थि}$ इस से सिद्ध होता है कि लाघुरिक्थिक सर्पिल में चाप और वक्रजातीय वृत्त के व्यासार्द्ध में स्थिर सम्बन्ध है। मानो कि वि = चा·त जहां त कोई स्थिराङ्क है तो वि = चा·त = $\frac{\text{ताचा}}{\text{ताब}}$ इस लिये ताब त = $\frac{\text{ताचा}}{\text{चा}}$

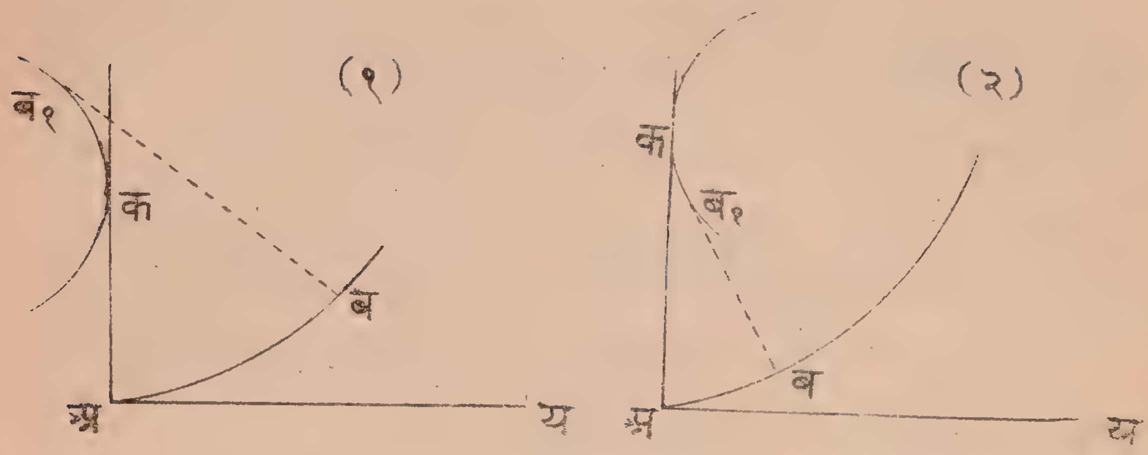
चलानयन से $\text{त}\cdot\text{ब} + \text{स्थि}_1 = \text{लाचा}$

इस लिये चा = $\text{अ}\cdot\text{इ}^{\text{त}\cdot\text{ब}}$ जहां अ कोई स्थिराङ्क है

यदि चा = चा + अ तो चा = $\text{अ}\,(\text{इ}^{\text{त}\cdot\text{ब}} - 1)$

अब इस में चा वहां से परिगणित है जहां ब = ०।

९६। यदि वक्र का चापस्पार्शिक समीकरण ज्ञात हो तो उस के अवलूत का भी समीकरण जान सक्ते हैं



कल्पना करो कि अब एक वक्र है जिस के अवलूत की आकृति कब$_{१}$ है। मान लो कि अब चाप (चा) की गणना वक्र के किसी नियत विन्दु से ब की ओर है।

और कब$_{१}$ चाप (चं) की गणना वक्र के किसी नियत विन्दु से ब$_{१}$ की ओर है तो यदि अ विन्दु पर अब वक्र की जो स्पर्शरेखा अय है उसी को नियत स्पर्शरेखा मान अब का चापस्पार्शिक समीकरण बनावें और क विन्दु से इस पर जो कअ लम्ब डाला गया इस को नियत स्पर्शरेखा मान कर यदि कब$_{१}$ का चापस्पार्शिक समीकरण बनावें तो अवलूत और अनवलूत के लक्षण से स्पष्ट है कि दोनों समीकरणों में ब$_{१}$ का एक ही मान रहेगा ।

इस लिये (१) क्षेत्र में $चं = वि - स्थि = \frac{ताचा}{ताब_{१}} - स्थि$

और (२) क्षेत्र में $चं = स्थि - वि = स्थि - \frac{ताचा}{ताब_{१}}$

इस लिये यदि चा का मान ब$_{१}$ के फलरूप में हो तो चं का मान भी ब$_{१}$ के कोई फल रूप में जान सक्ते हैं जहां जब चं = ० तब वक्र जातीय वृत्त का जो व्यासार्द्ध होगा वही स्थि का मान है ।

जैसे चक्राभ में जानते हैं कि चा = ४ अज्याप

इस लिये $चं = स्थि - \frac{ताचा}{ताब_{१}} = स्थि - ४अकोज्याप$ ।

इस में यदि $ब_१ = बं_१ + \frac{\pi}{२}$ और $चां = घ +$ स्थि ऐसा कल्पना करें तो $घ = ४अ·ज्याबं_१$ अर्थात् यह भी एक चक्रालद ही हुआ ।

इस लिये चक्रालद का अवलूत एक चक्रालद ही है ।

इसी प्रकार इस प्रक्रम की विपरीत क्रिया से यदि किसी वक्र का चापस्पार्शिक समीकरण ज्ञात हो तो उस के अनवलूत का चापस्पार्शिक समीकरण जान सक्ते हैं । क्योंकि ऊपर के प्रक्रम से सिद्ध है कि

$$\frac{ताचा}{ताब_१} = स्थि \pm चां$$

इस लिये $चा = \int (स्थि \pm चां)\, ताब_१$

इस लिये यदि चां का मान $ब_१$ के फल रूप में हो तो चा का मान भी $ब_१$ के कोई फल रूप में ला सक्ते हैं ।

जैसे वृत्त में जानते हैं कि $चां = अ·ब_१$ इस लिये

$$चा = \int (स्थि \pm अ·ब_१) ताब_१ = स्थि\ ब_१ \pm \frac{अ·ब_१^२}{२} + स्थि_१$$

यदि चा की प्रवृत्ति वहां से हो जहां $ब_१ = 0$ तो $स्थि_१ = 0$ । और अवलूत और अनवलूत के योग विन्दु ही से यदि चा की गणना करें तो $स्थि = 0$ ऐसी स्थिति में

$$चा = \frac{अ·ब_१^२}{२}$$ । (चलनकलन के १०८ वें प्रक्रम का (५) उदाहरण देखो और फ के स्थान में $ब_१$ को मान लो)

ऊपर कहे हुये प्रक्रम की युक्ति से अवलूत का अवलूत उस का अवलूत यों अवलूतों की परम्परा वा अनवलूत का अनवलूत उसका अनवलूत यों अनवलूतों की परम्परा सहज में जान सक्ते हैं ।

विद्यार्थियों को चाहिये कि चापस्पार्शिक समीकरण पर से वक्रों की आकृति निकाल अच्छी तरह अभ्यास करें । परन्तु चाहिये कि ऐसा वक्र लें जिस की आकृति चक्रालद के ऐसी प्रसिद्ध हो ।

९० । चाप पर से विपरीत क्रिया से वक्र के भुज कोटि का ज्ञान ।

कल्पना करो कि चा = फ(य) तो

$$फ'(य) = \frac{ताचा}{ताय} = \sqrt{१ + \frac{तार^२}{ताय^२}}$$

इस लिये $\frac{तार}{ताय} = \sqrt{\{फ'(य)\}^२ - १}$

और $र = \int [\{फ'(य)\}^२ - १]^{\frac{१}{२}} ताय$

जैसे (१) कल्पना करो कि चा = फ(य) = गय

इस लिये फ'(य) = ग

और $र = \int [\{फ'(य)\}^२ - १]^{\frac{१}{२}} ताय = \int (ग^२ - १)^{\frac{१}{२}} ताय = य\sqrt{ग^२ - १} + स्थि$

यदि $र' = र - स्थि$ तो वक्र का समीकरण $र' = य\sqrt{ग^२ - १}$

(२) $चा = फ(य) = \sqrt{(४गय)}$ तो $फ'(य) = (\frac{ग}{य})^{\frac{१}{२}}$

इस लिये $र = \int \{\frac{ग}{य} - १\}^{\frac{१}{२}} ताय = \int \frac{(ग - य)ताय}{\sqrt{(गय - य^२)}} = \int \frac{(\frac{ग}{२} - य)ताय}{\sqrt{(गय - य^२)}}$

$$+ \frac{ग}{२} \int \frac{ताय}{\sqrt{(गय - य^२)}}$$

$$= \sqrt{(गय - य^२)} + \frac{ग}{२} उज्या^{-१} \frac{२य}{ग} + स्थि$$

यदि र' = र − स्थि तो चलनकलन के २८६ प्रक्रम के (११) वक्र, चक्रालद का समीकरण यह है ।

(३) चा = फ(य) = अ·लाय तो $फ'(य) = \frac{अ}{य}$

यहां $र = \int \sqrt{\left[\frac{अ^२}{य^२} - १\right]} ताय = \int \frac{(अ^२ - य^२)ताय}{य\sqrt{(अ^२ - य^२)}}$

$$= \int \frac{अ^२ ताय}{य\sqrt{(अ^२ - य^२)}} - \int \frac{यताय}{\sqrt{(अ^२ - य^२)}}$$

$$= अ^२ ला \frac{य}{अ + \sqrt{(अ^२ - य^२)}} + \sqrt{(अ^२ - य^२)} + स्थि$$

इस तरह से अनेक उदाहरण का उत्तर निकाल सक्ते हो।

इस तरह विद्यार्थियों को चाहिये कि पूर्व प्रक्रमों में लिखे हुये सिद्धान्तों का अच्छी तरह अभ्यास कर प्रश्न का उत्तर निकालें।

६८। यदि आकाश में कोई वक्र हो जिस का समीकरण भुज, कोटि और शङ्कु से बनता हो अर्थात् तीन धरातलों के सम्बन्ध से समीकरण हो तो गोलयुक्ति से यदि क्षितिज, पूर्वापर और याम्योत्तर वृत्त ये तीनों धरातलों को क्रम से मान लें और आकाशीय विन्दु को ग्रह कल्पना करें तो इस ग्रह का ज्ञान याम्योत्तरीय भुज = य पूर्वापरीय कोटि = र और दृग्मण्डलीय शङ्कु = ल के ज्ञान से हो जायगा।

यदि किसी नियत विन्दु से ग्रह के गमन दिशा से जो वक्र हुआ उस के चाप का मान = चा मानें और जब भु = य+△य, को = र+△र और ल = ल+△ल कल्पना करें और उस समय में चाप = चा+△चा मानो तो गोल युक्ति से $△चा = \sqrt{(△य)^2 + (△र)^2 + (△ल)^2}$

△य का भाग देकर △य के स्थान में शून्य का उत्थापन देने से

$$\frac{ताचा}{ताय} = \sqrt{१ + \left(\frac{तार}{ताय}\right)^2 + \left(\frac{ताल}{ताय}\right)^2}$$ ऐसा होगा।

इसी प्रकार

$$\frac{ताचा}{तार} = \sqrt{\left\{१ + \left(\frac{ताय}{तार}\right)^२ + \left(\frac{ताल}{तार}\right)^२\right\}}$$

और $$\frac{ताचा}{ताल} = \sqrt{\left\{१ + \left(\frac{ताय}{ताल}\right)^२ + \left(\frac{तार}{ताल}\right)^२\right\}}$$

यहां वक्र के समीकरणों पर से $\frac{ताय}{तार}$, $\frac{तार}{ताय}$, $\frac{ताल}{तार}$, इत्यादि, य वा र अथवा ल के फल रूप में आ सक्ते हैं फिर इन पर से

$$चा = \int \sqrt{\left\{१ + \left(\frac{तार}{ताय}\right)^2 + \left(\frac{ताल}{तार}\right)^२\right\}}\, ताय$$

वा $$चा = \int \sqrt{\left\{१ + \left(\frac{ताय}{तार}\right)^२ + \left(\frac{ताल}{तार}\right)^२\right\}}\, तार$$

अथवा $$चा = \int \sqrt{\left\{१ + \left(\frac{ताय}{ताल}\right)^२ + \left(\frac{तार}{ताल}\right)^२\right\}}\, ताल$$

इन का ज्ञान हो जायगा।

इस प्रकार के वक्र को द्विगुण वक्रजातीय वक्र (Curves of double Curvature) कहते हैं

जैसे कल्पना करो कि एक वक्र नीचे लिखे दो समीकरणों से ज्ञात है ।

$$र^{२} = ४अय \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (१)$$

$$ल = \sqrt{(२गय - य^{२})} + ग उज्या^{-१} \frac{य}{ग} \cdots\cdots (२)$$

यहां दो समीकरणों से वक्र ज्ञात है इस का तात्पर्य ऐसा समझो।

कल्पना करो कि उदयास्तसूत्र और याम्योत्तर का सम्पात अ है तो अ विन्दु को मूल विन्दु, याम्योत्तर सूत्र को य, अक्ष और उदयास्त—सूत्र को र अक्ष कल्पना करने से (१) समीकरण का परवलय जो क्षितिज के धरातल में उत्पन्न होगा उस को आधार मान उस पर एक समखात ऐसा बनावो जिस का पृष्ठ सूत्र सब ऊर्ध्वाधर सूत्र के समानान्तर हो। इसी तरह अ को मूल मान और याम्योत्तर सूत्र को, य अक्ष, ऊर्ध्वाधर सूत्र को र अक्ष के ऐसा ल अक्ष मान याम्योत्तर वृत के धरातल में जो (२) समीकरण से चक्रालद बनेगा इस को आधार मान एक समखात बनावो जिस का सब पृष्ठ सूत्र उदयास्त सूत्र के समानान्तर हों तो ऐसे दो समखातों के आपस में कटने से जो वक्र की आकृति होगी वही वक्र ऊपर के दोनों समीकरणों से अपेक्षित है।

इस लिये यहां $\frac{तार}{ताय} = \sqrt{\frac{अ}{य}}$ । $\frac{ताल}{ताय} = \sqrt{\left(\frac{२ग - य}{य}\right)}$

और $$\frac{ताचा}{ताय} = \sqrt{\left\{१ + \left(\frac{तार}{ताय}\right)^{२} + \left(\frac{ताल}{ताय}\right)^{२}\right\}} = \sqrt{\left(१ + \frac{अ}{य} + \frac{२ग}{य} - १\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{२ग + अ}{य}\right)}$$

इस लिये $$चा = \int \sqrt{\left(\frac{२ग+अ}{य}\right)} ताय = \sqrt{२ग+अ} \int ताय\, य^{-\frac{१}{२}}$$

$$= २\sqrt{(२ग+अ)}\sqrt{य}$$

यदि मुल विन्दु से चाप की गणना करें तो स्थिराङ्क की कुछ आवश्यकता नहीं।

९९। इसी तरह यदि य, र, और ल किसी "का" चल के फल हों तो चलनकलन की युक्ति से सिद्ध कर सक्ते हो कि

$$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताका}} = \sqrt{\left\{\left(\frac{\text{ताय}}{\text{ताका}}\right)^2 + \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताका}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताका}}\right)^2\right\}}$$

$$\text{इस लिये चा} = \sqrt{\left\{\left(\frac{\text{ताय}}{\text{ताका}}\right)^2 + \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताका}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताका}}\right)^2\right\}}\,\text{ताका}$$

जैसे यदि $\text{य} = \text{अकोज्याका}$, $\text{र} = \text{अज्याका}$, $\text{ल} = \text{गका}$

तो $\frac{\text{ताय}}{\text{ताका}} = -\,\text{अज्याका}$, $\frac{\text{तार}}{\text{ताका}} = \text{अकोज्याका}$, $\frac{\text{ताल}}{\text{ताका}} = \text{ग}$

$$\text{इस लिये चा} = \int\sqrt{(\text{अ}^2\text{ज्या}^2\text{का} + \text{अ}^2\text{कोज्या}^2\text{का} + \text{ग}^2)}\,\text{ताका}$$

$$= \int(\text{अ}^2 + \text{ग}^2)^{\frac{1}{2}}\,\text{ताका} = \sqrt{(\text{अ}^2 + \text{ग}^2)}\,\text{का} + \text{स्थि} \text{ ।}$$

१०० । यदि $\text{य} = \text{अु}\text{ज्याषकोज्याष}_1$, $\text{र} = \text{अु}\text{ज्याषज्याष}_1$, $\text{ल} = \text{अु}\text{कोज्याष}$ ऐसा अलीय समीकरण हो, तो जब वक्र दो समीकरण से विदित है अर्थात् य, र, ल में से कोई दो तीसरे के फल हैं तब स्पष्ट है कि अु, ष, ष_1 इन में भी कोई दो तीसरे के फल होंगे । इस लिये ष के वश से

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताष}} = \text{ज्याषकोज्याष}_1\frac{\text{ताअु}}{\text{ताष}} + \text{अु}\text{कोज्याषकोज्याष}_1 - \text{अु}\text{ज्याषज्याष}_1\frac{\text{ताष}_1}{\text{ताष}}$$

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताष}} = \text{ज्याषज्याष}_1\frac{\text{ताअु}}{\text{ताष}} + \text{अु}\text{कोज्याषज्याष}_1 + \text{अु}\text{ज्याषकोज्याष}_1\frac{\text{ताष}_1}{\text{ताष}}$$

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताष}} = \text{कोज्याष}\frac{\text{ताअु}}{\text{ताष}} - \text{अु}\text{ज्याष}$$

$$\text{इस लिये}\left(\frac{\text{ताय}}{\text{ताष}}\right)^2 + \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताष}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताष}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\text{ताअु}}{\text{ताष}}\right)^2 + \text{अु}^2\text{ज्या}^2\text{ष}\left(\frac{\text{ताष}_1}{\text{ताष}}\right)^2 + \text{अु}^2$$

$$\text{और चा} = \int\sqrt{\left\{\left(\frac{\text{ताअु}}{\text{ताष}}\right)^2 + \text{अु}^2\text{ज्या}^2\text{ष}\left(\frac{\text{ताष}_1}{\text{ताष}}\right)^2 + \text{अु}^2\right\}}\,\text{ताष}$$

इसी तरह र, और ष_1 के वश से

$$\text{चा} = \int \sqrt{\left\{ \text{अ}_७^२ \left(\frac{\text{ताष}}{\text{तार}}\right)^२ + १ + \text{अ}_७^२ \text{ज्या}^२\text{ष} \left(\frac{\text{ताप}_१}{\text{तार}}\right)^२ \right\}} \,\text{ताअ}_७$$

$$\text{वा, चा} = \int \sqrt{\left\{ \text{अ}_७^२ \left(\frac{\text{ताष}}{\text{ताष}_१}\right)^२ + \left(\frac{\text{ताअ}_७}{\text{ताष}_१}\right)^२ + \text{अ}_७^२ \text{ज्या}^२\text{ष} \right\}} \,\text{ताप}_१$$

१०१ । इसी तरह अन्तरिक्ष में जो वक्र हो उस के किसी विन्दु पर जो स्पर्शरेखा हो उस पर मूल विन्दु से पड़ा लम्ब यदि ल कहो तो ७५ प्रक्रम के (६) समीकरण से चा $= \int \frac{\text{अ}_७ \,\text{ताअ}_७}{\sqrt{(\text{अ}_७^२ - \text{ल}^२)}}$ ऐसा होगा ।

यह समीकरण यद्यपि एकधरातलगत वक्र में सिद्ध होता है तथापि जब दो एकधरातलीय वक्रों के योग ही से यह वक्र उत्पन्न हुआ है तब योग विन्दु में इस में भी यही धर्म्म रहेगा । अथवा जब चलन-कलन से सिद्ध है कि

$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताअ}_७}$ । $\frac{\text{अ}_७}{\sqrt{(\text{अ}_७^२ - \text{ल}^२)}}$ यह दोनों अन्तरिक्षस्थ वक्र के स्पर्शरेखा और अ$_७$ति ही उत्पन्न कोण को छेदन रेखा हैं तब $\frac{\text{ताचा}}{\text{ताअ}_७}$

$$= \frac{\text{अ}_७}{\sqrt{(\text{अ}_७^२ - \text{न}^२)}} \therefore \text{चा} = \int \frac{\text{अ}_७ \,\text{ताअ}_७}{\sqrt{(\text{अ}_७^२ - \text{ल}^२)}} \text{ ।}$$

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

१ । यदि वक्र का समीकरण ४ $(\text{य}^२ + \text{र}^२) - \text{अ}^६ = ३\text{अ}^४\text{र}^{\frac{२}{३}}$ यह हो तो इस के परिधि का मान बताओ । परि· $= ६\text{अ}^३$

२ । सिद्ध करो कि चीतर का चा $= \pm$ गलार $+$ स्थि ।

३ । सिद्ध करो कि किसी चिच्छेद (Trochoid) का चाप

$$= \text{स्थि} - \int \sqrt{\left\{ (\text{ग} - \text{क})^२ \text{ज्या}^२ \frac{\text{अं}}{२} + (\text{ग} + \text{क})^२ \text{कोज्या}^२ \frac{\text{अं}}{२} \right\}} \,\text{ताअं}$$

जहां अं $= \pi -$ अ

चलनकलन के २८६ प्रक्रम का (१२) वक्र देखो

४ । किसी वक्र में यदि य = ज्याप (२प+३प^{२}) + कोज्याप (२+६प)

र = कोज्याप (२प+३प^{२}) — ज्याप (२+६प)

तो सिद्ध करो कि चा = प^{३}+प^{२}+६प+२ ।

५ । सिद्ध करो कि किसी वक्र में यदि

य = ज्यापफ$'$(प) + कोज्यापफ$''$(प)

र = कोज्यापफ$'$(प) — ज्यापफ$''$(प)

तो चा = फ$'$(प) + फ$''$(प) ।

६ सिद्ध करो कि यदि वक्र का समीकरण र = य^{४}+ $\frac{३}{२}$ य^{२} हो तो यदि मूलविन्दु से चाप की गणना करें तो चा = य (य^{२}+१)$^{\frac{३}{२}}$ ।

७ । र^{३}= अय^{२} इस समीकरण के वक्र का चापस्पार्शिकसमीकरण कैसा होगा । उ० चा = $\frac{८अ}{२७}$ (छे^{३}ब$_{१}$—१) ।

८ । सिद्ध करो कि परवलय के चापस्पार्शिकसमीकरण में

$$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताब}_{१}} = \frac{\text{२अ}}{\text{कोज्या}^{३}\text{ब}_{१}} \text{ । वा, चा} = \frac{\text{अ}}{\text{२}}\text{ला}\frac{\text{१+ज्याब}_{१}}{\text{१—ज्याब}_{१}} + \frac{\text{अज्याब}_{१}}{\text{१—ज्या}^{२}\text{ब}_{१}} \text{ ।}$$

९ । सिद्ध करो कि यदि वक्र का (य+र)$^{\frac{२}{३}}$—(य—र)$^{\frac{२}{३}}$= अ$^{\frac{२}{३}}$ यह समीकरण हो तो

$$\text{चा} = \frac{१}{२\sqrt{२}}\left\{(\text{य+र})^{\frac{२}{३}}+(\text{य—र})^{\frac{२}{३}}\right\}^{\frac{३}{२}} \text{ ।}$$

१० । सिद्ध करो कि अपचक्राभ का अवलुम्ब एक अपचक्राभ ही होगा जिस के स्थिरवृत्त का व्यासार्द्ध = $\frac{\text{अ}^{२}}{\text{अ+२क}}$ और चलितवृत्त का व्यासार्द्ध = $\frac{\text{अ·क}}{\text{अ+२क}}$ होगा ।

११ । अु^{म}= अ^{म}कोज्यामप इस समीकरण के वक्र में यदि $\frac{१}{म}$ यह कोई अभिन्नसंख्या हो तो चाप का मान जान सक्ते हैं ।

१२ । सिद्ध करो कि यदि वक्र का समीकरण $इ^र = \frac{इ^य+१}{इ^य-१}$ ऐसा हो

तो $\frac{ताचा}{ताय} = \frac{इ^{२य}+१}{इ^{२य}-१}$ होगा ।

१३ । यदि वृत्त का व्यासार्द्ध = १ इस के चाप का प्रमाण = ष हो और इस के अनवलूत का चाप = $ष_१$, अनवलूत के अनवलूत का चाप = $ष_२$, इस के अनवलूत का चाप = $ष_३$ इस तरह अनवलूतपरम्पराओं के चाप मान $ष_४$, $ष_५$ इत्यादि माने तो सिद्ध करो कि

$ष + ष_१ + ष_२ + ष_३ + \cdots\cdots = इ^ष - १$ होगा ।

अनवलूत और वृत्त के योग विन्दु से चाप की गणना समझो ।

१४ । यदि किसी इलामूलक (The Lamniscate) का

$भु^२ = अ^२$ कोज्या२ष ऐसा समीकरण हो (चलनकलन के २८६ प्रक्रम का (१०) वक्र देखो)

तो सिद्ध करो कि उस के परिधि का मान

$$= २\pi अ \left(१ - \frac{१}{२^२} + \frac{१^२.३^२}{२^२.४^२} - \frac{१^२.३^२.५^२}{२^२.४^२.६^२} + \cdots\right)$$ यह होगा ।

१५ । यदि एक विन्दु से दीर्घवृत्त पर दो स्पर्शरेखा खींची जायं तो दो स्पर्शरेखा दो भुज और उन के अन्तर्गत दीर्घ वृत्त का चाप आधार मानो तो दो सरल और एक वक्र रेखा इस से एक त्रिबाहु उत्पन्न हुआ इस त्रिबाहु के अन्तर्गत जो वृत्त बनेगा वह वक्राधार को जहां स्पर्श करेगा उस से जो दो भाग वक्राधार के होंगे उन का अन्तर त्रिभुज के दोनों भुजों के अन्तर तुल्य होता है । इसे सिद्ध करो ।

१६ । जिस वक्र का $र = \frac{य^२}{२अ}$, $ल = \frac{य^३}{६अ^२}$ ये समीकरण हैं उस के मूल विन्दु से चाप का मान बताओ । उ०, चा = य+ल ।

१७ । सिद्ध करो कि यदि वक्र के समीकरण पर से $\left(\frac{तार}{ताय}\right)^२ = २\,\frac{ताल}{ताय}$ तो चा = य + ल + स्थि ।

१८ । वक्र का एक समीकरण $\text{र} = \text{फ}(\text{य})$ यह दिया हुआ है और यह जानते हैं कि इस के चाप का मान $\text{य}+\text{ल}+$ स्थि यह है तो वक्र का दूसरा समीकरण क्या होगा । उ०, $\text{ल} = \frac{\text{१}}{\text{२}}\int\{\text{फ}'(\text{य})\}^{\text{२}}\,\text{ताय}$ ।

१९ । वक्र का एक समीकरण $\text{र} = \text{ज्याय}$ यह है और इस के चाप का मान $= \text{य}+\text{ल}$ तो दूसरे समीकरण का मान बताओ ।

$$\text{उ०}\ \ \text{ल} = \frac{\text{अ}^{\text{२}}}{\text{४}}\left(\text{य}+\frac{\text{ज्या२य}}{\text{२}}\right)$$

२० । किसी वक्र में $\text{र} = \text{२}\sqrt{\text{अय}} - \text{य},\ \text{ल} = \text{य} - \frac{\text{२}}{\text{३}}\sqrt{\frac{\text{य}^{\text{३}}}{\text{अ}}}$ तो चाप का क्या मान होगा । उ० $\text{चा} = \text{य}+\text{र}-\text{ल}$

२१ । यदि वक्र के $\frac{\text{य}^{\text{२}}}{\text{अ}^{\text{२}}} - \frac{\text{र}^{\text{२}}}{\text{क}^{\text{२}}} = \text{१},\ \text{य} = \frac{\text{अ}}{\text{२}}\left(\text{इ}^{\frac{\text{ल}}{\text{अ}}} + \text{इ}^{-\frac{\text{ल}}{\text{अ}}}\right)$ ये समीकरण हों तो चाप का क्या प्रमाण होगा ।

उ०, य,र अक्ष के धरातल में जहां पर वक्र मिला है इस विन्दु से यदि चाप की गणना करें तो $\text{चा} = \frac{(\text{अ}^{\text{२}}+\text{क}^{\text{२}})^{\frac{\text{१}}{\text{२}}}}{\text{अ}}(\text{य}^{\text{२}}-\text{अ}^{\text{२}})^{\frac{\text{१}}{\text{२}}}$

२२ । ८५ प्रक्रम के (१) क्षेत्र में त विन्दु पर जो स्पर्शरेखा होगी उस पर न से पड़े लम्ब का मान यदि नल' रक्खो तो सिद्ध करो कि

(१) $\text{नल}\times\text{नल}' = \text{नअ}\times\text{नक}$ । (२) $\text{नब}^{\text{२}}+\text{नल}'^{\text{२}} = \text{नअ}^{\text{२}}+\text{नक}^{\text{२}}$ ।

२३ । एक दीर्घ वृत्त के परिधि चतुर्थांश का ऐसा द्विभाग करो कि उनका अन्तर व्यासार्द्धान्तर तुल्य हो ।

८५ प्रक्रम का (१) क्षेत्र देखो यहां त और ब दोनों एक ही स्थान में हो जायंगे । और $\text{नल} = \sqrt{\text{नअ}\times\text{नक}}$ और $\text{बल} = \text{नअ}-\text{नक}$

२४ । २३वें प्रश्न में द्विभागकारी विन्दु जो है उस पर दीर्घ वृत्त में जो स्पर्शरेखा होगी वह दोनों अक्षों में द्विभागकारी विन्दु से क्रम से व्यासार्द्ध तुल्य अन्तर पर लगेगी अर्थात् र अक्ष में बृहद्व्यासार्द्धतुल्य अन्तर पर और य अक्ष में लघुव्यासार्द्ध तुल्य अन्तर पर। इस को सिद्ध करो।

२७ । यदि ८७ प्रक्रम के (५) क्षेत्र में (२२) प्रश्न के अनुसार लम्ब नल डालें तो सिद्ध करो कि बल, तल बढ़ाने से जिस बिन्दु पर कटेंगे वह बिन्दु दीर्घ वृत्त के उस एकनाभिक अतिपरवलय में होगी जो कि (२३) प्रश्न में द्विभागकारी जो बिन्दु है उस पर जायगा । यहां पर यह भी सिद्ध करो कि अ और क बिन्दुगत स्पर्शरेखाओं के योग बिन्दु पर भी वह अतिपरवलय जायगा ।

२८ । एक ही स्थान से तीन लड़के दौड़े पहला सरल मार्ग में और बाक़ी दो वक्र मार्ग में । पहला जिस स्थान पर पहुंचता था वहां पर यदि उस की गमन दिशा पर लम्ब करें तो यह लम्ब दूसरे और तीसरे के तात्कालिक स्थान पर जाता है । यदि पहला ५० कोश चल कर ठहर जाय तो उस समय दूसरा और तीसरा कितना कितना चल चुके होंगे । इस प्रश्न में इतना हम जानते हैं कि किसी समय में पहले से दूसरे के स्थान का अन्तर $= \sqrt{४अय}$, और पहले से तीसरे के स्थान का अन्तर $= अय^{\frac{३}{२}}$ ।

यहां किसी समय में पहले के चल चुकने का प्रमाण य है

उ० दूसरे का चलना $= \sqrt{५००+५०अ} + \frac{अ}{२} ला \left\{ \frac{२०+अ+२\sqrt{५००+५०अ}}{अ} \right\}$

तीसरे का चलना $= अ \left\{ \left[\frac{४}{९अ^{२}} + १० \right]^{\frac{३}{२}} - \frac{८}{२७अ^{३}} \right\}$

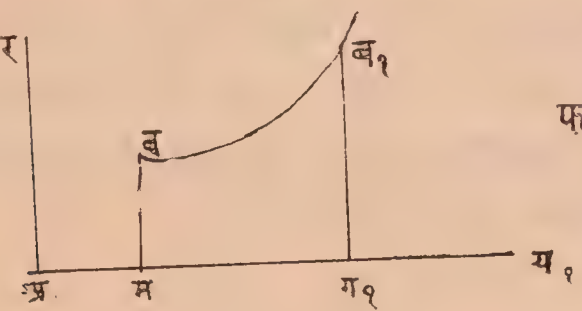
इति षष्ठाध्याय ।

अथ सप्तमाध्याय ।

वक्र क्षेत्रों का फलानयन ।

१०२ । जिस वक्र में कोटि, भुज का कोई फल है वहां चलनकलन से सिद्ध है कि $\frac{ताफ}{ताय} = र$ (चलनकलन का १५६ वां प्रक्रम देखो)

इस लिये $फ = \int रताय$ इस में कोटि के स्थान में $र_१$ और $र_२$ का उत्थापन देकर सान्त चलानयन से



बमम१ब१ क्षवचतुर्भुज का फल $\int_{र_१}^{र_२} रताय$ यह होगा । यहां यदि अक्ष तिर्यक् हों तो यही फल ज्याअ $\int_{र_१}^{र_२} रताय$ ऐसा होगा । यहां अ = ∠रअय ।

१०३ । इस की व्याप्ति के लिये कुछ वक्रों का फलानयन करते हैं ।

केन्द्र को मूल मान वृत्त का $र = \sqrt{अ^२ - य^२}$ यह समीकरण है इस के फल का मान जानना है ।

यहां १०२ प्रक्रम से $फ = \int\sqrt{अ^२ - य^२}\,ताय$

$= \frac{य\sqrt{(अ^२ - य^२)}}{२} + \frac{अ^२}{२}\,ज्या^{-१}\frac{य}{अ} + स्थि$, यदि प्रथम र को र अक्ष में मिला समझें तो उस समय य = ० होगा और फल भी शून्य इस लिये स्थि = ० तब फल

$$\int\sqrt{(अ^२ - य^२)}ताय = \frac{य\sqrt{(अ^२ - य^२)}}{२} + \frac{अ^२}{२}\,ज्या^{-१}\frac{य}{अ} ।$$

इस में यदि य = अ तो वृत्त के चतुर्थांश का फल $= \frac{अ^२}{२}\times\frac{\pi}{२}$

इस लिये समग्रवृत्तफल $= अ\times अ\pi = अ^२\pi = \frac{२अ\times २अ\pi}{४} = \frac{२अ\times परि}{४}$

अर्थात् परिधि, व्यास के घात की चौथाई वृत्त का फल होता है । इस को भास्कराचार्य भी जानते थे इन से भी प्राचीन ब्रह्मगुप्तादिकों ने भी यह जान लिया था । परन्तु इस की उपपत्ति वे लोग नहीं दिखाये ।

१०४ । दीर्घ वृत्त के फल का आनयन ।

यहां $र^2 = \frac{क^2}{अ^2}(अ^2 - य^2)$ इस लिये

$फ = \frac{क}{अ}\int\sqrt{(अ^2 - य^2)}ताय$ । परन्तु १०३ प्रक्रम से $\int\sqrt{(अ^2 - य^2)}ताय$ यह अ, व्यासार्द्ध से उत्पन्न वृत्त का फल है इस लिये उस वृत्त का सम्पूर्ण फल जो हो उसे लघुव्यासार्द्ध से गुण कर बृहद्व्यासार्द्ध का भाग देने से दीर्घवृत्त का क्षेत्र फल होता है ।

१०५ । परवलय के फल का आनयन ।

यहां $र^2 = ४अय$ । इस लिये

$फल = \int\sqrt{(४अय)}ताय = \frac{४\sqrt{अ}}{३}य^{\frac{3}{2}} + स्थि$ ।

यहां यदि $य = 0$ तो $फ = 0$ इस लिये $स्थि = 0$ ।

तब $फ = \frac{४\sqrt{अ}}{३} \times य^{\frac{1}{2}} \times य = \frac{२यर}{३}$ अर्थात् भुज और कोटि से जो आयत बने उस का दो तृतीयांश परवलय का फल होता है ।

१०६ । जिस वक्र का $र = अय^न$ ऐसा समीकरण है उस के फल का आनयन ।

$$यहां\ फ = \int अय^न ताय = अ\int य^न ताय = \frac{अ\cdot य^{न+1}}{न+1} + स्थि\ ।$$

यदि मूल स्थान से फल की प्रवृत्ति मानें तो $स्थि = 0$ इस लिये

$$फ = \frac{अ\cdot य^{न+1}}{न+1} = \frac{अय^न \times य}{न+1} = \frac{र \times य}{न+1}$$ यह फल जानने के लिये ऐसे वक्र में एक साधारण सिद्धान्त उत्पन्न हो गया । इस में न के स्थान में यदि $\frac{1}{2}$ का उत्थापन दो तो परवलय का फल आ जायगा ।

१०७ । अतिपरवलय के फल का आनयन ।

केन्द्र को मूल मानने से इस का समीकरण $र = \frac{क}{अ}\sqrt{(य^2 - अ^2)}$

इस लिये $फ = \frac{क}{अ}\int\sqrt{(य^2 - अ^2)}\ ताय$

$$= \frac{क}{अ}\left\{\frac{य\sqrt{(य^2 - अ^2)}}{२} - \frac{अ^2}{२}\ ला\left(य + \sqrt{(य^2 - अ^2)}\right)\right\} + स्थि$$

यदि य = अ तो फ = 0 इस लिये

$$0 = \frac{क}{अ}\left\{-\frac{अ^2}{२}\ लाअ\right\} + स्थि \therefore स्थि = \frac{कअ^2}{२अ}\ लाअ$$

इस लिये

$$फ = \frac{क}{अ}\left\{\frac{य\sqrt{य^2 - अ^2}}{२} - \frac{अ^2}{२}\ ला\left[\frac{य + \sqrt{य^2 - अ^2}}{अ}\right]\right\}$$

$$= \frac{यर}{२} - \frac{अक}{२}\ ला\ \left(\frac{य}{अ} + \frac{र}{क}\right)$$

केन्द्र से वक्र के प विन्दु तक एक रेखा कर दो तो भुज, कोटि, श्रुति से जो जात्यत्रिभुज होगा उस का फल $\frac{यर}{२}$ यह होगा। इस लिये श्रुति, अतिपरवलय का चाप और केन्द्र और शिरःस्थान का अन्तर अ से जो वक्र त्रिबाहु होगा उस का फल $= \frac{अक}{२}\ ला\left(\frac{य}{अ} + \frac{र}{क}\right)$ ······ (१)

(चलनकलन का १११ वां प्रक्रम देखो)

१०८। चक्राभास के फल का आनयन।

चक्राभास में $य = अ\ (१ - कोज्याष)$। $र = अ\ (ष + ज्याष)$।

इस लिये $ताय = अज्याष \cdot ताष$।

और $रताय = अ^2(ज्या^2ष + षज्याष)\ ताष$

$$= अ^2षज्याषताष + \frac{अ^2}{२}(१ - कोज्या२ष)ताष$$

इस लिये $\int रताय = अ^2\int षज्याषताष + \frac{अ^2}{२}\int(१ - कोज्या२ष)ताष$

$$= अ^2(-षकोज्याष + ज्याष) + \frac{अ^2}{२}\left(ष - \frac{ज्या२ष}{२}\right)$$

यदि 0 और π के बीच ष के मान में फल साधन करें तो चक्राभास के आधे का फल $= अ^2\pi + \frac{अ^2\pi}{२} = \frac{३अ^2\pi}{२}$ = चलितवृत्त के फल का

डेढ़गुना इस लिये चलितवृत्त के फल को तीन गुना करने से सम्पूर्ण चक्रालद का फल होता है (चलनकलन में २८६ प्रक्रम का (११) वां वक्र देखेा और वहां क = अ, और अ = ष मान लेा)

इसी वक्र में यदि र = अष तेा पूर्व युक्ति से $\int \text{रताय} = \text{अ}^2 \int \text{षज्याषताष}$

$= \text{अ}^2(-\text{षकोज्याष} + \text{ज्याष})$ यह चक्रालद के साथी का फलसमीकरण हुआ। इस में ष के 0 और π के बीच यदि फल साधन करें तेा आधे वक्र का फल $= \text{अ}^2 \pi$। इस लिये चलितवृत्त का दूना इस का फल होगा।

१०९। कातन्वली के फल का आनयन।

यहां $\text{र} = \frac{\text{ग}}{२}\left(\text{इ}^{\frac{\text{य}}{\text{ग}}} + \text{इ}^{-\frac{\text{य}}{\text{ग}}}\right)$

इस लिये $\text{फ} = \int \text{रताय} = \frac{\text{ग}}{२}\int\left(\text{इ}^{\frac{\text{य}}{\text{ग}}} + \text{इ}^{-\frac{\text{य}}{\text{ग}}}\right)\text{ताय} = \frac{\text{ग}^२}{२}\left(\text{इ}^{\frac{\text{य}}{\text{ग}}} - \text{इ}^{-\frac{\text{य}}{\text{ग}}}\right)$

$= \text{ग}\left\{\frac{\text{ग}^२}{४}\left(\text{इ}^{\frac{२\text{य}}{\text{ग}}} - २ + \text{इ}^{-\frac{२\text{य}}{\text{ग}}}\right)\right\}^{\frac{१}{२}}$

$= \text{ग}\left\{\frac{\text{ग}^२}{४}\left(\text{इ}^{\frac{२\text{य}}{\text{ग}}} + २ + \text{इ}^{-\frac{२\text{य}}{\text{ग}}}\right) - \text{ग}^२\right\}^{\frac{१}{२}} = \text{ग}\left(\text{र}^२ - \text{ग}^२\right)^{\frac{१}{२}}$

११०। $\left(\frac{\text{य}}{\text{अ}}\right)^{\frac{२}{२\text{म}+१}} + \left(\frac{\text{र}}{\text{क}}\right)^{\frac{२}{२\text{न}+१}} = १$ इस समीकरण के वक्र का फलानयन।

यहां यदि $\text{य} = \text{अज्या}^{२\text{म}+१}\text{ष}_१$ और $\text{र} = \text{क कोज्या}^{२\text{न}+१}\text{ष}_१$

तेा $\text{ताय} = \text{अ}(२\text{म}+१)\text{ कोज्याष}_१ \text{ ज्या}^{२\text{म}}\text{ष}_१ \text{ ताष}_१$

इस लिये $\text{फ} = \int \text{रताय} = \text{अक}(२\text{म}+१)\int \text{कोज्या}^{२\text{न}+२}\text{ष}_१ \text{ज्या}^{२\text{म}}\text{ष}_१ \text{ताष}_१$

३५ प्रक्रम के (१) समीकरण से इस का चल ला सक्ते हेा।

वा खण्डचलानयन से

$\int \text{कोज्या}^{२\text{न}+२}\text{ष}_१ \text{ज्या}^{२\text{म}}\text{ष}_१ \text{ताष}_१$

$$= \frac{\text{कोज्या}^{२\text{न}+१}\text{ष}_१ \text{ज्या}^{२\text{म}+१}\text{ष}_१}{२\text{म}+१} + \frac{२\text{न}+१}{२\text{म}+१}\int \text{ज्या}^{२\text{म}+२}\text{ष}_१ \text{कोज्या}^{२\text{न}}\text{ष}_१ \text{ताष}_१$$

$$= \frac{\text{कोज्या}^{२\text{न}+१}\text{ष}_१ \text{ज्या}^{२\text{म}+१}\text{ष}_१}{२\text{म}+१}$$

$$+\frac{२न+१}{२म+१}\int ज्या^{२म}ष_१(१-कोज्या^२ष_१)कोज्या^{२न}ष_१ताष_१$$

$$=\frac{कोज्या^{२न+१}ष_१ज्या^{२म+१}ष_१}{२म+१}$$

$$+\frac{२न+१}{२म+१}\int ज्या^{२म}ष_१कोज्या^{२न}ष_१ताष_१$$

$$-\frac{२न+१}{२म+१}\int ज्या^{२म}ष_१कोज्या^{२न+२}ष_१ताष_१$$

पक्षान्तरनयन कर $\frac{२म+२न+२}{२म+१}$ का भाग दे देने से

$$\int ज्या^{२म}ष_१कोज्या^{२न+२}ष_१ताष_१$$

$$=\frac{कोज्या^{२न+१}ष_१ज्या^{२म+२}ष_१}{२(म+न+१)}+\frac{२न+१}{(२म+न+१)}\int ज्या^{२म}ष_१कोज्या^{२न}ष_१ताष_१$$

.....(१)

यदि ० और $\frac{\pi}{२}$ के बीच $ष_१$ के मान में सान्तचल का मान लावें तो सम्पूर्ण वक्र का फल (१) से स्पष्ट है कि

$$\frac{१.३.५.७\cdots\cdots(२न+१)\cdot१.३.५.७\cdots\cdots(२म+१)}{२.४.६.८\cdots\cdots\cdots\cdots२(म+न+१)}$$ २अकπ, यही होगा ।

न, म के स्थान में भिन्न भिन्न संख्याओं का उत्थापन देकर अनेक वक्र और उनके क्षेत्रफल जान सक्ते हो।

जैसे यदि वक्र का $(\frac{य}{अ})^{\frac{२}{३}}+(\frac{र}{क})^{\frac{२}{३}}=१$ ऐसा समीकरण हो तो यहां म = १ और न = १ इस लिये २न+१ = ३, और २म+१ = ३।२.(म+न+१) = ६ । फल में इन का उत्थापन देने से वक्र का सम्पूर्ण फल = $\frac{१.३.१.३}{२.४.६}$ अकπ = $\frac{३}{१६}$ २अकπ = $\frac{३}{८}$ अकπ

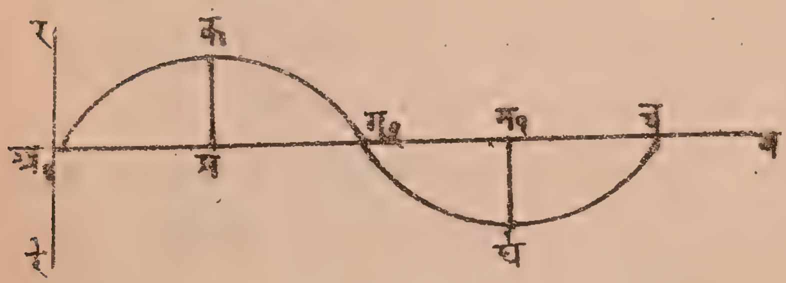
इस वक्र को चलनकलन से सिद्ध कर सक्ते हो कि दीर्घवृत्त का अवलूत है।

१११ । कभीं कभीं दो सीमाओं के भीतर फलानयन में बड़ा धोखा पड़ जाता है । क्योंकि ऊपर के प्रक्रमों से जो फलानयन किया है किसी स्थान में र के धनत्व वा ऋणत्व का विचार नहीं किया है सर्वत्र र को एक ही प्रकार का मान लिया है। परन्तु फलानयन में र के स्थान में य के फल में जो उस का रूप होता है उस का उत्थापन देकर फल

साधन किया है इस लिये संभव है कि इस फल में ऋणात्मक र संबन्धी य का उत्थापन देने से वही मान आवे जो कि धनात्मक र में आता हो ऐसी दशा में अवश्य धोखा खाने की सम्भावना है ।

जैसे यदि किसी वक्र का $र = ग ज्या \frac{य}{अ}$ ऐसा समीकरण हो तो यहां फल का समीकरण $\int र ताय = ग \int ज्या \frac{य}{अ} ताय = - गअकोज्या \frac{य}{अ}$ मानो कि जब $य = य_1$ तो $र = र_1$ और जब $य = य_2$ तब $र = र_2$ इस लिये $र_1$ और $र_2$ कोटि मान के बीच में क्षेत्रफल $ग \int_{य_1}^{य_2} ज्या \frac{य}{अ} ताय$

$$= ग अ \left\{ कोज्या \frac{य_1}{अ} - कोज्या \frac{य_2}{अ} \right\}$$ यह हुआ । इस में पहले मानो कि $य_1 = 0, य_2 = अ\pi$, तो फल $= २गअ$ यह होगा । फिर मानो कि $य_1 = 0,\ य_2 = २अ\pi$ तो $गअ \left\{ कोज्या \frac{य_1}{अ} - कोज्या \frac{य_2}{अ} \right\}$ इस का मान शून्य होगा जो कि क्षेत्र की आकृति से असम्भव है क्योंकि जब तक य, 0 से $\frac{अ\pi}{२}$ के ऊपर आवेगा तब तक र का धनमान बढ़ता रहेगा फिर आगे धनमान घटने लगेगा जब $य = अ\pi$ तब शून्य हो जायगा इस लिये वक्र फिर य अक्ष में मिलेगा इस लिये $य_1 = 0$ और $य_1 = अ\pi$ के बीच का पहले जो फल २अग आया है वह एक ही चाल के र में सिद्ध हुआ ठीक आया । अब य का मान $अ\pi$ के आगे बढ़ेगा तब र का मान ऋण होगा और बराबर य के $२अ\pi$ मान तक ऋण ही ऋण चला जायगा ऐसी दशा में य अक्ष से नीचे वक्र बनेगा जैसा कि नीचे की आकृति से स्पष्ट है । यहां $अ_1ग_1 = अ\pi$ और $अ_1च = २अ\pi$



और $कम = ग = म_1घ$ । और वक्र के धन कोटि मान में $अ_1कग_1$ खण्ड और ऋण कोटि मान में $ग_1घच$ खण्ड है । इस

लिये 0 और $2\text{अ}\pi$ के बीच य के मान में $\text{अ}_1\text{कग}_1\text{घच}$ का फल वक्र के समीकरण से $\text{अ}_1\text{कग}_1$ का अर्थात् $2\text{ग}\cdot\text{अ}$ का दूना 4गअ होगा परन्तु फल के समीकरण से शून्य आया इस लिये वह असम्भव है। ऐसी स्थिति में चाहिये कि $\text{ग}_1\text{घच}$ के फल के लिये र का मान ऋण मानो तब इस का फल $= \int(-\text{र})\text{ताय} = \text{ग}\int\left(-\text{ज्या}\frac{\text{य}}{\text{अ}}\right)\text{ताय} = \text{अग कोज्या}\frac{\text{य}}{\text{अ}} + \text{स्थि}$

इस लिये सम्पूर्ण फल $= \text{ग}\int_0^{\text{अ}\pi}\text{ज्या}\frac{\text{य}}{\text{अ}}\text{ताय} + \text{ग}\int_{\text{अ}\pi}^{2\text{अ}\pi}\left(-\text{ज्या}\frac{\text{य}}{\text{अ}}\right)\text{ताय}$

$= 2\text{गअ} + 2\text{गअ} = 4\text{गअ}$ यह ठीक होगा।

ऐसे ऐसे स्थानों में र के धनत्व वा ऋणत्व का विना विचार किये फलानयन ठीक न होगा।

१५२। जब कहीं सीमितवक्र के फल साधन में $\int\text{रताय}$ के मान में य के स्थान में क्या क्या उत्थापन दें जिस में सम्पूर्ण वक्र का फल आ जाय इस में संशय जान पड़े तो $\int\text{रताय}$ स्थान में $\int\text{र}\frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}}\text{ताचा}$ इस का उत्थापन देने से सुगमता हो जायगी इस में चा के स्थान में वक्र के परिधि का वा तत्सम्बन्धी और कोई चल का उत्थापन देने से सम्पूर्ण फल तुरन्त आ जायगा।

जैसे दीर्घ वृत्त में ६७ वें प्रक्रम से

$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताष}} = \text{अ}\sqrt{(1-\text{इ}^2\text{ज्या}^2\text{ष}}$ और $\frac{\text{ताय}}{\text{ताष}} = \text{अकोज्याष}$

इस लिये

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} = \frac{\text{कोज्याष}}{\sqrt{1-\text{इ}^2\text{ज्या}^2\text{ष}}}$$ और $\text{र}\cdot\frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}}\cdot\text{ताचा} = \text{कअकोज्या}^2\text{ष ताष}$

इस लिये $\int\text{र}\frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}}\text{ताचा} = \text{अक}\int\text{कोज्या}^2\text{ष ताष}$

$= \frac{\text{अक}}{2}(1+\text{कोज्या}2\text{ष})\text{ताष} = \frac{\text{अक}}{2}\left(\text{ष}-\frac{\text{ज्या}2\text{ष}}{2}\right)$ अब सम्पूर्ण दीर्घवृत्त की परिधि में ष, चार समकोण अर्थात् 2π होगा इस लिये इस का उत्थापन देने से सम्पूर्ण दीर्घवृत्त का फल $= \text{अक}\pi = \frac{\text{क}}{\text{अ}}\text{अ}^2\pi$। यही पहले भी सिद्ध हुआ था।

कहीं कहीं य को कोटि और र को भुज मान कर भी दो भुजों के बीच वक्रीय फल का साधन कर सक्ते हो।

जैसे परवलय में $र^2 = ४अय \therefore \frac{र^2}{४अ} = य$ इस लिये

$\int यतार = \frac{१}{४अ}\int र^2तार = \frac{र^3}{१२अ} = \frac{र^2 \times र}{४अ \times ३} = \frac{य \times र}{३}$ यह फल वक्र के विन्दु से र अक्ष पर जो य के तुल्य लम्ब पड़ा उस से और लम्बमूल और वक्र के शिरःस्थान अ तक जो रेखा और वक्र के चाप से जो वक्र त्रिबाहु हुआ उस का है।

११३। २, और ४० वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि दो कोटियों $(र_0, र_न)$ के बीच वक्र का फल $= \int_{य_0}^{य_न} रताय = र_0च_1 + र_1च_2 + \cdots + र_{न-1}च_न$ यही है। जहां $र = फ(य)$, $र_0 = फ(य_0)$, $र_1 = फ(य_1) \cdots$ $र_न = फ(य_न)$ इस लिये ६३ प्रक्रम की युक्ति से श्रेढीरूप फल के पदों का मान $र\triangle य$ इस सांचे से अथवा $फ(य)\triangle य$ इस सांचे से प्रकाश कर सक्ते हैं।

यहां भी ठीक वैसा ही अर्थ समझना चाहिये और च का सूचक जैसा कि चलनकलन में प्रसिद्ध है $\triangle य$ है।

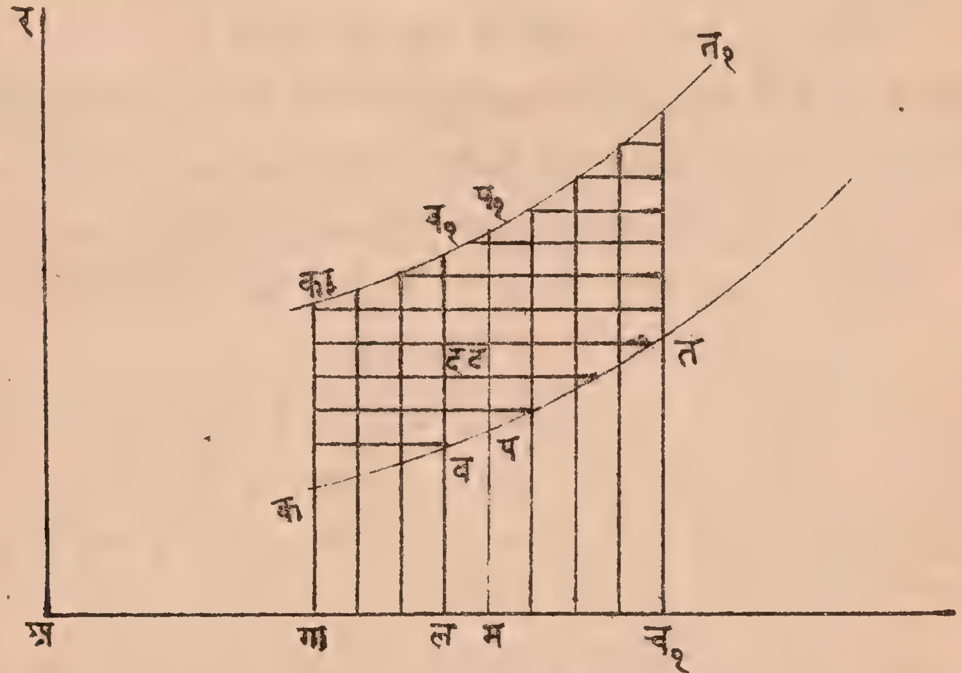
इस लिये दो कोटियों के बीच वक्र का फल $यो र\triangle य$ इस से प्रकाश कर सक्ते हैं $र\triangle य$ के पहले जो यो है उस से यह समझना चाहिये कि $\triangle य$ के स्थान में $च_1$, $च_2$, $\cdots$ $च_न$ का और र के स्थान में $र_0$, $र_1$, $र_2$ $\cdots$ $र_{न-1}$ उत्थापन देने से जितने पद होंगे उन सभों का योग किया हुआ है।

५ वें प्रक्रम से स्पष्ट जान पड़ेगा कि यदि $अअ_1$, $अ_1अ_2$ इत्यादि को (जो अत्यल्प मान हैं) $\triangle य$ से प्रकाश करें और $क_2अ_1$, $क_1अ_2$ इत्यादि को र से, तो पास की दो कोटि, तदन्तर्गत भुजान्तर $= \triangle य$ और वक्र चापान्तर से जो चतुर्भुज बनेगा उस का फल $= र\triangle य$ यह होगा।

और र, के स्थान में $र_0$, $र_1$ इत्यादि का $\triangle य$ के स्थान में $अअ_1$, $अ_1अ_2$ इत्यादि का उत्थापन देने से श्रेढी के प्रत्येक पद क्रम से प्रत्येक वक्र चतुर्भुज के फल होंगे।

वक्र क्षेत्र के फल ही से धीरे धीरे चलराशिकलन का प्रचार हुआ। क्षेत्र का छोटा छोटा खण्ड कर के पृथक् पृथक् खण्डों के फलों के योग से फल का ले आना भास्कर के गोलाध्याय के पृष्ठ फल देखने से जान पड़ता है कि भास्कर को समझ पड़ा था परन्तु इन से पहले भारतवर्ष में इस प्रकार से फल ले आने की कहीं भी चर्चा नहीं है।

११४। दो वक्रों के चाप और उन के कोट्यन्तर से जो क्षेत्र बनेगा उस का फलानयन।



कल्पना करो कि का $व_1प_1त_1$ एक वक्र का चाप और कवपत दूसरे वक्र का चाप, काक प्रथम कोट्यन्तर और $त_1$त दूसरा कोट्यन्तर इन से काकतत$_1$ वक्र क्षेत्र जो बना है उस का फल जानना है।

र अक्ष के समानान्तर और य अक्ष के समानान्तर अनेक रेखा जिन में दो दो का अन्तर बहुत ही अल्प हो खींचने से देखो अनेक, क्षेत्र के भीतर आयत बन गये हैं जिन में किसी एक दट का फल (यदि अल = य, दल = र और अम = य+$\triangle$य, मट = र+$\triangle$र) $\triangle$य$\triangle$र यही होगा। अब, $वव_1प_1$प वक्र चतुर्भुज के बीच जितने छोटे छोटे दट के ऐसे चतुर्भुज हैं उन के फलों का योग यो$\triangle$य$\triangle$र यही होगा। यहां क्षेत्र के देखने से स्पष्ट है कि $\triangle$य सर्वत्र एक ही है इस लिये

$$\text{यो}\triangle\text{य}\triangle\text{र} = \int_{\text{लव}}^{\text{लव}_1} \triangle\text{यतार} = \triangle\text{य}\int_{\text{लव}}^{\text{लव}_1}\text{तार}$$

इस में △र का मान अत्यल्प मानने से अर्थात् तार मानने से वव$_1$ प$_1$प वक्र चतुर्भुज के नीचे ऊपर जो छोटे छोटे चतुर्भुज से विलक्षण खण्ड हैं उन का लोप हो जायगा।

इस लिये $\text{वव}_1\text{प}_1\text{प} = \triangle\text{य}\int_{\text{फ(य)}}^{\text{फा(य)}}\text{तार} = \triangle\text{य}\{\text{फा(य)} - \text{फ(य)}\}$

यहां $\text{फा(य)} = \text{व}_1\text{ल}$ = ऊपर के वक्र की कोटि और

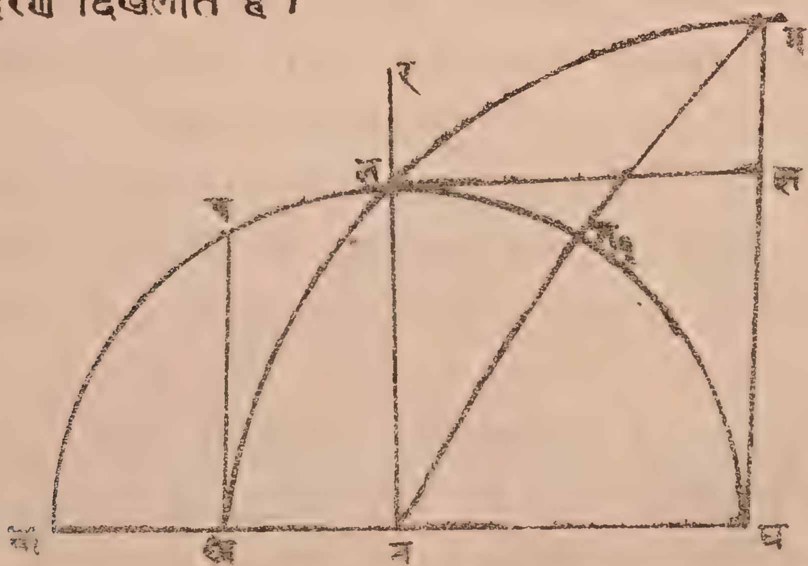
$\text{फ(य)} = \text{वल}$ = नीचे के वक्र की कोटि ।

इस प्रकार सब स्तम्भरूप वक्रचतुर्भुजों का योग $\triangle\text{य}\{\text{फा(य)}-\text{फ(य)}\}$ इस सांचे से निकाल सक्ते हो अर्थात् यदि अग = गा, अच१ = चा तो ककातत$_1$त $= \text{यो}\triangle\text{य}\{\text{फा(य)} - \text{फ(य)}\} = \int_{\text{गा}}^{\text{चा}}\{\text{फा(य)} - \text{फ(य)}\}\text{ताय}$

यदि द्विगुणचलानयन की रीति से इस फल को लिखें तो इस का मान $\int_{\text{गा}}^{\text{चा}}\int_{\text{फ(य)}}^{\text{फा(य)}}\text{तार ताय}$ ऐसा होगा ।

११५ । यदि जिन दो वक्रों के य = फा(र) । य = फ(र) ऐसे समीकरण हों और उन से सीमितक्षेत्र का फल जानना हो तो स्पष्ट है कि ऊपर के मान में य र को बदल देना होगा । अर्थात् तब क्षेत्र का फल $\int_{\text{गा}}^{\text{चा}}\int_{\text{फ(र)}}^{\text{फा(र)}}\text{ताय तार}$ ऐसा होगा ।

११६ । ऊपर के दोनों प्रक्रमों की व्याप्ति दिखलाने के लिये एक उदाहरण दिखलाते हैं ।



कल्पना करो कि गलघ वृत्त, और चलग परवलय में न मूलबिन्दु, नल = २अ = वृत्त का व्यासार्द्ध नअ = गअ = अ, तो यदि न बिन्दु से घ की ओर भुजगणना करें तो वृत्त का समीकरण $र^2 = ४अ^2 - य^2$ और परवलय का समीकरण $र^2 = ४अ(अ+य)$ होगा। क्योंकि इस स्थिति में न परवलय की नाभी होगी।

अब यहां यह इच्छा है कि घल वृत्त का चाप, गल परवलय का चाप, गघ परवलय की कोटि इन से जो गघल वक्र चिवाहु होगा उस का फल निकालें।

११४ वें प्रक्रम में जो ऐसे क्षेत्रों के लिये फल का $\int_{गा}^{चा}\int_{फ(य)}^{फा(य)} तार\, ताय$ यह समीकरण है इस में $फा(य) = \sqrt{४अ(अ+य)}$, $फ(य) = \sqrt{४अ^2 - य^2}$ चा = नघ = २अ, । और गा = ० मानने से घलग का फल

$$= \int_0^{२अ} \{फा(य) - फ(य)\}\, ताय$$

$$= \int_0^{२अ} \{(४अ^2+४अय)^{\frac{१}{२}} - (४अ^2-य^2)^{\frac{१}{२}}\}\, ताय$$

$$= \int_0^{२अ} (४अ^2+४अय)^{\frac{१}{२}} ताय - \int_0^{२अ} (४अ^2-य^2)^{\frac{१}{२}} ताय$$

$$परन्तु = \int (४अ^2+४अय)^{\frac{१}{२}} ताय = \frac{४}{३}\sqrt{अ}\,(अ+य)^{\frac{३}{२}}$$

$$और \int_0^{२अ} (४अ^2+४अय)^{\frac{१}{२}} ताय = \frac{४}{३}\, अ^{\frac{१}{२}} (३अ)^{\frac{३}{२}} - \frac{४}{६}\, अ^{\frac{१}{२}} अ^{\frac{३}{२}}$$

$$= \frac{४}{३}\{(३)^{\frac{३}{२}} अ^2 - अ^2\} = \frac{४अ^2}{३}(\sqrt{२७} - १)$$

$$और \int (४अ^2 - य^2)^{\frac{१}{२}} ताय = २अ^2 ज्या^{-१}\frac{य}{२अ} + य\sqrt{(४अ^2 - य^2)}$$

$$इस\ लिये \int_0^{२अ} (४अ^2-य^2)^{\frac{१}{२}} ताय = अ^2\pi$$

ऊपर फल मान में इन का उत्थापन देने से

$$फ = \int_0^{२अ} \{(४अ^2+४अय)^{\frac{१}{२}} ताय = (४अ^2-य^2)^{\frac{१}{२}}\}\, ताय$$

$$= \frac{४अ^2}{३}(\sqrt{२७} - १) - अ^2\pi\ ।$$

यदि परवलय में भुज की गणना अ विन्दु से करें तो १०५ प्रक्रम से अलन परवलयखण्ड का फल = $\frac{अ \times २अ \times २}{३} = \frac{४अ^२}{३}$ और अगघ पर-वलय का फल = $\frac{२अघ \times गघ}{३} = \frac{२ \times ३अ (१२अ^२)^{\frac{१}{२}}}{३} = ४अ^२ \sqrt{३}$ । इन दोनों का अन्तर लघगल वक्रचतुर्भुज का फल = $४अ^२ \sqrt{३} - \frac{४अ^२}{३}$

$= \frac{४अ^२}{३} (\sqrt{२७} - १)$

इस में वृत्त के चतुर्थांश घनल को अर्थात् $अ^२ \pi$ इस को घटा देने से गलव वक्र क्षेत्र का फल = $\frac{४अ^२}{३} (\sqrt{२७} - १) - अ^२ \pi$ । यही पहले भी सिद्ध हुआ था।

इसी जगह यदि अल परवलय का चाप, कल, वृत्त का चाप, और कअ भुजान्तर से जो क्षेत्र है इस का फल अपेक्षित हो तो क्षेत्र से स्पष्ट है कि न से यदि क की ओर भुजगणना करें और भुज ही को कोटि मान लें तो यहां वृत्त का समीकरण $र^२ = ४अ^२ - य^२$ यह जो है उस से $य^२ = ४अ^२ - र^२$ और परवलय का समीकरण $र^२ = ४अ (अ - य)$ जो यह होगा उस से $य = अ - \frac{र^२}{४अ}$

अब ११५ वें प्रक्रम से $फा(र) = \sqrt{४अ^२ - र^२}$ । $फ(र) = अ - \frac{र^२}{४अ}$
$चा = २अ$, $गा = ०$ और क्षेत्र का फल $= \int_{गा}^{चा} \int_{फ(र)}^{फा(र)}$ ताय तार

$= \int_{०}^{२अ} \{ फा(र) - फ(र) \} तार = \int_{०}^{२अ} \{ \sqrt{४अ^२ - र^२} - अ + \frac{र^२}{४अ} \} तार$

परन्तु $\int \sqrt{४अ^२ - र^२}\, तार = २अ^२ ज्या^{-१} \frac{र}{२अ} + र\sqrt{(४अ^२ - र^२)}$

और $\int (अ + \frac{र^२}{४अ}) तार = अर - \frac{र^३}{१२अ}$

इस लिये

$$\int_{0}^{२अ}\left\{\sqrt{(४अ^{२}-र^{२})}-\left(अ-\frac{र^{२}}{४अ}\right)\right\}तार = अ^{२}\pi - २अ^{२} + \frac{२}{३}अ^{२}$$

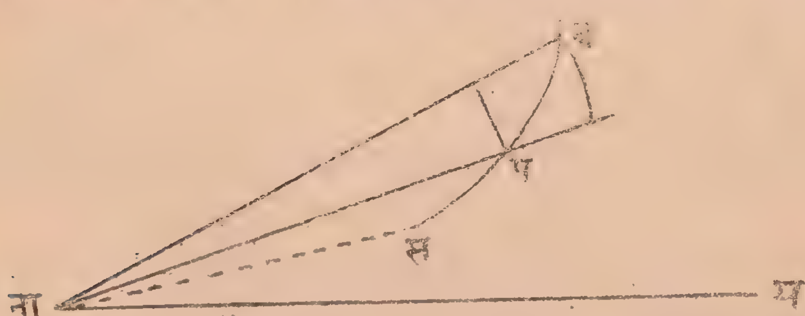
$$= अ^{२}\pi - \frac{४}{३}अ^{२} \text{ यही फल हुआ ।}$$

इसे परवलयखण्ड नक्षत्र और वृत्त चतुर्थांश नकल के अन्तर पर से भी निकाल सक्ते हो । इस तरह से जहां पर जिन सीमाओं के भीतर फल अपेक्षित हो वहां पर क्षेत्र की आकृति से उन सीमाओं को अच्छी तरह से जांच कर तब उन के उत्थापन से फल का साधन करो ।

जहां दोनों वक्रात्मक भुज एक ही वक्र के शाखा हों वहां पर ११४ और ११५ प्रक्रम की युक्ति बहुत ही काम की है जैसे किसी वक्र का यदि $(र-मय-ग)^{२}= अ^{२}-य^{२}$ यह समीकरण हो तो इस पर से र का एक मान $र = मय+ग+\sqrt{(अ^{२}-य^{२})}$ यह दूसरा $मय+ग-\sqrt{(अ^{२}-य^{२})}$ यह होगा ।

यहां $फा(य)=मय+ग+\sqrt{(अ^{२}-य^{२})}$ और $फ(य)=मय+ग-\sqrt{(अ^{२}-य^{२})}$ मान लें तो $फा(य)- फ(य) = २\sqrt{(अ^{२}-य^{२})}$ इस लिये वक्रशाखा और कोटयन्तर से उत्पन्न फल $२\int_{गा}^{चा}\sqrt{(अ^{२}-य^{२})}ताय$ यह होगा । यहां य का परमाल्प मान $-अ$ और परमाधिक $२अ$ मान लें तो पहले वक्र का सम्पूर्ण फल $= २\int_{-अ}^{अ}\sqrt{(अ^{२}-य^{२})}ताय = \pi अ^{२}$ यही होगा ।

११७ । अनीयभुज युग्म पर से वक्र का फलानयन ।



सपब वक्र में मान लो कि ना ध्रुवस्थान नाय नियत रेखा नाप = श्रु । $\angle$ यनाप = ष और श्रु = फ(ष) । तो यदि नासप वक्र त्रिभुज का फल = आ हो तो चलनकलन के १२८ वें प्रक्रम से

$$\frac{\text{ताआ}}{\text{ताष}} = \frac{\text{शु}^2}{२} = \frac{\{\text{फ}(\text{ष})\}^2}{२}$$

इस लिये $\text{आ} = \frac{1}{2}\int\{\text{फ}(\text{ष})\}^2\text{ताष} + \text{स्थि}$। यहां वक्र में स विन्दु को कोई निश्चित विन्दु समझेा।

$$\text{मानेा कि} \int \frac{\{\text{फ}(\text{ष})\}^2\text{ताष}}{२} = \text{फा}(\text{ष})$$

$$\text{तेा} \quad \text{आ} = \text{फा}(\text{ष}) + \text{स्थि} \cdots\cdots (१)$$

कल्पना करो कि जब $\text{ष} = \text{ष}_1$ तब $\text{आ} = \text{आ}_1$ और जब $\text{ष} = \text{ष}_2$ तब $\text{आ} = \text{आ}_2$ इस लिये (१) समीकरण से

$$\text{आ}_2 - \text{आ}_1 = \text{फा}(\text{ष}_2) - \text{फा}(\text{ष}_1) = \frac{1}{2}\int_{\text{ष}_1}^{\text{ष}_2}\{\text{फ}(\text{ष})\}^2\text{ताष}$$

यदि श्रुति और स्पर्शरेखा से उत्पन्न केाण का मान भ रक्खेा और ध्रुवस्थान से स्पर्शरेखा पर पड़े हुये लम्ब का मान ल मानेा तेा त्रिकेाणमिति से

$$\text{ज्याभ} = \frac{\text{लं}}{\text{शु}} = \text{शु}\ \frac{\text{ताष}}{\text{ताचा}} \text{ (चलनकलन के १५५ वें प्रक्रम से)}$$

$$\text{इस लिये आ} = \frac{1}{2}\int\text{शु}^2\text{ताष} = \frac{1}{2}\int\text{शु}^2\frac{\text{ताष}}{\text{ताचा}}\cdot\text{ताचा}$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{\text{शु}\cdot\text{ल}}{\text{शु}}\ \text{ताचा} = \frac{1}{2}\int\text{ल ताचा} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (२)$$

यहां ल का मान चा के फल रूप में वा $\frac{\text{ताचा}}{\text{ताल}}$ का मान ल के फल रूप में जानने से आ का मान चा वा ल के फल रूप में जान सक्ते हेा।

$$\text{आ} = \frac{1}{2}\int\text{ल ताचा} = \frac{1}{2}\int\text{ल}\frac{\text{ताचा}}{\text{ताशु}}\ \text{ताशु} = \frac{1}{2}\int\frac{\text{लशु ताशु}}{\sqrt{(\text{शु}^2 - \text{ल}^2)}} \cdots\cdots \quad (३)$$

७५ प्रक्रम के (६)वें समीकरण से।

ऊपर दिखलाये हुये तीनों समीकरण पर से अनेक वक्र का फल जान सक्ते हैं।

११८ । सामासिक सर्पिल का फलानयन (जिस वक्र के समीकरण या नाम इत्यादि में संशय पड़े तो चलनकलन का २८६ प्रक्रम देखना चाहिये) ।

यहां $श्रु = श्र\ इ^{\frac{ष}{क}}$ इस लिये ११७ प्रक्रम के (१) समीकरण से ।

$$आ = \frac{१}{२}\int श्र^२ इ^{\frac{२ष}{क}} = \frac{श्र^२ क}{४} इ^{\frac{२ष}{क}} + स्थि।$$

$$और\ आ_२ - आ_१ = \frac{श्र^२ क}{४}\left[इ^{\frac{२ष_२}{क}} - इ^{\frac{२ष_१}{क}} \right] = \frac{क}{४}(श्रु_२^२ - श्रु_१^२)$$

इस लिये $श्रु_२$, $श्रु_१$ ये दो भुज और तदन्तर्गत वक्र का चाप इन से जो क्षेत्र होगा उस का फल $\frac{क}{४}(श्रु_२^२ - श्रु_१^२)$ यही होगा ।

११९ । अक्षीय भुजयुग्म पर से परवलय का फलानयन ।

चलनकलन के १०८ प्रक्रम से ।

$$यहां\quad श्रु = \frac{श्र}{कोज्या^२ \frac{ष}{२}}\quad इस\ लिये ।$$

$$आ = \frac{श्र^२}{२}\int \frac{ताष}{कोज्या^४ \frac{१}{२}ष} = श्र^२ \int (१ + स्प^२ \tfrac{१}{२}ष)\ तास्प\ \tfrac{१}{२}ष$$

$$= श्र^२ (स्प \tfrac{१}{२} ष + \frac{स्प^३ \frac{१}{२}ष}{३}) + स्थि ।$$

$$इस\ लिये\ आ_२ - आ_१ = श्र^२ (स्प \tfrac{१}{२}ष_२ + \frac{स्प^३ \frac{१}{२}ष}{३}) - श्र^२ (स्प \tfrac{१}{२}ष_१ - \tfrac{१}{३}स्प^३ \tfrac{१}{२}ष_१)$$

इस में यदि $ष_१ = ०$ और $ष_२ = \frac{\pi}{२}$ तो

$आ_२ - आ_१ = श्र^२(१ + \frac{१}{३}) = \frac{४}{३} श्र^२ = \frac{२}{३}\frac{श्र \times २श्र}{१}$ अर्थात् परवलय के नाभिग कोटि, तत्सम्बन्धि शिरःस्थान से भुज और परवलय का चाप इन से बने क्षेत्र का फल $\frac{२}{३}$ श्र×२श्र यह वही सिद्ध हुआ जो १०५ वें प्रक्रम से सिद्ध होता है ।

१२० । जिस वक्र का ध्रुवीय समीकरण $ध्रु = अ(ष + ज्याष)$ यह है उस का फलानयन ।

यहां $आ = \frac{१}{२}अ^२ \int (ष + ज्याष)^२ ताष = \frac{अ^२}{२} \int (ष^२ + २ष\, ज्याष + ज्या^२ष) ताष$

परन्तु $\int ष\, ज्याष = -षकोज्याष + ज्याष$ ।

और $\int ज्या^२ ष\, ताष = \frac{१}{२}\int (१ - को\, ज्या२ष)\, ताष = \frac{१}{२}(ष - \frac{ज्या२ष}{२})$

इस लिये

$$आ = \frac{अ^२}{२}\left\{ \frac{ष^३}{३} - २ष\, कोज्याष + २ज्याष + \frac{ष}{२} - \frac{१}{४}ज्या\, २ष \right\} + स्थि$$

यहां यदि 0 और $\frac{\pi}{२}$ के बीच ष के मान में फल लावें तो

$$फल = \frac{अ^२}{२}(\frac{\pi^३}{२४} + \frac{\pi}{४} + २) ।$$

१२१ । यदि वक्र का ध्रुवीय समीकरण $ध्रु = २\, अ \frac{कोज्याष - \sqrt{(कोज्या२ष)}}{ज्या^२ष}$

ऐसा हो तो

$$आ = २\, अ^२ \int \frac{कोज्या^२ष + को\, ज्या२ष - २\, को\, ज्याष\sqrt{(कोज्या२ष)}}{ज्या^४ष} ताष$$

$$= २\, अ^२ \int \frac{कोज्या^२ष + कोज्या२ष}{ज्या^४ष} ताष - ४अ^२ \int \frac{कोज्याष\sqrt{(कोज्या२ष)}}{ज्या^४ष} ताष$$

$$परन्तु \int \frac{को\, ज्या^२ष + को\, ज्या२ष}{ज्या^४ष} ताष = \int (२\, कोस्प^२ष - १)\, को\, छे^२ष ताष$$

$$= कोस्पष - \frac{२}{३}\, कोस्प^३ष ।$$

$$और \int \frac{कोज्याष\sqrt{(कोज्या२ष)}}{ज्या^४ष} ताष = \int \frac{\sqrt{(१ - २\, ज्या^२ष)}\, ताज्याष}{ज्या^४ष}$$

इस में मानो कि $ज्याष = \frac{१}{द}$ तो

$$\int \frac{\sqrt{(१-२\text{ ज्या}^{२}\text{ष})}}{\text{ज्या}^{४}\text{ष}} \text{ताष} = -\int \sqrt{(\text{द}^{२}-२)}\,\text{दताद}$$

$$= -\frac{१}{३}(\text{द}^{२}-२)^{\frac{३}{२}} = -\frac{१}{३}\left(\frac{१}{\text{ज्या}^{२}\text{ष}}-२\right)^{\frac{३}{२}}$$

$= -\frac{१}{३}(\text{को छे}^{२}\text{ष}-२)^{\frac{३}{२}}$ इन का उत्थापन आ में देने से

$$\text{आ} = २\text{ अ}^{२}\text{ कोस्पष} - \frac{४\text{अ}^{२}}{३}\text{कोस्प}^{३}\text{ष} + \frac{४\text{अ}^{२}}{३}(\text{को छे}^{२}\text{ष}-२)^{\frac{३}{२}} + \text{स्थि}$$

$$= २\text{ अ}^{२}\text{ कोस्पष} + \frac{४\text{ अ}^{२}}{३}\left\{(\text{को छे}^{२}\text{ष}-२)^{\frac{३}{२}} - \text{कोस्प}^{३}\text{ष}\right\} + \text{स्थि}$$

$$= २\text{ अ}^{२}\text{कोस्पष} + \frac{४\text{ अ}^{२}}{३}\left\{\frac{(१-२\text{ज्या}^{२}\text{ष})^{\frac{३}{२}} - \text{ज्या}^{३}\text{षकोस्प}^{३}\text{ष}}{\text{ज्या}^{३}\text{ष}}\right\} + \text{स्थि}$$

$$= २\text{ अ}^{२}\text{कोस्पष} + \frac{४\text{ अ}^{२}}{३}\;\frac{(\text{कोज्या }२\text{ ष})^{\frac{३}{२}} - \text{कोज्या}^{३}\text{ष}}{\text{ज्या}^{३}\text{ष}} + \text{स्थि}$$

१२२ । जिस सर्पिल का अक्षीयसमीकरण $\text{श्रु} = \text{अष}^{\text{न}}$ यह है उस का फलानयन ।

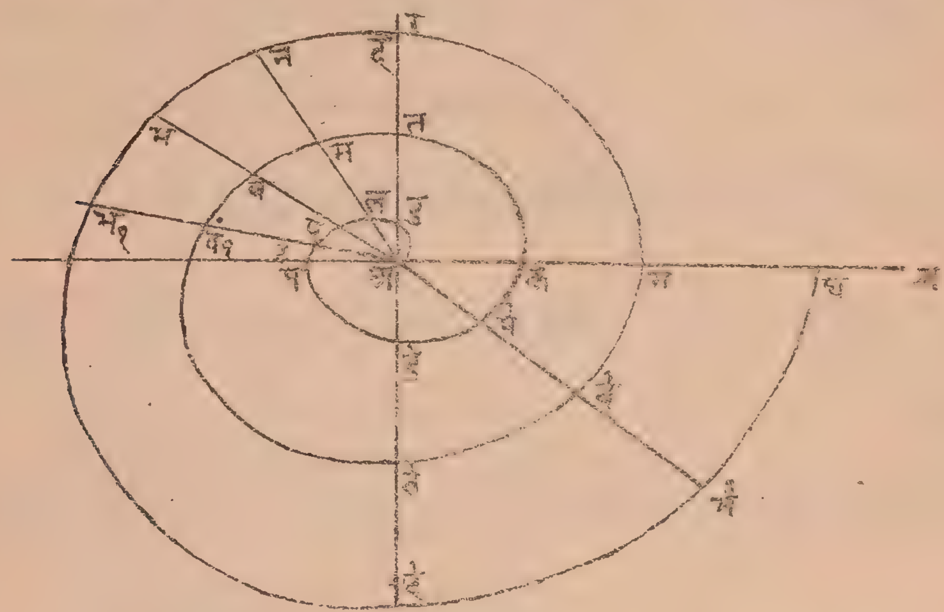
$$\text{यहां आ} = \frac{१}{२}\int \text{श्रु}^{२}\text{ताष} = \frac{१}{२}\int \text{अ}^{२}\text{ष}^{२\text{न}}\text{ ताष} = \frac{\text{अ}^{२}}{२}\int \text{ष}^{२\text{न}}\text{ताष}$$

$$= \frac{\text{अ}^{२}}{२(२\text{न}+१)}\text{ष}^{२\text{न}+१} + \text{स्थि} = \frac{\text{अ}^{२}\text{ष}^{२\text{न}}\times\text{ष}}{२(२\text{न}+१)} + \text{स्थि} = \frac{\text{श्रु}^{२}\times\text{ष}}{२(२\text{न}+१)} + \text{स्थि}$$

$$= \frac{\text{श्रु}^{२}\times\left(\frac{\text{श्रु}}{\text{अ}}\right)^{\frac{१}{\text{न}}}}{२(२\text{न}+१)} + \text{स्थि} = \frac{\text{श्रु}^{\frac{२\text{न}+१}{\text{न}}}}{२\text{ अ}^{\frac{१}{\text{न}}}(२\text{न}+१)} + \text{स्थि}$$

यहां क्षेत्र के लक्षण से जब $\text{ष} = 0$ $\text{श्रु} = 0$ और $\text{फल} = 0$ इस लिये स्थिराङ्क शून्य होगा । इस में यदि $\text{न} = १$ तो सर्पिल आर्किमिडिज़ का हो जायगा इस की आकृति चलन कलन के २८६ प्रक्रम में लिखी है यहां भी बोध के लिये नीचे लिखा है ।

इस में अ, ध्रुव, अय स्थिर रेखा जिस से प की गणना है । य से त की ओर धन गणना है । जब प = 0 तब स्रु = अ · प = 0 । जब प = $\frac{\pi}{२}$ । तब स्रु = $\frac{अ\pi}{२}$ = अड । जब प = π, तब स्रु = अग = अय ।



इसी तरह जब प = २ π तब स्रु = २ अ π = अक । इस लिये अ के चारो ओर स्रुति के एक वार घूमने में अडलपटय ड प क खण्ड उत्पन्न हुआ ।

इस खण्ड और अक स्रुति से जो क्षेत्र बना है उस का फल ऊपर फल के समीकरण में अर्थात् $\frac{स्रु^{\frac{२न+१}{न}}}{२अ^{\frac{१}{न}}(२न+१)}$ इस में न के स्थान में १ और स्रु के स्थान में २ अ π का उत्थापन देने से $\frac{स्रु^{३}}{६ अ} = \frac{८ अ^{३}\times\pi^{३}}{६ अ}$

$= \frac{४ अ^{२}\pi^{३}}{३} = \frac{\pi\times(२ अ \pi)^{२}}{३} = \frac{\pi स्रू^{२}}{३}$ ऐसा होगा यदि स्रू = २ अ π ।

और जब स्रुति का दो फेरा होगा तब स्रु = ४ अ π = २ स्रू इस का फल में उत्थापन देने से $\frac{\pi(२स्रू)^{३}}{३स्रू}$ यह मान जो आवेगा इस में अ के चारो ओर स्रुति के दो वार घूम जाने के कारण अडलपट

थड पंक्ति दो बार आजायगा इस लिये श्रुति के दो बार फेरा करने से सर्पिल का ठीक फल$=\frac{\pi(२श्रृ)^३}{३श्रृ}-\frac{\pi श्रृ^२}{३}=\frac{७\pi श्रृ^२}{३}$ यह होगा और दोनों फेरों के चापों के अन्तर में $\frac{७\pi श्रृ^२}{३}-\frac{\pi श्रृ^२}{३}=\frac{६\pi श्रृ^२}{३}$

$=२\pi श्रृ^२$ यह फल होगा।

इसी तरह श्रुति के न बार फेरा करने में श्रु=नश्रृ और न—१ बार फेरा करने में श्रु=(न—१) श्रृ।

इस लिये श्रु के न बार फेरा करने में फल$=\frac{\pi}{३}\frac{(नश्रृ)^३-(न-१)^३श्रृ^३}{श्रृ}$

$$=\frac{\pi श्रृ^२}{३}\left\{न^३-(न-१)^३\right\}$$

और न+१ बार फेरा करने में फल $=\frac{\pi श्रृ^२}{३}\left\{(न+१)^३-न^३\right\}$

इस लिये न और न+१ बार फेरा करने में दोनों चापों के अन्तर में फल$=\frac{\pi श्रृ^२}{३}\left\{(न+१)^३+(न-१)^३-२न^३\right\}=\frac{\pi श्रृ^२}{३}\times६न=२न\pi श्रृ^२$

= प्रथम और दूसरे फेरे के चापों के अन्तर सम्बन्धी फल का न गुना यह सिद्ध होता है।

इस सर्पिल के विषय में आगे कुछ और विचार किया जायगा।

१२३। इलामूलक के फल का आनयन।

यहां $श्रु^२=२ क^२$ कोज्या२ष

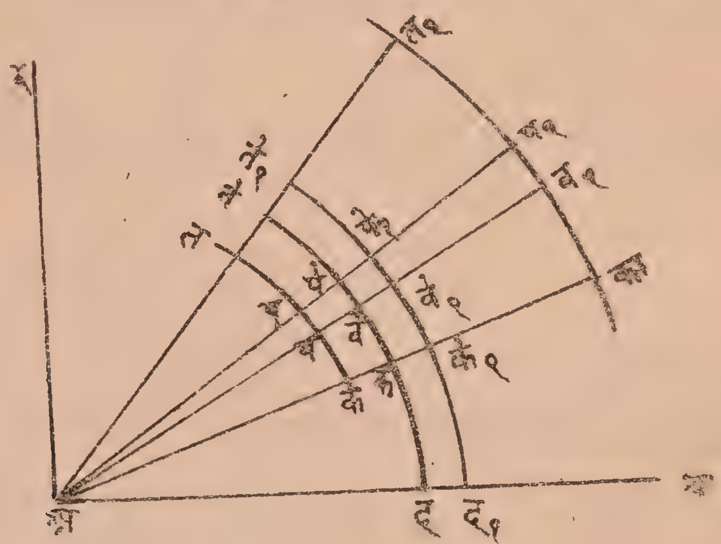
इस लिये आ$=क^२\int$ कोज्या २ ष ताष$=\frac{क^२}{२}$ ज्या२ष+स्थि।

यहां वक्र के लक्षण से जब ष=0 तब आ=0 इस लिये स्थि=0।

तब आ= $\frac{क^2}{२}$ ज्या२ष इस में ष के स्थान में $\frac{\pi}{४}$ का उत्थापन देने से

चतुर्थांश फल= $\frac{क^2}{२}$ इस को ४ से गुणने से संपूर्ण द्वुलामूलक का फल=२ $क^2$

१२४। दो वक्र के चाप और श्रुत्यन्तर से बने क्षेत्र का फलानयन।
कल्पना करो कि अ ध्रुवस्थान और अय, अर अक्ष से जो काव$_१$प$_१$त$_१$ कवपत वक्र के चाप और काक, तत$_१$ श्रुत्यन्तर से क्षेत्र है उस के फल का ज्ञान करना है।



अवव$_१$, अपप$_१$ अत्यन्त निकट दो श्रुति रेखा खींचो। अव = श्रु, अप = श्रु+△श्रु। अव$_१$ = श्रु$_१$। अप$_१$ = श्रु$_१$+△श्रु$_१$। और ∠व$_१$ अप$_१$ =△ष। और कवपत वक्र का समीकरण श्रु = फ(ष) और काव$_१$ प$_१$त$_१$ का समीकरण श्रु$_१$ = फा(ष) समझो तो पव और प$_१$व$_१$ को अत्यल्प होने के कारण सरल रेखा मान लेने से

अकव, अकप वक्र त्रिभुज का अन्तर =△ अवप = $\frac{१}{२}$△ष श्रु(श्रु+△श्रु)
और काअव$_१$, काअप$_१$ का अन्तर=△अव$_१$प$_१$ = $\frac{१}{२}$△ष श्रु$_१$(श्रु$_१$+△श्रु$_१$)
इस लिये दोनों का अन्तर=काकपप$_१$—काकवव$_१$ = व$_१$वपप$_१$=△आ
= $\frac{१}{२}$△ष{श्रु$_१$(श्रु$_१$+△ श्रु$_१$)—श्रु(श्रु+ △ श्रु)}
इस लिये $\frac{△आ}{△ष}$ = $\frac{१}{२}${श्रु$_१$(श्रु$_१$+△ श्रु$_१$)—श्रु(श्रु+△ श्रु)}
इस में ष मान शून्य मानने से श्रु$_१$ = ०, श्रु = ०, इस लिये

$\frac{\text{ताआ}}{\text{ताप}} = \frac{1}{2}(\text{श्रु}_1^2 - \text{श्रु}^2) = \frac{1}{2}\left[\{\text{फा(प)}\}^2 - \{\text{फ(प)}\}^2\right]$

इस लिये $\text{आ} = \frac{1}{2}\int\left[\{\text{फा(ष)}\}^2 - \{\text{फ(ष)}\}^2\right]\text{ताप}$

यदि $\angle$ यअका = अ_1, $\angle$ यअत$_1$=क_1 तो काकवपतत$_1$प$_1$व$_1$का का

$$\text{फल आ} = \frac{1}{2}\int_{\text{अ}_1}^{\text{क}_1}\left[\{\text{फा(ष)}\}^2 - \{\text{फ(ष)}\}^2\right]\text{ताप}\cdots\cdots\cdots \qquad (1)$$

अब $\int \text{श्रु ताश्रु} = \frac{\text{श्रु}^2}{2} \pm$ स्थि इस लिये $\int_{\text{फ(ष)}}^{\text{फा(ष)}} \text{श्रु ताश्रु}$

$= \frac{1}{2}\left[\{\text{फा(ष)}\}^2 - \{\text{फ(ष)}\}^2\right]$ इस पर से (१) समीकरण को द्विगुण चलानयन

की रीति से $\int_{\text{अ}_1}^{\text{क}_1}\int_{\text{फ(ष)}}^{\text{फा(ष)}} \text{श्रु ताश्रु ताप}$ ऐसे लिख सक्ते हो ।

१२५ । इसी जगह यदि ष = फ(श्रु), ष_1 = फा(श्रु) ऐसे दो समीकरण के वक्र के चापों से और श्रु = अ, श्रु_1 = क ऐसे समीकरण के दो वृत्तों के चापों से बने क्षेत्र का फल जानना हो तो मान लो कि कक'क'$_1$का, तत'त'$_1$त$_1$ दो वक्र के चाप और कवपत, काव$_1$प$_1$त$_1$ दो वृत्त के चाप हैं जिन का अ केन्द्र है । अ केन्द्र से दक'व'प'त', और द$_1$क'$_1$व'$_1$प'$_1$त'$_1$ वृत्त का चापखण्ड बनावो जिनके व्यासार्द्ध श्रु, श्रु + △श्रु हैं। तो चलनकलन के १५६ वें प्रक्रम से त'त'$_1$प'$_1$व'$_1$क'$_1$क'व'प'त' का फल = △आ

$$= \frac{\{\text{श्रु}(\text{ष}_1 - \text{ष}) + (\text{श्रु} + \triangle\text{श्रु})(\text{ष}_1 - \text{ष})\}\triangle\text{श्रु}}{2}$$ । △श्रु का भाग देदेने से

$$\frac{\triangle\text{आ}}{\triangle\text{श्रु}} = \frac{\text{श्रु}(\text{ष}_1 - \text{ष}) + (\text{श्रु} + \triangle\text{श्रु})(\text{ष}_1 - \text{ष})}{2}$$

इस लिये

$$\frac{\text{ताआ}}{\text{ताश्रु}} = \text{श्रु}(\text{ष}_1 - \text{ष}) = \text{श्रु}\{\text{फा(श्रु)} - \text{फ(श्रु)}\}$$

इस लिये अभीष्ट क्षेत्र का फल

$= \int_{अ}^{क} अु\{फा(अु) - फ(अु)\}\, ताअु = आ$ . . . . (१)

जब $\int अु\, ताष = अु \int ताष = अुष$, अु को स्थिर मानने से

इस लिये $\int_{फ(अु)}^{फा(अु)} अु\, ताष = अु\{फा(अु) - फ(अु)\}$

इस लिये द्विगुणचलानयन की रीति से ऊपर के फल को

$\int_{अ}^{क}\int_{फ(अु)}^{फा(अु)} अु\, ताष\, ताअु$ ऐसे लिख सक्ते हो । यदि यहां दो वक्रों के चापान्तर्गत सीमित दोनों कर्णों के अनेक विभाग कर ध्रुव विन्दु से प्रत्येक विभाग पर गया ऐसा अनेक वृत्त बना डालो और वक्र चापों का भी अनेक विभाग कर प्रति विभागों में जो रेखा लगा दो तो रेखा और वृत्त के चापखण्डों से अनेक चतुर्भुज होंगे जिन में किसी एक का फल = अु ष यह होगा ।

१२६ । जैसे अपक, अपाका वृत्तार्द्ध के चापों से और कका रेखा से बने



क्षेत्र का फल जानना है तो मानो अक = ग, अका = च $\angle$ काअपा = ष, तो अप = अु = ग कोज्याष, अपा = $अु_1$ = चकोज्याष

इस लिये १२४ प्रक्रम से

$$अभीष्ट\ फल = \int_{अ_1}^{क_1}\int_{फ(ष)}^{फा(ष)} अु\, ताअु\, ताष = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{गकोज्याष}^{चकोज्याष} अु\, ताअु\, ताष$$

अब यहां $\int_{गकोज्याष}^{चकोज्याष} अु\, ताअु = \frac{1}{2}(च^2 - ग^2) कोज्या^2 ष$

इस लिये अभीष्ट फल $= \frac{1}{2}(च^2 - ग^2)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} कोज्या^2 ष\, ताष$

इस में $\int कोज्या^2 ष\, ताष = \int \frac{1 + कोज्या२ष}{2}\, ताष = \frac{ष}{2} + \frac{ज्या२ष}{4}$

इस लिये $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ कोज्या^{2}ष ताष $= \frac{\pi}{4}$ इस का उत्थापन फल में देने से फल $= \frac{\pi}{8}$ (च^{2} — ग^{2})।

इसी क्षेत्र का यदि क क व्यासार्द्ध से बना कक$_{1}$स वृत्त चाप से दो खण्ड करें तो पहले अस, सक, अपक, वृत्त चापों से बने क्षेत्र का फल १२५ वें प्रक्रम से, मान लो कि कपस एक वृत्त का चाप, और दूसरे वृत्त का अ विन्दु रूप चाप, एक वक्र अपक वृत्तार्द्ध चाप, और दूसरा अस बड़े वृत्तार्द्ध का चाप इन से बना हुआ क्षेत्र है। यहां अ$_{उ}$ = गकोज्याष। और दूसरी अ$_{उ}$ = चकोज्याष

इस लिये ष = कोज्या$^{-1}\frac{\text{अ}_{उ}}{\text{ग}}$, और ष$_{1}$ = कोज्या$^{-1}\frac{\text{अ}_{उ}}{\text{च}}$, क = ग, अ = ० इन का उत्थापन देने से

$$\int_{\text{अ}}^{\text{क}}\int_{\text{फ}(\text{अ}_{उ})}^{\text{फा}(\text{अ}_{उ})}\text{अ}_{उ}\,\text{ताष ताअ}_{उ} = \int_{0}^{\text{ग}}\int_{\text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{अ}_{उ}}{\text{ग}}}^{\text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{अ}_{उ}}{\text{च}}}\text{अ}_{उ}\,\text{ताषताअ}_{उ}$$

$$\text{यहां}\int_{\text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{अ}_{उ}}{\text{ग}}}^{\text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{अ}_{उ}}{\text{च}}}\text{अ}_{उ}\,\text{ताष} = \text{अ}_{उ}\left[\text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{अ}_{उ}}{\text{च}} - \text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{अ}_{उ}}{\text{ग}}\right]$$

$$\text{और}\int\text{अ}_{उ}\,\text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{अ}_{उ}}{\text{च}}\,\text{ताअ}_{उ} = \frac{1}{4}\left\{(2\text{अ}_{उ}^{2}-\text{च}^{2})\,\text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{अ}_{उ}}{\text{च}} - \text{अ}_{उ}\sqrt{(\text{च}^{2}-\text{अ}_{उ}^{2})}\right\}\text{।}$$

$$\int\text{अ}_{उ}\,\text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{अ}_{उ}}{\text{ग}}\,\text{ताअ}_{उ} = \frac{1}{4}\left\{(2\text{अ}_{उ}^{2}-\text{ग}^{2})\,\text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{अ}_{उ}}{\text{ग}} - \text{अ}_{उ}\sqrt{(\text{ग}^{2}-\text{अ}_{उ}^{2})}\right\}$$

इस लिये $\int_{0}^{ग}$ कोज्या$^{-1}\frac{अ_उ}{च}$ ताअ$_उ$

$= \frac{1}{8}\left\{(२ग^2 - च^2) कोज्या^{-1}\frac{ग}{च} - ग\sqrt{(च^2 - ग^2)} + च^2 \frac{\pi}{२}\right\}$

और $\int_{0}^{ग}$ अ$_उ$ कोज्या$^{-1}\frac{अ_उ}{ग}$ ताअ$_उ$ $= \frac{1}{8}\left\{ग^2 \frac{\pi}{२}\right\}$

इस लिये

$$\int_{0}^{ग}\int_{कोज्या^{-1}\frac{अ_उ}{ग}}^{कोज्या^{-1}\frac{अ_उ}{च}} अ_उ ताप ताअ_उ$$

$= \frac{1}{8}\left\{(२ग^2 - च^2) कोज्या^{-1}\frac{ग}{च} - ग\sqrt{(च^2 - ग^2)} + \frac{\pi}{२}(च^2 - ग^2)\right\}$ यह एक खण्ड का फल हुआ।

अब कस वृत्तचाप, कास वृत्तचाप, और कका रेखा से उत्पन्न क्षेत्र के फल साधन में एक वक्र के चाप को कका रेखा समझो और दूसरे वक्र को असका मान लो तो प=०= फ(अ$_उ$), प$_1$ = कोज्या$^{-1}\frac{अ_उ}{च}$=फा(अ$_उ$) क=च, अ=ग । इन का उत्थापन १२५वें प्रक्रम के (१) समीकरण के दूसरे रूप में देने से

$$\int_{अ}^{क}\int_{फ(अ_उ)}^{फा(अ_उ)} अ_उ ताप ताअ_उ = \int_{ग}^{च}\int_{0}^{कोज्या^{-1}\frac{अ_उ}{च}} अ_उ ताप ताअ_उ$$

यहां भी पहले खण्ड के फल साधन के ऐसा

$$\int_{0}^{कोज्या^{-1}\frac{अ_उ}{च}} अ_उ ताप = अ_उ कोज्या^{-1}\frac{अ_उ}{च}$$

$\int$ अ$_उ$ कोज्या$^{-1}\frac{अ_उ}{च}$ ताअ$_उ$ $= \frac{1}{8}\left\{(२अ_उ^2 - च^2) कोज्या^{-1}\frac{अ_उ}{च} - अ_उ\sqrt{(च^2 - अ_उ^2)}\right\}$

इस लिये

$$\int_{\text{च}}^{\text{ग}}\int_{0}^{\text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{अ}}{\text{च}}} \text{अ}\,\text{ताप}\,\text{ता}\text{अ}$$

$$=\int_{\text{ग}}^{\text{च}} \text{अ}\,\text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{अ}}{\text{च}}\,\text{ता}\text{अ}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\text{ग}\sqrt{(\text{च}^2-\text{ग}^2)}-(2\text{ग}^2-\text{च}^2)\text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{ग}}{\text{च}}\right\}$$

यह दूसरे खण्ड का फल हुआ।

अब इन दोनों खण्डों का योग करो तो $\frac{\pi}{8}(\text{च}^2-\text{ग}^2)$ यह सम्पूर्ण क्षेत्र का फल ठीक पहले ही के तुल्य आया।

१२७। यदि ध्रुवीय समीकरण पर से ११५ प्रक्रम के अलक क्षेत्र का फल साधन करें तो यहां। न को ध्रुव स्थान मानने से परवलय का समीकरण $\text{अ}_{\text{ु}}=\frac{\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\frac{\text{प}}{2}}$ जहां प का मान नक रेखा से लिया गया है। और वृत्त का ध्रुवीय समीकरण $\text{अ}_{\text{ु}}=2\,\text{अ}$। इस लिये पहले $\text{अ}_{\text{ु}}$ के वश चलानयन करने से अलक का फल $=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\text{अछे}^2\frac{\text{प}}{2}}^{2\text{अ}} \text{अ}_{\text{ु}}\,\text{ता}\text{अ}_{\text{ु}}\,\text{ताप}$

इसी जगह यदि प के वश से पहले चलानयन करें तो $\text{प}_1=\text{कोज्या}^{-1}\frac{2\text{अ}-\text{अ}_{\text{ु}}}{\text{अ}_{\text{ु}}}$ मान लेने से अलक का फल $=\int_{\text{अ}}^{2\text{अ}}\int_{0}^{\text{प}_1} \text{अ}_{\text{ु}}\,\text{ताप}\,\text{ता}\text{अ}_{\text{ु}}$।

यदि घलग का फल अपेक्षित हो तो घग का ध्रुवीय समीकरण $\text{अ}_{\text{ु}}=-\frac{2\text{अ}}{\text{कोज्याप}}$ और नग$=4$अ, $\angle$ कनग$=\frac{2\pi}{3}$, और मान लो कि $\text{प}_1=\text{कोज्या}^{-1}\frac{2\text{अ}-\text{अ}_{\text{ु}}}{\text{अ}_{\text{ु}}}$ और $\text{प}_2=\left[\frac{-2\text{अ}}{\text{अ}_{\text{ु}}}\right]$। अब यहां पहले प के वश चलानयन करने से घलग का फल $=\int_{2\text{अ}}^{4\text{अ}}\int_{\text{प}_1}^{\text{प}_2} \text{अ}_{\text{ु}}\,\text{ताप}\,\text{ता}\text{अ}_{\text{ु}}$। इसी का फल नग रेखा से दो भाग कर पृथक् पृथक् लावें तो पहले उस खण्ड का फल जिस में लग चाप है $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}}\int_{2\text{अ}}^{\text{अछे}^2\frac{\text{प}}{2}} \text{अ}_{\text{ु}}\,\text{ता}\text{अ}_{\text{ु}}\,\text{ताप}$

यह होगा फिर दूसरे खण्ड का फल= $\int_{\frac{२\pi}{३}}^{\pi}\int_{२अ}^{२अछेप}$ श्रुताश्रुताप यह होगा और इन दोनों का योग ठीक पहले के बराबर क्षेत्र फल निकल आवेगा । इस तरह से जहां पर जैसा सुभीता जान पड़े तहां पहले श्रु के वश अथवा प के वश चलानयन करो ।

१२८ । १२२ प्रक्रम में जो आर्किमिडिज़ का सर्पिल है उस में $व_१$वम को एक वक्रचाप और $भ_१$ भन को दूसरे वक्र का चापखण्ड मान लो तो १२४ प्रक्रम की युक्ति से $व_१ भ_१$ नम का फल= $\int_{प_१}^{प_२}\int_{फ(प)}^{फा(प)}$ श्रुताश्रुताप ऐसा होगा । यहां फ(प)=अप और फा(प)=अ(प+२π) मानो तो

$$\int_{फ(प)}^{फा(प)} श्रु ताश्रु = \frac{१}{२}\left[\{फा(प)\}^२ - \{फ(प)\}^२\right]$$

$$= \frac{१}{२}(अ^२ प^२ + ४अ^२ प \pi + ४ अ^२ \pi^२ - अ^२ प^२) = \frac{अ^२}{२}\left\{(प+२\pi)^२ - प^२\right\}$$

$$\text{और } \int \frac{अ^२}{२}\left\{(प+२\pi)^२ - प^२\right\} ताप = \frac{अ^२}{२}\left\{\frac{(प+२\pi)^३}{३} - \frac{प^३}{३}\right\}$$

इस लिये

$$\int_{प_१}^{प_२}\int_{फ(प)}^{फा(प)} श्रु ताश्रु ताप = \frac{अ^२}{२}\left\{\frac{(प_२+२\pi)^३ - प_२^३}{३} - \frac{(प_१+२\pi)^३ - प_१^३}{३}\right\}$$

$$= \frac{अ^२}{२}\left\{\frac{\times ६प_२^२\pi + १२प_२\pi^२ + ८\pi^३ - ६प_१^२\pi - १२प_१\pi^२ - ८\pi^३}{३}\right\}$$

$$= \frac{अ^२}{२}\left\{२प_२^२\pi + ४प_२\pi^२ - २प_१^२\pi - ४प_१\pi^२\right\} = \frac{अ^२}{२}\left\{२\pi(प_२^२ - प_१^२) + ४\pi^२(प_२ - प_१)\right\}$$

यह फल हुआ । इस में यदि $प_२=२न\pi$ और $प_१=२\pi(न-१)$ हो तो न और न+१ वार श्रु के फेरा करने में दोनों चापों के अन्तर का फल

$$=\frac{अ^2}{2}\left\{2\pi(ष_2^2-ष_1^2)+4\pi^2(ष_2-ष_1)\right\}$$

$$=\frac{अ^2}{2}\left\{2\pi(4न^2\pi^2-4न^2\pi^2+(न\pi^2-4\pi^2)+8\pi^3\right\}$$

$$=\frac{अ^2}{2}(16\ न\pi^3)=8नअ^2\pi^3=2\pi न\times 4\pi^2 अ^2=2\pi नअ_u^2$$

यही ठीक १२२वें प्रक्रम में भी उत्पन्न हुआ था परन्तु इस क्रिया से बहुत ही स्पष्ट रूप से उपपन्न होता है और १२२वें प्रक्रम में जो युक्ति लिखी है वह बड़े गाम्भीर्य विचार से तब मन में बैठती है ॥

१२६ । अपचक्रालद के अर्धीय समीकरण पर से फलानयन । (११७ प्रक्रम का (३) समीकरण देखो) फल=आ $=\frac{1}{2}\int\frac{लअ_u ताअ_u}{\sqrt{(अ_u^2-ल^2)}}$

यहां चेत्र के लक्षण से ल $=\frac{ग\sqrt{(अ_u^2-अ^2)}}{\sqrt{(ग^2-अ^2)}}$ (८२ प्रक्रम देखो)

इस लिये फल $=\frac{1}{2}\int\frac{ग\sqrt{(अ_u^2-अ^2)}अ_u ताअ_u}{अ\sqrt{(ग^2-अ_u^2)}}=\frac{ग}{2अ}\int\frac{\sqrt{(अ_u^2-अ^2)}अ_u ताअ_u}{\sqrt{(ग^2-अ_u^2)}}$

$=\frac{ग}{2अ}\int\frac{व^2 ताव}{\sqrt{(ग^2-अ^2-व^2)}}$ यदि $व^2=अ_u^2-अ^2$

अब $\int\frac{व^2 ताव}{\sqrt{(ग^2-अ^2-व^2)}}=\int\frac{व^2-(ग^2-अ^2)}{\sqrt{(ग^2-अ^2-व^2)}}ताव$

$+(ग^2-अ^2)\int\frac{ताव}{\sqrt{(ग^2-अ^2-व^2)}}=(ग^2-अ^2)\int\frac{ताव}{\sqrt{(ग^2-अ^2-व^2)}}$

$-\int\sqrt{(ग^2-अ^2-व^2)}ताव=\frac{ग^2-अ^2}{2}ज्या^{-1}\frac{व}{\sqrt{(ग^2-अ^2)}}$

$$-\frac{व\sqrt{(ग^2-अ^2-व^2)}}{२}=\frac{ग^2-अ^2}{२}ज्या^{-१}\frac{\sqrt{(श्रु^2-अ^2)}}{\sqrt{(ग^2-अ^2)}}$$

$$-\frac{\sqrt{(श्रु^2-अ^2)}\sqrt{(ग^2-श्रु^2)}}{२}$$ इस पर से

श्रु = अ और श्रु = ग इस के भीतर का मान $=\frac{ग^2-अ^2}{२}\frac{\pi}{२}$ इस को $\frac{ग}{२अ}$ से गुण देने से $\frac{ग}{२अ}\cdot\frac{ग^2-अ^2}{२}\frac{\pi}{२}$ इस में ग के स्थान में अ+२क का उत्थापन देने से

$\frac{(अ+२क)\,क\,(अ+क)\pi}{२अ}$ इस को दूना करने से चलितवृत्त के एक वार घूम जाने से जो वक्र का अवयव और तत्सम्बन्धी श्रुतियों से उत्पन्न क्षेत्र का फल $=\frac{(अ+२क)\,क\,(अ+क)\pi}{अ}$ ।

यहां पर दोनों श्रुतियां स्थिरवृत्त के व्यासार्द्ध = अ हैं और तदन्तर्गत स्थिरवृत्त का चाप चलितवृत्त के परिधि $२क\pi$ तुल्य है इस लिये उस वृत्त खण्ड का फल = $अक\pi$ इस को ऊपर के फल में घटा देने से स्थिरवृत्त के परिधि और वक्र के चाप से उत्पन्न फल

$$=\frac{(अ+२क)\,क\,(अ+क)\pi}{अ}-अक\pi$$

$$=\frac{क(अ^2+३अक+२क^2)\pi-अ^2क\pi}{अ}=\frac{\pi क^2}{अ}(३अ+२क)$$

इसी तरह से अतिचक्रालद में यदि अ > क तो क का चिन्ह बदल देने से फल $\frac{\pi क^2}{अ}(३अ-२क)$ यह होगा ।

१३० । एक वक्र का फ$\left(\frac{\text{य}}{\text{अ}}, \frac{\text{र}}{\text{क}}\right)$ = ग ··· (१) यह समीकरण और दूसरे वक्र का फ(य,र) = ग यह समीकरण है इस को (२) कहो अब इन दोनों वक्रों के किसी साजात्य अवयव के फलों का सम्बन्ध जानना है।

(१) में यदि $\frac{\text{य}}{\text{अ}} = \text{य}'$ और $\frac{\text{र}}{\text{क}} = \text{र}'$ तो (१) में

ताय = अताय' इस लिये (२) का फल = $\int \text{र}'\text{ताय}' = \int \frac{\text{र}}{\text{क}} \cdot \frac{\text{ताय}}{\text{अ}} = \frac{1}{\text{अक}} \int \text{रताय}$

अर्थात् (२) का फल = $\frac{1}{\text{अक}}$ ×(१) का फल

इस लिये अक×(२) का फल = (१) का फल।

जैसे (१) दीर्घ वृत्त में यदि केन्द्र को मूल विन्दु मानो तो

$$\frac{\text{य}^2}{\text{अ}^2} + \frac{\text{र}^2}{\text{क}^2} = 1 \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

और वृत्त में $\text{य}^2 + \text{र}^2 = 1$ (जिस का व्यासार्द्ध = १ है) ··· (२)

इस लिये (२) का फल × अक = (१) का फल

अर्थात् (१) का समग्र फल = (२) का समग्र फल × अक = अकπ

= $\frac{\text{क}}{\text{अ}}$ अ$^2\pi$ यही पहले १०४ प्रक्रम में भी उत्पन्न हुआ था

(२) अतिपरवलय में] $\frac{\text{य}^2}{\text{अ}^2} - \frac{\text{र}^2}{\text{क}^2} = 1 \cdots\cdots \quad (1)$

और समातिपरवलय में $\text{य}^2 - \text{र}^2 = 1 \cdots\cdots \quad (2)$

इस लिये (२) का फल × अक = (१) का फल।

(३) जिस वक्र का $\left(\frac{\text{य}^2}{\text{अ}^2} + \frac{\text{र}^2}{\text{क}^2}\right)^2 = \frac{\text{य}^2}{\text{त}^2} + \frac{\text{र}^2}{\text{म}^2}$ यह समीकरण है उस के फल को जानना है। इस में यदि य = अय' और र = कर' तो वक्र के समीकरण का रूपान्तर $(\text{य}'^2 + \text{र}'^2)^2 = \frac{\text{अ}^2\text{य}'^2}{\text{त}^2} + \frac{\text{क}^2\text{र}'^2}{\text{म}^2} \cdots\cdots (2)$

अब इस के फल को अक से गुण देने से अभीष्ट वक्र का फल ऊपर की युक्ति से हो जायगा।

(२) के फल जानने के लिये इस का अद्वीय समीकरण बनावो तो

$अ_ु^4 = \frac{अ^2 य'^2}{त^2} + \frac{क^2 र'^2}{म^2}$, $अ_ु^2$ का भाग दे देने से

$$अ_ु^2 = \frac{अ^2 कोज्या^2 ष}{त^2} + \frac{क^2 ज्या^2 ष}{म^2}$$

इस लिये फल $= \frac{1}{2}\int अ_ु^2 ताष = \frac{1}{2}\int \frac{अ^2 कोज्या^2 ष}{त^2} ताष + \frac{1}{2}\int \frac{क^2 ज्या^2 ष}{म^2} ताष$

$$= \frac{अ^2}{2त^2}\int \frac{1+कोज्या 2ष}{2} ताष + \frac{क^2}{2म^2}\int \frac{1-कोज्या 2ष}{2} ताष$$

$$= \frac{अ^2}{2त^2}\left(\frac{ष}{2} + \frac{ज्या 2ष}{4}\right) + \frac{क^2}{2म^2}\left(\frac{ष}{2} - \frac{ज्या 2ष}{4}\right)$$

ष का मान ० और $\frac{\pi}{2}$ मानने से

चतुर्थांश फल $= \frac{अ^2}{2त^2}\frac{\pi}{4} + \frac{क^2}{2म^2}\frac{\pi}{4}$, इस को ४ गुना कर देने से समग्र

फल $= \frac{\pi}{2}\left\{\frac{अ^2}{त^2} + \frac{क^2}{म^2}\right\}$ और इस को अक से गुण देने से अभीष्ट वक्र

का समग्र फल $= \frac{अक\pi}{2}\left\{\frac{अ^2}{त^2} + \frac{क^2}{म^2}\right\}$

ऊपर के सिद्धान्त अर्थात् फ$\left(\frac{य}{अ}, \frac{र}{क}\right) =$ ग । फ(य,र) = ग इस में यदि अ = क तो (१) का फल = $अ^2 \times$ (२) का फल ऐसा होगा अर्थात् दोनों वक्र सजातीय होंगे और (२) के फल को $अ^2$ से गुण देने से (१) का फल होगा । देखो ऐसे दो वक्रों में सजातीय भुज वा कोटि में अ:१ का सम्बन्ध रहेगा और फल में $अ^2$:१ इस का सम्बन्ध । इस लिये रेखा गणित से जैसा सजातीय ऋजुबहुभुज क्षेत्रों में धर्म्म सिद्ध होता है वैसा ही ऊपर की युक्ति से सजातीय वक्रों में भी सिद्ध हुआ ।

१३१। वक्र चाप और वक्र के अवलूत चाप से बने क्षेत्र का फलानयन। ८६ प्रक्रम के (१) और (२) क्षेत्र में $व_१व$ को तनिक सा उठावो तो दूसरा वक्रजातीयव्यासार्द्ध का मान होगा दोनों को बहुत पास होने से यदि तुल्य मानो और $व_१$ के पास ही चलित विन्दु मानो और इन दोनों व्यासार्द्धों से उत्पन्न कोण का मान $ब_१$ मान लो तो स्वल्पान्तर से दोनों व्यासार्द्ध, और वक्र का चाप इन से बने वृत्तखण्ड का फल $\triangle आ \doteq \frac{१}{२} बव_१^२ \triangle ब_१$

और $\frac{\triangle आ}{\triangle \ _१} = \frac{१}{२} बव_१^२$ अब इस में $\triangle ब_१ = 0$ मानो तो ठीक ठीक $\frac{ताआ}{ताब_१} = \frac{१}{२} बव_१^२$ यह अभीष्ट क्षेत्र के फल का तात्कालिक सम्बन्ध $ताब_१$ के वश से उत्पन्न हुआ।

यहां यदि आ को अवलूत का चाप, वक्र का चाप, और दो वक्रजातीयव्यासार्द्ध इन से बने क्षेत्र का क्षेत्रफल समझो और दोनों वक्रजातीयव्यासार्द्ध सम्बन्धी $ब_१$ का मान $ब_२$, $ब_३$ मान लो तो

$आ = \frac{१}{२}\int_{ब_२}^{ब_३} बव_१^२ ताब_१$ यह होगा

यहां $बव_१$ वक्रजातीयव्यासार्द्ध के स्थान में $वि = \frac{ताचा}{ताब_१}$ (चलनकलन के १०१वें प्रक्रम से) इस का उत्थापन दे दें तो

$आ = \frac{१}{२}\int वि\ ताचा = \frac{१}{२}\int वि \frac{ताचा}{ताय} ताय$ ऐसा होगा।

१३२। कातन्वलो उसका अवलूत और वक्रजातीय दो व्यासार्द्ध इन से बने क्षेत्र का फलानयन।

यहां $चा = ग \cdot स्पब_१$ (८४ प्रक्रम से)

इस लिये $\frac{ताचा}{ताब_१} = वि = ग\ छे^२ब_१$

और $आ = \frac{१}{२}\int_{ब_२}^{ब_३} वि^२ ता\ ब_१ = \frac{१}{२}\int_{ब_२}^{ब_३} ग^२ छे^४ ब_१\ ताब_१$

$$= \frac{\text{ग}^2}{2}\int_{\text{ब}_2}^{\text{ब}_3} \text{छे}^4\,\text{ब}_1\ \text{ताब}_1$$

यहां $\int \text{छे}^4\ \text{ब}_1\ \text{ताब}_1 = \text{स्पब}_1 + \frac{1}{3}\ \text{स्प}^3\text{ब}_1 + \text{स्थि}$

इस पर से ब_3, ब_2 का इष्टमान मानने से अभीष्ट क्षेत्र का फल जान सक्ते हो।

१३३। वक्र के प्रतिविन्दु सम्बन्धि स्पर्शरेखाओं के ऊपर कोई स्थिर विन्दु से (जो कि उसी धरातल में है जिस में कि वक्र है) लम्ब डालें और इन लम्बमूलों में लगाकर एक वक्र रेखा कर दें तो इस वक्र को पहले वक्र का पाददल कहते हैं।

जिस स्थिरविन्दु से लम्ब डाले गये हैं इसको पाददल का मूलविन्दु कहते हैं और जिस वक्र का पाददल वक्र बनावोगे उसे पाददल का मूलवक्र कहते हैं।

१३४। पिछले प्रक्रमों से स्पष्ट है कि मूलविन्दु से पाददल के मूलवक्र के कोई दो स्पर्शरेखाओं पर दो लम्ब डाले जायं तो पाददल का चाप और इन दोनों लम्बों से बने क्षेत्र का फल= $\frac{1}{2}\int \text{ल}^2\text{ताष}$ (जहां कोई नियत रेखा और लम्ब से उत्पन्न कोण=ष है) क्योंकि पाददल में मूल वक्र के स्पर्शरेखा पर जो मूलविन्दु से लम्ब डाला जायगा वह लम्बही श्रुति होगी।

कल्पना करो कि अ, अं दो मूलविन्दुओं से दो पाददल एकही मूलवक्र से बने हैं। और मूलवक्र के किसी दो स्पर्शरेखा पर दोनों मूलविन्दुओं से ल, लं लम्बडाले गये हैं। नियतरेखा समानान्तर हैं। अ मूलविन्दु से अं की श्रुति, श्रु और श्रु और नियतरेखा से उत्पन्न कोण ष_1 है तो ष के दो मानों के भीतर पहले पाददल का फल = आ = $\frac{1}{2}\int \text{ल}^2\text{ताष}$, और ष के उन्हीं दो मानोंके भीतर दूसरे पाददल का फल = आं = $\frac{1}{2}\int \text{लं}^2\text{ताष}$

परन्तु $\text{लं} = \text{ल} - \text{श्रु कोज्या}\ (\text{ष}-\text{ष}_1)$

इस लिये $\text{लं}^2 = \text{ल}^2 + 2\text{लश्रु कोज्या}\ (\text{ष}-\text{ष}_1) + \text{श्रु}^2\text{कोज्या}^2(\text{ष}-\text{ष}_1)$

इस लिये $\text{आं} = \frac{1}{2}\int \text{ल}^2\text{ताष} - \int \text{श्रुलकोज्या}\ (\text{ष}-\text{ष}_1)\text{ताष}$

$= \frac{1}{2}\int$ अ्रु^{2} कोज्या^{2} (ष$-$ष$_1$)ताष

$=$ आ $-\int$ लअ्रुकोज्या (ष$-$ष$_1$)ताष $+ \frac{1}{2}\int$ अ्रु^{2} कोज्या^{2}(ष$-$ष$_1$) ताष

$=$ आ $-\int$ लअ्रु (कोज्याष कोज्याष$_1$ $+$ज्याष ज्याष$_1$) ताष

$+\frac{1}{2}\int$ अ्रु^{2} (कोज्याष कोज्याष$_1$ $+$ ज्याष ज्याष$_1$)^{2}ताष

$=$आ$-\int$ल(यकोज्याष$_1$$+$रज्याष) ताष

$+\frac{1}{2}\int$(य^{2}कोज्या^{2}ष$+$ यरज्या२ष$+$र^{2}ज्या^{2}ष) ताष

यदि य $=$ अ्रुकोज्याष$_1$ । र $=$ अ्रुज्याष$_1$ .... (१)

(१) में $\int$लकोज्याषताष $=$ च, $\int$लज्याषताष $=$ ज

$\frac{1}{2}$ कोज्या^{2}ष ताष$=$त, $\frac{1}{2}\int$ ज्या^{2}षताष$=$न, $\frac{1}{2}\int$ज्याषकोज्याषताष$=$म

इन का उत्थापन दे देवो जहां सर्वत्र ष की दोनों सीमायें एकही हैं

तो आं $=$ आ $-$(चय$+$जर)$+$तय^2$+$२मयर$+$नर^2 ...... (२)

१३५। कल्पना करो कि किसी वक्र का अय^2$+$कयर$+$गर^2$+$घय$+$चर$+$फ$=$० यह यह समीकरण है। इच्छा है कि यह पता लगावें कि यह कौन सा वक्र है।

यदि यह वक्र मूलविन्दु में भी गया होगा तो स्पष्ट है कि फ$=$०। कल्पना करो कि मूलविन्दु में नहीं गया है तब फ का दोनों पक्षों में भाग देने से लब्धिओं को क्रम से अं, कं इत्यादि मान लेने से ऊपर के समीकरण का रूप

$$\text{अं य}^2 + \text{कं यर} + \text{गं र}^2 + \text{घं य} + \text{चं र} + 1 = 0$$

जिस विन्दु का वक्र के मूलविन्दु से त, द भुज कोटि हैं उसको मूलविन्दु मानने से वक्र का भु$=$य$=$यं$+$त, र$=$रं$+$द इनका उत्थापन

$$\text{अय}^2+\text{कयर}+\text{गर}^2+\text{घय}+\text{चर}+\text{फ}=0 \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

इस में देने से

अ(यं^{2}$+$२तयं$+$त^2) $+$क (यंरं$+$यंद$+$रंत$+$तद) $+$ग (रं^{2}$+$२रंद$+$द^2) $+$घयं$+$घत$+$चरं$+$चद$+$फ

$=$ अयं^{2}$+$२तअयं$+$अत^2$+$ कयंरं$+$कदयं$+$कतरं $+$कतद$+$गरं^{2}$+$२गदरं $+$गद^2$+$घयं$+$घत$+$चरं$+$चद$+$फ

=अय$'^{2}$+कय'र'+गर$'^{2}$+(२तअ+कद+घ)य'+(२गद+कत+च)र'+फ'=०.....(२)

जहां फ'=अत^{2}+कतद+घत+ चद+फ, ... (३)

कल्पना करो कि इस में सम्भव है कि त, और द के ऐसे मान हैं कि य' र' के गुणक शून्य के तुल्य होते हैं तो

२तअ+कद+घ = ० और २गद+कत+च=०

इन पर से त= $\dfrac{\text{२गघ—कच}}{\text{क}^{2}\text{—४अग}}$, और द= $\dfrac{\text{२अग—कघ}}{\text{क}^{2}\text{—४अग}}$

इस लिये निश्चय हुआ कि यदि क^{2}-४अग यह शून्य के तुल्य न हो तो त, द का मान ऐसा मान सक्ते हैं जिस पर से य', र' के गुणक शून्य हों। पहले मानो कि क^{2}—४ अग यह शून्य नहीं है तो त, द के मान भी सान्त होंगे। और तब (२) का रूप अय$'^{2}$+कय'र'+ गर$'^{2}$+फ'=० ...... (४)

अब यह (४) समीकरण दिखलाता है कि धन, य$_{१}$, र$_{१}$ के वा, ऋण य$_{१}$, र$_{१}$ के मान में फल एक ही होगा इस लिये (१) समीकरण के वक्र का दूसरा मूलविन्दु (जिस का भु = त, को = द प्रथम मूलविन्दु के अभिप्राय से है) केन्द्र होगा।

त, द के मान का उत्थापन (३) में देने से

फ' = फ + $\dfrac{\text{गघ}^{2}\text{+अच}^{2}\text{+कगघ}}{\text{क}^{2}\text{—४अग}}$ ऐसा होगा।

(४) में स्वर चिन्ह उड़ा देने से

अय^{2}+ कयर + गर^{2}+ फ = ०, ... (५)

इस में कल्पना करो कि मूल विन्दु तो वही है परन्तु य अक्ष नया पहले य अक्ष से ष तुल्य कोण बनाने वाली रेखा को माना और इस पर मूल विन्दु पर जो रेखा लम्ब होगी वह नया र अक्ष माना तो इन अक्ष सम्बन्धी भुज = य', को = र' तो पहले अक्ष सम्बन्धी

य = य'कोज्याष — र'ज्याष, र = य'ज्याष+र'कोज्याष, इन का उत्थापन (५) वें में देने से

$$\text{य}'^{2}(\text{अकोज्या}^{2}\text{ष}+\text{गज्या}^{2}\text{ष}+\text{कज्याषकोज्याष})$$
$$+\,\text{र}'^{2}(\text{अज्या}^{2}\text{ष}+\text{गकोज्या}^{2}\text{ष}-\text{कज्याषकोज्याष})$$
$$+\,\text{य}'\text{र}'\{2(\text{ग}-\text{अ})\text{ज्याषकोज्याष}+\text{क}(\text{कोज्या}^{2}\text{ष}-\text{ज्या}^{2}\text{ष}\}+\text{फ}'=0,\ \cdots (६)$$

मान लो कि य'र' का गुणक शून्य है तो

$$2(\text{ग}-\text{अ})\text{ज्याषकोज्याष}+\text{क}(\text{कोज्या}^{2}\text{ष}-\text{ज्या}^{2}\text{ष})=0$$
$$=(\text{ग}-\text{अ})\text{ज्या}2\text{ष}+\text{ककोज्या}2\text{ष}$$

इस लिये $\text{स्प}2\text{ष}=\dfrac{\text{क}}{\text{अ}-\text{ग}}$, ... (७)

(७)वां दिखलाता है कि सर्वदा ष का मान ऐसा मान सक्ते हैं जिस में य'र' का गुणक शून्य हो। य'र' के गुणक को शून्य करने से (६) वें का रूप $\text{य}'^{2}(\text{अकोज्या}^{2}\text{ष}+\text{गज्या}^{2}\text{ष}+\text{कज्याषकोज्याष})$

$$+\,\text{र}'^{2}(\text{अज्या}^{2}\text{ष}+\text{गकोज्या}^{2}\text{ष}-\text{कज्याषकोज्याष})+\text{फ}'$$
$$=\text{आय}'^{2}+\text{कार}'^{2}+\text{फ}'=0,\ . . . . (८)$$

जहां $\text{आ}=\frac{1}{2}\{\text{अ}+\text{ग}+(\text{अ}-\text{ग})\text{कोज्या}2\text{ष}+\text{कज्या}2\text{ष}\}$

$\text{का}=\frac{1}{2}\{\text{अ}+\text{ग}-(\text{अ}-\text{ग})\text{कोज्या}2\text{ष}-\text{कज्या}2\text{ष}\}$

परन्तु $\text{स्प}2\text{ष}=\dfrac{\text{क}}{\text{अ}-\text{ग}}$, $\therefore\ \text{कोज्या}2\text{ष}=\dfrac{\text{अ}-\text{ग}}{\sqrt{\{\text{क}^{2}+(\text{अ}-\text{ग})^{2}\}}}$

और $\text{ज्या}2\text{ष}=\dfrac{\text{क}}{\sqrt{\{\text{क}^{2}+(\text{अ}-\text{ग})^{2}\}}}$ इन का उत्थापन देने से

$$\text{आ}=\tfrac{1}{2}\left[\text{अ}+\text{ग}+\sqrt{\{\text{क}^{2}+(\text{अ}-\text{ग})^{2}\}}\right]$$
$$\text{का}=\tfrac{1}{2}\left[\text{अ}+\text{ग}-\sqrt{\{\text{क}^{2}+(\text{अ}-\text{ग})^{2}\}}\right]$$

य'र' के स्वर चिन्ह को उड़ा देने से और फ' का भाग दे कर पक्षान्तर-नयन से (८) वें का रूप $-\dfrac{\text{आ}}{\text{फ}'}\text{य}^{2}-\dfrac{\text{का}}{\text{फ}'}\text{र}^{2}=1$ यह समीकरण दिखलाता है कि यदि

(१) आ, का, फ' एक ही चिन्ह के होंगे तो वक्र असम्भव होगा

(२) यदि आ, का एक ही चिन्ह के हों और उस से विरुद्ध चिन्ह फं का हो तो वक्र दीर्घवृत्त होगा जिस के व्यासार्द्ध क्रम से $\sqrt{\left(-\frac{\text{फ}'}{\text{आ}}\right)}, \sqrt{\left(-\frac{\text{फ}'}{\text{का}}\right)}$ हैं ।

(३) यदि आ, का विजातीय चिन्ह के हों तो वक्र अति परवलय होगा।

(४) यदि आ = का और एक चिन्ह के हों और उन से विजातीय फं हो तो वक्र वृत्त होगा ।

(५) यदि $\text{फ}' = 0$ तो (८)वें समीकरण पर से $\text{आय}^2 + \text{कार}^2 = 0$ इस लिये वक्र मूलविन्दुरूप होगा यदि आ, का एक ही चिन्ह के हों और यदि भिन्न चिन्ह के हों तो वक्र दो सरलरेखा रूप होगा जिन का समीकरण $\text{र} = \pm \sqrt{\left(-\frac{\text{आ}}{\text{का}}\right)}\, \text{य}$ यह होगा ।

ऊपर जो आ, का का मान ले आये हैं उन का यदि घात करो तो

$$\text{आ} \times \text{का} = \frac{(\text{अ}+\text{ग})^2 - \text{क}^2 - (\text{अ}-\text{ग})^2}{४} = \frac{४\text{अग} - \text{क}^2}{४}$$

इस लिये यदि आ, का भिन्न भिन्न चिन्ह के होंगे तो $४\text{अग} - \text{क}^2$ यह ऋणात्मक होगा अन्यथा धन होगा ।

इस लिये यदि वक्र असम्भव और विन्दुरूप न हो और वृत्त को भी एक प्रकार का दीर्घ वृत्त ही समझें जिस का कि दोनों व्यासार्द्ध तुल्य हैं तो कह सक्ते हैं कि यदि $४\text{अग} - \text{क}^2$ यह धनात्मक हो तो वक्र दीर्घवृत्त होगा यह सिद्धान्त हुआ । इस में $४\text{अग} - \text{क}^2$ यह जब शून्य के तुल्य होगा तब त, और द के मान अनन्त होंगे इस स्थिति में वक्र का केन्द्र अनन्त दूर पर होगा अर्थात् वक्र परवलय ठहरेगा। इस में और भी अनेक विचार और सिद्धान्त हैं जिन का वर्णन करना चलराशिकलन में व्यर्थ है ।

१३६ । १३४ प्रक्रम (२) समीकरण में यदि पक्षान्तरनयन करो तो $\text{तय}^2 + २\text{मयर} + \text{नर}^2 - \text{चय} - \text{जर} - (\text{आ}' - \text{आ}) = 0$ ऐसा होगा

इस की यदि १३५ प्रक्रम के (१) समीकरण के साथ तुलना करो तो

अ = त, २म = क, ग = न, घ = — च, च = — ज, फ = — अा′— अा ऐसा होगा । इस लिये

४अग—क^2 = ४तन—४म^2 = ४ (तन—म^2)

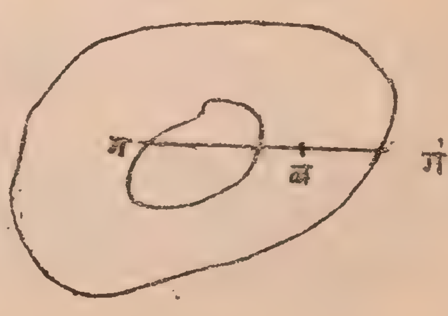
= ($\int$ कोज्या^{2} पताप) ($\int$ ज्या^{2} पताप) — ($\int$ ज्यापकोज्यापताप)^2

परन्तु यहां दहना पक्ष चतुर्थाध्याय के १८वें प्रश्न से धनात्मक होगा इस लिये उन पाददलों के मूलविन्दु सब एक दीर्घवृत्त के परिधि में होंगे जो मूलवक्र के नियत दो स्पर्शरेखान्तर्गत लम्ब और अपने चाप से तुल्य फल बनाते हैं । यदि इस दीर्घ वृत्त के भुज कोटि को इस के केन्द्र से गणना करें तो ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से य, और र के गुणक शून्य होंगे अर्थात् च=०, और ज=० । इस लिये अनुमान कर सक्ते हो कि कोई पाददल का मूलविन्दु ऐसा भी होगा जिस में च=०, ज=० । कल्पना करो कि अ के बदले इस को प्रथम मूलविन्दु माना तो १३४ प्रक्रम के (१) समीकरण से

अा′= अा+$\frac{१}{२}\int$ अ$_{ु}$^{2}को ज्या^{2} (प—प$_१$) ताप ऐसा होगा

यहां दहने पक्ष का दूसरा खण्ड सर्वदा धनात्मक है इस लिये अा′ का मान अा से सर्वदा अधिक होगा । इस पर से यह सिद्ध होता है कि जिस पाददल के मूलविन्दु से च=०, ज=० हों उस का फल सब से छोटा होगा ।

१३७। निर्दिष्ट लम्बाई की गग′ रेखा है इस का एक अग्र ग छोटे वक्र की परिधि पर और दूसरा अग्र बड़े वक्र की परिधि पर घूमता है इस लिये इस तरह से गग′ रेखा के घूमने से गग′ रेखास्थ ब विन्दु भी किसी वक्र में घूमेगा । इच्छा है कि इस ब विन्दु के वक्र का फल ग और ग′ बिन्दु के वक्रों के फलों से जानें ।



कल्पना करो कि गब=ग, बग'=ग' और कोई परस्पर लम्बरूप अक्षों के वश से $य_{१}$, $र_{१}$, य, र और $य_{२}$, $र_{२}$ क्रम से ग, ब, और ग' के भुज कोटि हैं। गग' रेखा और र अक्ष से उत्पन्न कोण प समझो तो चलनकलन के ११वें अध्याय से।

$$य_{१} = य - ग ज्या प,\quad र_{१} = र - ग कोज्या प ।$$

$$य_{२} = य + ग' ज्या प,\quad र_{२} = र + ग कोज्या प ।$$

$$\text{इस लिये } ताय_{१} = ताय - ग कोज्या प ताप$$

$$\text{और } र_{१}\, ताय_{१} = (र - ग कोज्या प)(ताय - ग कोज्या प ताप)$$

$$= रताय - ग कोज्या प (रताप + ताय) + ग^{२} कोज्या^{२} प ताप$$

$$\text{इसी तरह } र_{२}\, ताय_{२} = रताय + ग' कोज्या प (रताप + ताय) + ग'^{२} कोज्या^{२} प ताप$$

पहले को ग' और दूसरे को ग से गुण कर जोड़ देने से

$$ग' र_{१} ताय_{१} + ग र_{२} ताय_{२} = (ग+ग') रताय + (ग+ग') गग' कोज्या^{२} प ताप$$

$$\therefore ग' \int र_{१}\, ताय_{१} + ग \int र_{२}\, ताय_{२} = (ग+ग') \int रताय + (ग+ग') गग' \int कोज्या^{२} प ताप$$

$$= (ग+ग') \int रताय + (ग+ग') गग' \int \frac{१ + कोज्या २प}{२} ताप$$

$$= (ग+ग') \int रताय + (ग+ग') गग' \left(\frac{प}{२} + \frac{ज्या २प}{४} \right)$$

यदि गग' रेखा एक बेर पूरा भ्रमण कर फिर अपने स्थान पर पहुंचे तो स्पष्ट है कि प, ० और २π के बीच होगा, इस लिये सान्तचलनायन से

$$ग' (गा) + ग (गा') = (ग+ग') (वा) + (ग+ग') गग' \pi$$

$$\therefore \frac{ग' (गा) + ग (गा')}{ग+ग'} = (वा) + \pi गग',$$ यहां (गा), (वा), (गा'), क्रम से ग, व, ग' बिन्दुसम्बन्धि वक्रों के सम्पूर्ण फल हैं।

यदि ग, ग' रेखा के अग्र एकही वक्र की परिधि पर घूमें तो (गा) = (गा')

(गा)=(वा)+πगगं और (गा)—(वा)=πगगं इसलिये वक्र की परिधि और ब विन्दूत्पन्न वक्र की परिधि के बीच जो क्षेत्र होगा उस का फल πगगं यह होगा।

ग, गं विन्दु, घूमने के बदले भूल कर उलटा झलुऐ के ऐसा यदि फिर पीछे से अपने स्थान पर पहुंचे तो स्पष्ट है कि (गा)=०, (गां)=० इसलिये (वा)=—πगगं। ऋण चिन्ह दिखलाता है कि जिधर गगं रेखा घूमती है उस से विरुद्ध दिशा से फल उत्पन्न हुआ है। यदि घूमने के बदले गगं रेखा ही आगे पीछे चले तो (वा)=० इस से सिद्ध होता है कि त्र बिन्दु से दो तुल्य फन्दे के ऐसे वक्र होंगे जिन में एक धनात्मक दूसरा इस से उलटा ऋणात्मक होगा।

१३८। जिन वक्रों में भुज का कौन फल कोटि है इस का ज्ञान न हो वा ∫र ताय इस के मान का ठीक ठीक पता न लगे वहां स्वल्पान्तर से भुज का अनेक समान खण्ड कर प्रति भागों पर लम्ब खड़ा करने से अनेक पास पास में दो दो कोटि और तदन्तर्गत भुजखण्ड और वक्र की पूर्णज्या से समलम्ब चतुर्भुज बनाकर पृथक् पृथक् फल साधन कर सब का योग करो तो वक्रक्षेत्र का आसन्न फल होगा। (५)वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि भुज का जितनाही अधिक विभाग करोगे उतनाही सूक्ष्म फल होगा।

(१) कल्पना करो कि भुज का न खण्ड जो समान कर डाला उसका मान =च और कोटियों का मान $र_0, र_1, र_2, र_3, \cdots र_न,$

तो स्पष्ट है कि जितने समलम्बचतुर्भुज होंगे सभों में आद्यन्त कोटियों को छोड़ और सब कोटियां एक बार आधार दूसरे बार मुख होंगी और लम्ब सर्वत्र च यही रहेगा।

इस लिये $र_0$, $र_न$ दो कोटि, तदन्तर्गत भुजान्तर, और वक्र का चाप इन से बने

क्षेत्र का आसन्न फल=$च\left\{\frac{र_0+र_न}{२}+र_1+र_2+र_3+\cdots र_{न-1}\right\}$ यह होगा।

इस पर से यह फल जानने के लिये क्रिया उत्पन्न होती है कि आद्यन्त कोटि के योगार्द्ध में और बीचवाली सब कोटियों को जोड़ दो योग को भुजखण्ड च से गुणदेने से वक्र का स्वल्पान्तर से फल होगा।

(२) कल्पना करो कि एक ऐसा परवलय है जिसका मूलविन्दु $र_1$ कोटि का मूल, और समीकरण $र=अ+कय+गय^2$ यह है और यह, वक्र के $र_0$, $र_1$, $र_2$, कोट्यग्र पर होके जाता है तो $र_0=अ-कच+गच^2$, $र_1=अ$, $र_2=अ+कच+गच^2$

और पहली और तीसरी कोटि के बीच फल$=\int_{-च}^{च}(अ+कय+गय^2)ताय$

$$=२च\left(अ+ग\frac{च^2}{३}\right)$$

परन्तु $र_0+र_2=२र_1+२गच^2$ इस लिये

$$फल=\frac{च}{३}\{र_0+४र_1+र_2\}$$

अब समझो कि न का मान सम है अर्थात् $र_0$, $र_न$ कोटि के बीच भुजान्तर का सम विभाग किया है तो। ऊपर की युक्ति से तीन तीन कोट्यग्र पर गये हुये परवलयों के फल

$\frac{च}{३}\{र_2+४र_3+र_4\}$, $\frac{च}{३}\{र_4+४र_5+र_6\}$, $\frac{च}{३}\{र_6+४र_7+र_8\}$ ... इत्यादि होंगे

इस लिये इन सब फलों का योग

$$\frac{च}{३}\{र_0+र_न+४(र_1+र_3+र_5+\cdots)+२(र_2+र_4+र_6+\cdots)\}$$

यह स्वल्पान्तर से वक्र का फल हुआ।

इस पर से यह क्रिया उत्पन्न होती है कि $र_0$, $र_न$के वीच य अक्ष का समान समभाग कर कोटियों का मान जानलो फिर आद्यन्त कोटियों के योग में चौगुना अवशिष्ट विषम कोटियों का योग और दूना बाक़ी कोटियों का योग मिला कर तीन से भाग देदो लब्धि को च से अर्थात् दो कोटियों के बीच के अन्तर से गुण दो तो गुणनफल स्वल्पान्तर से वक्र का फल होगा।

इस रीति को सिम्पशन ने सन् १७४३ में निकाला है इसी लिये इसे सिम्पशन की रीति (Simpson's Rule) कहते हैं (See Simpson's mathematical Dissertations 1743, page 109)

इस के लिये एक उदाहरण दिखाते हैं। कल्पना करो कि जिस वक्र का $र=\frac{१}{१+य^2}$ यह समीकरण है उस का फल सिम्पशन की रीति से जानना है $र_0=१$, $र_न=\frac{१}{२}$ इस के बीच में।

यहां $र_0=१$ तब $य=0$, और $र_न=\frac{१}{२}$, तब $य=१$, मानो कि $न=१०$
इस लिये $च=\frac{१}{१०}=\cdot १$, और

$र_१=\frac{१}{१\cdot०१}=\cdot ९९००९९०१$, $र_२=\frac{१}{१\cdot०४}=\cdot ९६१५३८४५$

$र_३=\frac{१}{१\cdot०९}=\cdot ९१७४३११९$, $र_४=\frac{१}{१\cdot१६}=\cdot ८६२०६८९६$, $र_५=\frac{१}{१\cdot२५}=\cdot ८००००००$

$र_६=\frac{१}{१\cdot३६}=\cdot ७३५२९४१२$, $र_७=\frac{१}{१\cdot४९}=\cdot ६७११४०९४$, $र_८=\frac{१}{१\cdot६४}=\cdot ६०९७५६१०$

$र_९=\frac{१}{१\cdot८१}=\cdot ५५२४८६१९$, $र_{१०}=\frac{१}{१+१}=\cdot ५००००००$

	१·००००००००
	·५००००००००
इस लिये $र_0+र_न$ =	१·५००००००००
$र_१$ =	·९९००९९०१
$र_३$ =	·९१७४३११९
$र_५$ =	·८०००००००
$र_७$ =	·६७११४०९४
$र_९$ =	·५५२४८६१९
सब का योग =	३·९३११५७३३
	४
$४(र_१+र_३+र_५+\cdots)$ =	१५·७२४६२९३२
$र_२$ =	·९६१५३८४५
$र_४$ =	·८६२०६८९६
$र_६$ =	·७३५२९४१२
$र_८$ =	·६०९७५६१०
	३·१६८६४९१८
	२
	६·३३७२९८३६ $=२(र_२+र_४+र_६+र_८)$
	१५·७२४६२९३२ $=४(र_१+र_३+र_५+र_७+र_९)$
	१·५०००००००० $=र_0+र_{१०}$
यो =	२३·५६१९२७६८

$$=र_0+र_{१०}+४(र_१+र_३+र_५+र_७+र_९)+२(र_२+र_४+र_६+र_८)$$

$$\text{फल} = \frac{\text{च}\times\text{यो}}{३.} = \cdot ७८५३६०७५८६$$ इस में यदि ६ स्थान तक ग्रहण करें तो ·७८५३९८ यह मान होगा

परन्तु $\frac{१}{१+\text{य}^२}=\text{र}$ इस वक्र का य के ० और १ के बीच मान में चलानयन की रीति से ठीक फल $\int_०^१ \frac{\text{ताय}}{१+\text{य}^२} = \frac{\pi}{४} = \frac{३\cdot १४१५९२६५\cdots}{४} = \cdot ७८५३९८\cdots$

यह हुआ इस लिये यदि यहां भी दशमलव का मान ६ स्थान तक लें तो सिम्पशन की रीति से बहुत ही ठीक ठीक फल आया यह प्रत्यक्ष देखने में आता है।

(३) प्रत्येक दो कोटियों के बीच में जो भुजान्तर च माना है उसे २ ज के तुल्य मानें और कल्पना करें कि एक प्रकार के परवलय का $\text{र}=\text{अ}+\text{कय}+\text{गय}^२+\text{घय}^३$ यह समीकरण है जो कि $\text{र}_०, \text{र}_१, \text{र}_२, \text{र}_३$ इन चार कोट्यग्र पर होकर जाता है और जिस का मूलविन्दु य अक्ष में $\text{र}_१$, $\text{र}_२$ कोटियों के बीच में है तो

$$\text{र}_० = \text{अ} - ३\,\text{कज} + ९\,\text{गज}^२ - २७\,\text{घज}^३$$
$$\text{र}_१ = \text{अ} - \text{कज} + \text{गज}^२ - \text{घज}^३$$
$$\text{र}_२ = \text{अ} + \text{कज} + \text{गज}^२ + \text{घज}^३$$
$$\text{र}_३ = \text{अ} + ३\,\text{कज} + ९\,\text{गज}^२ + २७\,\text{घज}^३$$

इस लिये $\text{र}_० + \text{र}_३ = २(\text{अ} + ९\,\text{गज}^२)$, $\text{र}_१ + \text{र}_२ = २(\text{अ} + \text{गज}^२)$

$$\therefore \text{अ} + ९\,\text{गज}^२ = \frac{\text{र}_० + \text{र}_३}{२} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (१)$$

$$\text{अ} + \text{गज}^२ = \frac{\text{र}_१ + \text{र}_२}{२} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (२)$$

$\text{अ} + ५\text{गज}^२ = \frac{\text{र}_० + \text{र}_३ + \text{र}_१ + \text{र}_२}{४}$ । (१) और (२) को जोड़कर २ का भाग देने से

इस लिये $२अ+६गज^२ = \frac{र_०+र_३+३र_१+३र_२}{४}$ . . . . (३)

परंतु परवलय का $र_०र_३$ कोटि सीमा से फल $= \int_{-३ज}^{३ज} (अ+कय+गय^२+घय^३)ताय$
$= ३ज(२अ+६गज^२) = \frac{३ज}{४}\{र_०+र_३+३(र_१+र_२)\}$, ज के स्थान में $\frac{च}{२}$ का
उत्थापन देने से फल $= \frac{३च}{८}\{र_०+र_३+३(र_१+र_२)\}$

इसी तरह $र_३, र_४, र_५, र_६$ के अग्र पर गये परवलय का $र_३, र_६$ कोटि के बीच में फल $= \frac{३च}{८}\{र_३+र_६+३(र_४+र_५)\}$ इसी तरह चार चार कोट्यग्र पर गये हुये परवलयों के फल, $\frac{३च}{८}\{र_६+र_९+३(र_७+र_८)\}$, $\frac{३च}{८}\{र_९+र_{१२}+३(र_{१०}+र_{११})\}$ इत्यादि होंगे। यदि अभीष्ट वक्र के फल को इन परवलयों के फल योग तुल्य स्वल्पान्तर से मान लो तो वक्र का फल $= \{\frac{३च}{८}\{र_०+र_न+२(र_३+र_६+र_९+र_{१२}+\cdots)+३(र_१+र_२+र_४+र_५+\cdots)\}$ यह हुआ। इस पर से यह रीति उत्पन्न होती है कि आद्यन्त कोटि योग में $र_०$ के आगे तीसरी तीसरी कोटियों का दूना योग और बाक़ी कोटियों का तिगुना योग मिला दो। योग को च के $\frac{३}{८}$ से गुण देने से वक्र का फल हो जायगा।

इस को भी सिम्पशन की रीति कहते हैं परन्तु वास्तव में यह न्यूटन का निकाला हुआ है (See Opusula, method. Diff., Prop. 6, Scolium) ऊपर की रीतियों में कोटि की संख्या ज्यों ज्यों बढ़ाते जायंगे त्यों त्यों फल सूक्ष्म आवेगा।

१३९। किसी वक्र में सिद्ध है कि य=श्रु कोज्याष, र=श्रु ज्याष इस लिये

$स्पष = \frac{र}{य}$ और $तास्पष = \frac{ताष}{कोज्या^२ष} = \frac{यतार - रताय}{य^२}$।

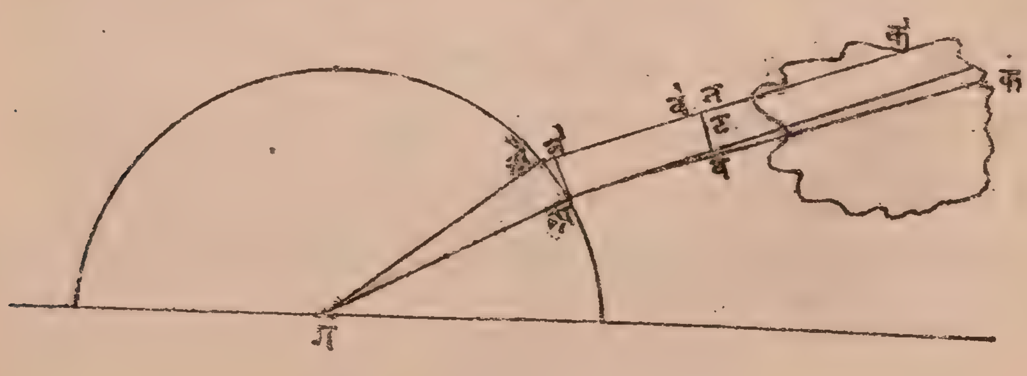
इस लिये $श्रु^२ताष = यतार - ताय$

और $\frac{१}{२}\int श्रु^२ताष = \frac{१}{२}\int(यतार - रताय)$

इस पर से सिद्ध होता है कि $\frac{१}{२}\int श्रु^२ताष$ इस के स्थान में $\frac{१}{२}\int(यतार - रताय)$ इस को लेकर भी उचित सीमाओं के भीतर फल साधन कर सक्ते हैं।

१४० । वक्र रेखा से घिरे हुए किसी क्षेत्र के फल जानने के लिये बुद्धिमानों ने यान्त्रिक विद्या के बल से यन्त्र बनाये हुए हैं इस यन्त्र को धरातलमापक (Planimeters) कहते हैं यह कई प्रकार के हैं उन में प्रोफ़ेसर आमस्टलर (Professor Amstler of Schaffhausen) का सब से सहज और उत्तम है । इस में दो भुज ऐसे जुटे हुये हैं कि स्वतन्त्र एक धरातल में घूम सक्ते हैं । एक भुज के अग्र पर एक विन्दु स्थिर बनी हुई है जिस के चारो ओर यन्त्र फिरा करता है इस लिये इस बिन्दु को यन्त्र का केन्द्र कहते हैं । इस यन्त्र में एक पहिये के ऐसा चक्र भी लगा हुआ है जो दूसरे भुज में सटा हुआ इस भुज पर लम्बरूप फिरा करता है और उन वक्रों के क्षेत्रफल के मान भी इस में अङ्कित हैं जो कि दूसरे भुज किसी विन्दु के चलने से उत्पन्न होते हैं । इस चक्र को रचना से स्पष्ट है कि यह दूसरे भुज पर जो लम्ब है उस के गमन मान को केवल बताता है जिस के ज्ञान से वक्र का फल भी जान सक्ते हैं ।

जिस वक्र का फल जानना हो उस की परिधि के एक विन्दु पर दूसरे भुज का क अग्र रक्खो फिर इस में लगे हुये चक्र को जो कि पहले दोनों भुजों के सम्पात विन्दु अ पर या क की ओर घसकाते और आगे बढ़ाते जाओ जिस में इस के साथ साथ गअ और अक भुज ऐसा घूमें कि क बिन्दु अभीष्टवक्र की परिधि पर ही सर्वदा रहे इस प्रकार से जब वक्र के सब परिधि पर क विन्दु घूम कर फिर अपने पहले स्थान पर आवे उस समय चक्राङ्कित संख्या जो सामने में हो वही वक्र का फल समझना ।



इस में पहले यह दिखलाते हैं कि सर्वदा अ विन्दु पर चक्र के स्थिर रहने से जो लम्ब के गमन का प्रमाण होगा वही चाहे अक्र में चक्र जहां रहे सर्वत्र होगा ।

कल्पना करो कि चक्र का केन्द्र व विन्दु पर पहुंचा और जब अक्र की क विन्दु चल कर बहुत ही पास के क' विन्दु पर पहुंची उस समय यन्त्र के भुज गअ', अ'क' रूप हुये और तब चक्र का केन्द्र व' विन्दु पर पहुंचा। अ'क, अ'क' को बहुत ही पास पास समझो, अ और व विन्दु से अ'क' रेखा पर अन', वन लम्ब और अ विन्दु से अ'क' के समानान्तर अट रेखा खींचो तो अक, अ'क' के अत्यन्त पास होने के कारण अन' = ताचा = अ स्थान से लम्ब की गति, ∠ वअट = ताप, और वन = ताचा' = व स्थान से लम्ब की गति, अब = ग, इस लिये

वन = ताचा' = वट + टन = ताचा + गताप

अब, जब क वक्र की परिधि में घूमते घूमते फिर अपने पहले स्थान पर पहुंचे गा उस समय ताप, के जितने मान होंगे सब का योग धन ऋण के तुल्य होने से शून्य हो जायगा क्योंकि अक्र रेखा का एक ओर जितने झुकाव से चलना होगा फिर उतने ही झुकाव से विरुद्ध दिशा में चलना होगा। इस लिये वक्र के चारो ओर घूमने में यो ताचा'= यो ताचा अर्थात् अ विन्दु पर चक्र के केन्द्र को स्थिर रखने से जो लम्ब के गमन का प्रमाण होगा वही अक्र रेखा में कहीं केन्द्र रहने से होगा।

अब कल्पना करो कि यन्त्र के केन्द्र अर्थात् प्रथम भुज के ग विन्दु-गत लम्बरूप अक्ष युग्म के अभिप्राय से क के भुज = य कोटि = र हैं, और अग = अ, अक = क, ∠ अगय = प, और कल्पना करो कि अक रेखा बढ़ाने से य अक्ष से प$_1$ कोण बनाती है तो सरलत्रिकोणमिति से

य = अकोज्याप + ककोज्याप$_1$, र = अज्याप + कज्याप$_1$

इस लिये   ताय = — अज्यापताप — कज्याप$_1$ताप$_1$,

तार = अकोज्यापताप + ककोज्याप$_1$ताप$_1$

और $\text{यतार} = \text{अ}^2\text{कोज्या}^2\text{पताप} + \text{अककोज्यापकोज्याप}_1\text{ताप}_1$

$+ \text{अककोज्यापकोज्याप}_1\text{ताप} + \text{क}^2\text{कोज्या}^2\text{प}_1\text{ताप}_1$

$\text{रताय} = -\text{अ}^2\text{ज्या}^2\text{पताप} - \text{अकज्यापज्याप}_1\text{ताप}_1$

$- \text{अकज्यापज्याप}_1\text{ताप} - \text{क}^2\text{ज्या}^2\text{प}_1\text{ताप}_1$

इस लिये $\text{यतार} - \text{रताय} = \text{अ}^2\text{ताप} + \text{अककोज्या}(\text{प}-\text{प}_1)\text{ताप}_1$

$+ \text{अककोज्या}(\text{प}-\text{प}_1)\text{ताप} + \text{क}^2\text{ताप}_1$

$= \text{अ}^2\text{ताप} + \text{अककोज्या}(\text{प}-\text{प}_1)\text{ता}(\text{प}+\text{प}_1) + \text{क}^2\text{ताप}_1$

और $\text{ताचा} = \text{अन}' = \text{अअ}'\text{ज्याअअ}'\text{न} = \text{अतापकोज्या}(\text{प}-\text{प}_1)$

परन्तु $\text{प}+\text{प}_1 = 2\text{प} - (\text{प}-\text{प}_1)$

इस लिये $\text{अककोज्या}(\text{प}-\text{प}_1)\text{ता}(\text{प}+\text{प}_1)$

$= 2\text{अककोज्या}(\text{प}-\text{प}_1)\text{ताप} - \text{अककोज्या}(\text{प}-\text{प}_1)\text{ता}(\text{प}-\text{प}_1)$

$= 2\text{कताचा} - \text{अककोज्या}(\text{प}-\text{प}_1)\text{ता}\ (\text{प}-\text{प}_1$

इस के उत्थापन से

$\text{यतार} - \text{रताय} = \text{अ}^2\text{ताप} + \text{क}^2\text{ताप}_1$

$+ 2\text{कताचा} - \text{अककोज्या}(\text{प}-\text{प}_1)\text{ता}(\text{प}-\text{प}_1)$

परन्तु १३९वें प्रक्रम से क बिन्दु के भ्रमण से उत्पन्न निर्दिष्ट वक्र का फल $\frac{1}{2}\int(\text{यतार} - \text{रताय})$ यह होगा ।

अब निर्दिष्ट वक्र के परिधि पर क बिन्दु के पूरा भ्रमण करने में कुछ आगे पीछे घसकते घसकते अ, अग फिर अपने पहले स्थान पर पहुंचेंगे इस लिये ऊपर की युक्ति से $\int\text{अ}^2\text{ताप}$, $\int\text{क}^2\text{ताप}_1$, $\int\text{अककोज्या}(\text{प}-\text{प}_1)\ \text{ता}(\text{प}-\text{प}_1)$ ये शून्य के तुल्य हो जायंगे इस लिये वक्र का पूरा फल $= \frac{1}{2}\int(\text{यतार}-\text{रताय}) = \text{क}\int\text{ताचा}$

$= \text{कचा}$ जहां चा लम्ब के गमन का प्रमाण है जो कि चक्र स्वयं बतलाता है। इस लिये चक्र में पहले ही से लम्ब के गमन के प्रमाण को क गुना कर अङ्कन कर डालें तो जो उस समय चक्र में अङ्कन की संख्या होगी वही वक्र का समग्र फल होगा ।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

१ । समानिपरवलय में जिसका $य^२ - र^२ = १$ यह समीकरण है यदि केन्द्राभिप्राय से भुज, श्रुति, वक्र का चाप, इन से उत्पन्न वक्र त्रिभुज का फल=स हो तो सिद्ध करो कि

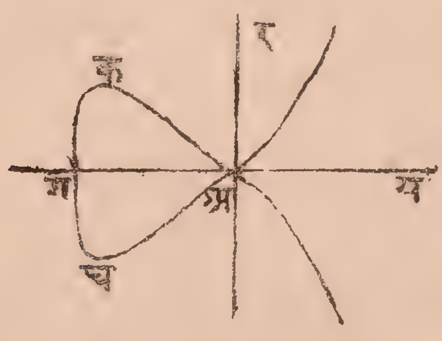
$$य = \frac{इ^{स}+इ^{-स}}{२} \text{ और } र = \frac{इ^{स}-इ^{-स}}{२}$$

२ । जिस वक्र का $अ^२ र^३ = य^३ (२ अ - य)$ यह समीकरण है उसका सम्पूर्ण फल क्या होगा । उ० $\pi अ^२$

३ । जिस वक्र का $य^३ = र^२ (अ - य)$ यह समीकरण है उसके चाप और असीमपथ और य अक्ष से बने क्षेत्र का फल बताओ । उ० $\frac{३}{८} \pi अ^२$

४ । जिस वक्र का $अ^३ र^२ = य^४ (क + य)$ यह समीकरण है उसकी आकृति नीचे लिखी हुई है इसमें अ क ग घ अ फन्दे का फल बताओ ।

उ० $\frac{८ क^{\frac{७}{२}}}{३·५·७ अ^{\frac{३}{२}}}$





५ । इस वक्र में अक=अ, अग=क और इस का समीकरण $ग र^२ = (य - अ)(य - क)^२$ यह है । ग क के बीच जो फन्दा है उस का फल बताओ । उ० $\frac{८ (क - अ)^{\frac{५}{२}}}{३·५ ग^{\frac{१}{२}}}$

६ । $य र^२ = ४ अ^२ (२ अ - य)$ यह एक विटचरी (Witch) का समीकरण है इसके और असीमपथ के बीच क्षेत्र का फल बताओ ।

उ० $४ \pi अ^२$

७। जिस दीर्घवृत्त का $\frac{य^२}{अ^२}+\frac{र^२}{क^२}=१$ यह समीकरण है उसके अवलून का सम्पूर्ण फल क्या होगा। उ० $\frac{३\pi(अ^२-क^२)^२}{८ अ क}$

८। सिद्ध करो कि जिसका अन्तीय समीकरण श्रु प=अ यह है उसके कोई दो श्रुति और चाप से बने क्षेत्रों के फलों में वही सम्बन्ध होगा जो उस उस काल की दो दो श्रुतियों के अन्तर में होगा।

९। $य^३+र^३=३$ अ य र इस समीकरण के वक्र में जो एक फन्दा होगा उसका क्या फल होगा। यहां अन्तीय समीकरण बनावो तो

$$श्रु=\frac{३ अ कोज्याप ज्याप}{ज्या^३प+कोज्या^३प}$$ ऐसा होगा। फिर

$$फल=\frac{९ अ^२}{२}\int_0^{\frac{\pi}{२}}\frac{ज्या^२प कोज्या^२प}{(ज्या^३प+कोज्या^३प)^२}ताप$$

इसके जानने के लिये मानो कि स्पप=च तो

इस का रूप $\frac{९ अ^२}{२}\int_0^{\infty}\frac{च^२ ता च}{(१+च^३)^२}=\frac{३ अ^२}{२}$

१०। सिद्ध करो कि जिस वक्र का र $(य^२+अ^२)=ग^२$ (अ—य) यह समीकरण है उसका फल य=० से य=अ तक $ग^२(\frac{\pi}{४}-\frac{१}{२}ला २)$ यह है।

११। $र^२=\frac{य^२(अ+य)}{अ-य}$ इस समीकरण के वक्र में जो फन्दा होगा उसका फल क्या होगा। उ० $२ अ^२(१-\frac{\pi}{४})$

१२। $श्रु^२$ को ज्याप$=अ^२$ज्या ३प इस समीकरण के वक्र में एक फन्दे का फल बतावो। उ० $\frac{३अ^२}{४}-\frac{अ^२}{२}ला२$

१३। यदि वक्र में श्रु=(कोज्या २ प+ज्या २ प) तो सम्पूर्ण फल क्या होगा। उ० π $अ^२$

१४। जिस वक्र का $(य^2+र^2)^3=4\frac{अ^2}{क^2}य^2 र^2$ यह समीकरण है उसके एक फन्दे का फल बताओ। उ० $\frac{\pi अ^2}{8 क^2}$

१५। जहां $(य^2+र^2)^2=4अ^2य^2+4क^2 र^2$ ऐसा समीकरण है उस वक्र का सम्पूर्ण फल क्या होगा। उ० $2\pi(अ^2+क^2)$

१६। जिस वक्र का $\frac{य^2}{अ^4}+\frac{र^2}{क^2}=\frac{1}{ग^2}\left(\frac{य^2}{अ^2}+\frac{र^2}{क^2}\right)^2$ यह समीकरण है उस का फल सम्पूर्ण क्या होगा। उ० $\frac{\pi ग^2}{2अक}(अ^2+क^2)$

(१३०) प्रक्रम का ३ उदाहरण देखो)

१७। जहां $श्रु\ कोज्या\ प=अ\ कोज्या\ 2\ प$ उस वक्र के फन्दे का फल बतावो उ० $(2-\frac{\pi}{2})अ^2$

१८। यदि अ>क तो $श्रु=\frac{अ^2}{\sqrt{(अ^2-क^2\ कोज्या^2 प)}}+क\ कोज्या\ प$ इस समीकरण के वक्र का क्या फल होगा। उ० $\frac{\pi अ^3}{\sqrt{(अ^2-क^2)}}+\frac{\pi क^2}{2}$

१९। दो श्रुति और कर्णच्छेद (Conchoid) के चाप से बने क्षेत्र के फल का मान बतावो। जहां कर्णच्छेद का $श्रु=अ+क\ कोछेप$ यह समीकरण है

२०। दीर्घवृत्त के केन्द्र से दो श्रुति जो दीर्घवृत्त के परिधिस्थ दो विन्दुओं तक खींची गई हैं उन से और दीर्घवृत्त के चाप से बने क्षेत्र का फल बतावो।

२१ परवलय का चाप और शिरःस्थान से दो श्रुति इन से बने क्षेत्र का फल कैसा होगा।

२३। यदि वक्र का समीकरण श्रु=अ(छेप+स्पप) और इस के असीमपथ का समीकरण श्रु कोज्याप=२ अ यह हो तो वक्र और असीमपथ के भीतर का क्षेत्र फल क्या होगा।

२४। सिद्ध करो कि श्रु=अ (१+२ कोज्याप) इस समीकरण के वक्र का सम्पूर्ण फल $अ^2\left(२\pi+\frac{३\sqrt{३}}{२}\right)$ यह और इस के भीतरी फन्दे का फल $अ^2\left(\pi-\frac{३\sqrt{३}}{२}\right)$ फल यह होगा।

२५। लाघुरिक्थिक सर्पिल में दो श्रुति और चाप से बने क्षेत्र का फल बतावो।

२६। यदि वक्र की श्रुति श्रु, मूलविन्दु से किसी स्पर्शरेखा पर पड़े लम्ब का मान ल और इस लम्ब और नियत रेखा से उत्पन्न कोण =प, और सीमितवक्र का सम्पूर्ण फल स और इस के सीमित पाददल का सम्पूर्ण फल $स_१$ हो तो सिद्ध करो कि $२\,स_१=स+\frac{१}{२}\int श्रु^2 ताप$ जहां वक्र और पाददल का एक ही मूलविन्दु है।

२७। सिद्ध करो कि पाददल का मूल स्थान दीर्घवृत्त के भीतर ही दीर्घवृत्त के केन्द्र से ग दूरी पर है उसका सम्पूर्ण फल$=\int(अ^2+क^2+ग^2)$ यह होगा।

२८। श्रु=अकोज्यानप+कज्यानप इस समीकरण के वक्र में एक फन्दे का फल बतावो। उ॰ $\frac{\pi}{न}(अ^2+क^2)$

२९। $श्रु^2=अ^2$कोज्यानप$+क^2$ज्यानप इस समीकरण के वक्र में एक फन्दे का फल बतावो। उ॰ $\frac{\sqrt{(अ^4+क^4)}}{न}$

३०। $अ^2र^4=य^4(अ^2-य^2)$ इस समीकरण के वक्र का सम्पूर्ण फल क्या होगा। उ॰ $\frac{८अ^2}{५}$

३१ । $\text{शु}=\text{अकोज्यानप}$ इस समीकरण के वक्र में एक फन्दे का फल बताओ ।

$$\text{उ॰}\quad \frac{\pi \text{अ}^2}{\text{न}}$$

३२ । $\text{शु}=\text{अज्यानप}$ इस समीकरण के वक्र में सब फन्दों का फल बताओ ।

$$\text{उ फल} = \begin{cases} \dfrac{\pi \text{अ}^2}{४} \text{ यदि न विषम} \\ \dfrac{\pi \text{अ}^2}{२} \text{ यदि न सम} \end{cases}$$

३३ । दीर्घवृत्त के एक नाभि से जितनी श्रुतियां हैं उन्हें अपनी सीध में बढ़ा कर ग तुल्य काट उन पर एक वक्र रेखा कर दिया । इस से और दीर्घवृत्त की परिधि से उत्पन्न जो क्षेत्र हुआ उसका फल बताओ ।

उत्तर $\pi \text{ग}\,(२\text{क}+\text{ग})$

जहां क=दीर्घवृत्त का लघुव्यासार्द्ध ।

३४ । $\text{शु}^{\text{म}} = \text{अ}^{\text{म}}$ कोज्यामप इस समीकरण के वक्र में एक फन्दे का फल यदि आ और वक्र के मूलविन्दु हो इस के पाददल की मूलविन्दु जहां है वैसे पाददल का सम्पूर्ण फल $\text{आ}_१$ तो सिद्ध करो कि

$$\text{आ}_१ = \text{आ}\left(१+\frac{\text{म}}{२}\right)$$

३५ । नाभि से जो परवलय में दो श्रुतियां हों उन से और परवलय के चाप से जो क्षेत्र बना उसका फल सिद्ध करो कि ।

$$\frac{\text{अ}^{\frac{१}{२}}}{३}\left\{\left(\frac{\text{शु}+\text{शु}'+\text{ग}}{२}\right)^{\frac{३}{२}}-\left(\frac{\text{शु}+\text{शु}'-\text{ग}}{२}\right)^{\frac{३}{२}}\right\}$$

जहां परवलय की कोटि $\text{र}=\sqrt{४\,\text{अ}\,\text{य}}$ और परवलय के चाप की पूर्णज्या ग है ।

३६ । दीर्घवृत्त के केन्द्र न से बृहद्व्यासार्द्ध से जो वृत्त बनाया गया उसको सहायक वृत्त कहो और न को नाभि । दीर्घवृत्त की परिधि

में व बिन्दु लेकर इस के कोटि को अपनी सूध में बढ़ा कर माना कि सहायक वृत्त की परिधि में प बिन्दु पर लगी, और दीर्घवृत्त के व्यासार्द्धाग्र अ अन में अ विन्दु पर माना तो यदि ∠अ न प=ज तो सिद्ध करो कि अनाव दीर्घवृत्तखण्ड का फल $\frac{अक}{२}$ (ज—ज्याज) यह होगा। जहां अ, क वृहल्लघुव्यासार्द्ध हैं।

३७। $४अ^४र^२=क^२य^२(अ^२—२अय)$ इस समीकरण के वक्र में फन्दे का फल बतावो। उ॰ $\frac{अ·क}{१५}$

३८। जिन दो वक्रों के $र^२—४अय=०$, $य^२—४अर=०$ ये समीकरण हैं उनके चापों से बने क्षेत्र का फल बतावो। उ॰ $\frac{१६ अ^२}{३}$

३९। जिस वक्र का र=ग ज्या $\frac{य}{अ}$ ला ज्या $\frac{य}{अ}$ यह समीकरण है उसका फल ० से लेकर अπ तक य के मान में क्या होगा। उ २अग (१–ला२)

४०। जिस दीर्घवृत्त का $अय^२+२कयर+गर^२=१$ यह समीकरण है उसका फल क्या होगा। उ॰ $\frac{\pi}{\sqrt{(अग—क^२)}}$

(११६ प्रक्रम का अन्तिम वाक्य देखो)

४१। जिस दीर्घवृत्त का $अय^२+२कयर+गर^२+२घय+२चर+फ=०$ यह समीकरण है उसका क्षेत्र फल क्या होगा।

$$उ॰ \quad \frac{\pi\,(अच^२+गघ^२+फक^२-२\,चजक-अगफ)}{(अग-क^२)^{\frac{३}{२}}}$$

४२। जिस वक्र का $४\,र^२(अ^२+य^२)-८अर(अ^२-य^२)+२\,(अ^२-य^२)^२=०$ यह समीकरण है उसका सम्पूर्ण फल क्या होगा। उ० $अ^२\pi\left\{४-\frac{५\sqrt{३}}{२}\right\}$

४३। केन्द्र से दीर्घवृत्त की कोटियों पर वने अर्द्धवृत्त पर स्पर्शरेखा करदेने से स्पर्श विन्दुओं पर जानेवाला जो वक्र हो उसका फल क्या होगा।

दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{य^2}{अ^2}+\frac{र^2}{क^2}=१$ यह है

उ॰　वक्र का ध्रुवीय समीकरण दीर्घवृत्त के केन्द्र को

ध्रुवस्थान मान $श्रु^2=\frac{अ^2क^2}{क^2+४अ^2स्प^2\frac{प}{२}}$

और　फल $=\frac{\pi(अ^2\times क)}{२(२अ+क)}$

४४। जिस परवलय का $र^2=४अय$ यह समीकरण है उसके भीतर स्थिर (२ ग) पूर्णज्या घूमती है। उसके दोनों प्रान्तों पर परवलय में जो दो स्पर्शरेखा हैं उनके योगविन्दु के गमन से जो वक्र होगा उसके और परवलय के भीतर समग्र फल क्या होगा।　　उ० $\frac{ग^{2\pi}}{२}$

(परवलय के तिर्यक्भुजकोटि का समीकरण देखो)

४५। एक लड़के ने सात हाथ डंडे के दोनों शिरों को एक दीर्घवृत्त की परिधि पर रखकर चारो ओर घुमाने लगा। उस डंडे के बीच में नीचे एक लोहे की नोखदार कील लगी थी। इसके कारण डंडे के चारो ओर घूम जाने से दीर्घवृत्त के भीतर एक नया वक्र बनगया। लड़के ने हंसकर अपने गुरु से जो कि उसे हिसाब पढ़ाता था पूछा कि गुरुजी दीर्घवृत्त और नये वक्र के भीतर एक वर्गहस्त पत्थर की कितनी पटिया फ़र्श के लिये लगेंगी। बतावो गुरु ने क्या उत्तर दिया। यहां बृहद्व्यास १४ हाथ का समझो।

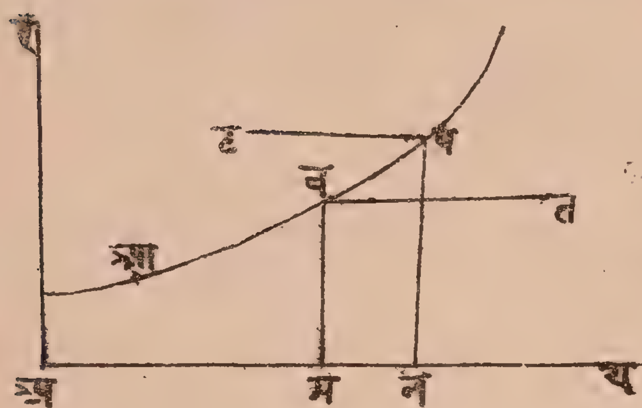
यदि व्यास परिधि का सम्बन्ध $\frac{२२}{७}$ मानो तो पत्थर के पटिये की संख्या ३८$\frac{१}{२}$

इति सप्तमाध्याय।

अथ अष्टमाध्याय ।

वक्र के पृष्ठफल और घनफल का आनयन ।

१४१ । कल्पना करो कि अर, अय लम्बरूप अक्ष, आ स्थिरविन्दु



चा=आव, व विन्दु का भु=य, के=र है । व के पास प एक और विन्दु लो और आवप वक्र को अ य अक्ष के चारो ओर घुमा दो तो एक घनक्षेत्र बन जायगा जिसके आव चाप के घूमने से जो पृष्ठफल होगा उसके गति का सम्बन्ध चाप के गति के वश से $\frac{\text{ता पृ}}{\text{ता चा}}=२\pi\,\text{र}$ (चलन कलन का १६०वां प्रक्रम देखो)

इस लिये $\quad \text{पृ}=\int २\pi\text{र ता चा} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (१)$

इसी तरह से $\text{पृ}=\int २\pi\text{र}\,\frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}}\,\text{ताय} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (२)$

$$\text{पृ}=\int २\pi\text{र}\,\frac{\text{ताच}}{\text{तार}}\,\text{तार} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (३)$$

$$\text{पृ}=\int २\,\text{र ता चा}=\int २\pi\,\text{र}\,\frac{\text{ता चा}}{\text{ताष}}\,\text{ताप}=\int २\pi\,\text{श्रु ज्या प}\,\frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}}\,\text{ताप} \quad (४)$$

$$\text{जहां}\quad \frac{\text{ताचा}}{\text{ताष}}=\sqrt{\left\{\text{श्रु}^२+\left(\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}}\right)^२\right\}}$$

किसी स्थान में पृष्ठफल के लिये इन चारो समीकरणों में से गणितलाघव समझ कर एक को चुन सक्ते हो । जहां सहज में र, चाप के फल रूप में आ सके वहां (१) पहले को जहां $\frac{\text{ताचा}}{\text{तार}}$ सहज में र के फलरूप में आ सके वहां (३) को और जहां ध्रुवीयसमीकरण मालूम हो वहां (४) को ले सक्ते हो । प्रायः (२) बहुत ही कामका है क्योंकि वक्र के समीकरण से र और

$\frac{ताच}{ताय}$ दोनों प्राय: सहज में य के फलरूप में आजाते हैं इस लिये इसी को बहुधा लोग लेते हैं।

प्रत्येक समीकरणों से उचित सीमा के भीतर चाप से बने पृष्ठ का फल मालूम हो जायगा।

१४२। अ य अक्ष से अ दूरी पर अ य के समानान्तर अ य के चारो ओर यदि एक अपरिमित रेखा घूमे तो स्पष्ट है कि समतल मस्तक रूप एक शङ्कु बन जायगा इस लिये $य_2$, $य_1$ भुज के भीतर इस शङ्कु का पृष्ठ-फल (२) समीकरण लेने से ($र=अ$, $\frac{ता\,चा}{ताय}=\sqrt{1+\left(\frac{तार}{ताय}\right)^2}=1$)

$\int_{य_1}^{य_2} 2\pi\, अ\, ताय = 2\pi\, अ\, (य_2 - य_1)$ यह होगा।

इस से यह सिद्ध होता है कि इस शङ्कु के आधार परिधि को उंचाई के अन्तर से गुण देने से दोनों उंचाइयों के भीतर का पृष्ठफल हो जायगा

१४३। अ विन्दु पर अ य अक्ष से अ तुल्य कोण बनाने वाली रेखा यदि अ य के चारो ओर घूमे तो स्पष्ट है कि समसूची का पृष्ठ उत्पन्न हो जायगा जहां किसी विन्दु का भु=य और को=र=य स्प अ

इस लिये $\frac{ताचा}{ताय}=\sqrt{\left\{1+\left(\frac{तार}{ताय}\right)\right\}^2}=\sqrt{(1+स्प^2 अ)}=छे\, अ$।

इस लिये १४१ प्रक्रम का (२) समीकरण लेने से।

$पृ=2\pi \int स्प\, अ\, छे\, अ\, य\, ताय=\pi\, स्प\, अ\, छे\, अ\, य^2+स्थि$

और $य_2$, $य_1$ के भीतर पृष्ठफल$=\pi\, स्प\, अ\, छे\, अ\, (य_2^2-य_1^2)$ यही पृष्ठ-फल उस घनक्षेत्र का भी होगा जिसे भास्कराचार्य ने अपनी लीला-वती में वापी क्षेत्र कहा है।

इस में यदि $य_1=0$ और मूलस्थान से $य_2$ दूरी पर अ य अक्ष पर लम्बरूप धरातल से सूचीपृष्ठ सूचों को काटें तो कटे हुये परिधि का व्यासार्द्ध $=चि=य_2 स्प अ$ इस लिये समसूच्याकारशङ्कु का पृष्ठफल$=\pi$ को छे अ $चि^2$ इसी में यदि परिधि$=प=2\pi$ चि और सूची का पृष्ठसूत्र=पृ सू=को छे अ चि तो पृष्ठफल$=\frac{प\times पृ\,सू}{2}$। इस का साधन हमने अपने चलनकलनके १९८वें प्रक्रम

में केवल क्षेत्रयुक्ति ही से किया है।

१४४। गोल के पृष्ठफल का आनयन।

कल्पना करो कि वृत्त का समीकरण $र^{२} = अ^{२} - य^{२}$ यह है और यह वृत्त य अक्ष के चारो ओर घूमकर एक गोल को बनाया है तो $\frac{तार}{ताय} = -\frac{य}{र}$

$$और\ \frac{ताच}{ताय} = \sqrt{\left\{१+\left(\frac{तार}{ताय}\right)^{२}\right\}} = \sqrt{\left(१+\left\{\frac{य^{२}}{र^{२}}\right\}\right)} = \frac{अ}{र}$$

इस लिये १४१ प्रक्रम का (२) समीकरण लेने से

$$पृ = २\pi \int र \frac{अ}{र} ताय = २\pi अ \int ताय = २\pi अ य + स्थि$$

कल्पना करो कि मूलविन्दु से $य_{१}$, $य_{२}$ दूरी पर य अक्ष पर लम्बरूप जो दो धरातल हैं उन से गोल को काटा तो कटे हुये खण्ड का पृष्ठफल $= २\pi अ (य_{२} - य_{१}) = प (य_{२} - य_{१})$ (यदि प=गोल की परिधि।) इस पर से सिद्ध होता है कि कटे खण्ड का पृष्ठफल $य_{२} - य_{१}$ इसके अर्थात् उसके उंचाई के वश से घटता बढ़ता है अर्थात् खण्डों की उंचाइयों में जो सम्बन्ध है वही उनके पृष्ठफल में सम्बन्ध होता है।

यहां यदि $य = अ$ और $य_{२} = -अ$ तो गोल का समग्र पृष्ठफल $= ४\pi अ^{२}$ $= ४ \times$ वृत्तफल।

अर्थात् वृत्त के फल को चार गुना कर देने से वृत्त से बने गोल का पृष्ठफल होता है। भारतवर्ष में सब से पहले इस गोल के पृष्ठफल को भास्कराचार्य ने निकाला है और यद्यपि उन से इस की सच्ची उपपत्ति न हुई तथापि गोल का बहुत सा खण्ड कर और प्रत्येक खण्डों का फल साधन कर उनके योग पर से अटकर से सच्चा ही पृष्ठफल निकाला और लल्ल ने जो अशुद्ध पृष्ठफल का साधन किया था उसका खण्डन किया।

भास्कराचार्य ने अपने गोलाध्याय में यह भी दिखलाया है कि गोल के परिधि के आधे को व्यास मान एक कपड़े का वृत्त बनाया जाय और इस से यदि गोल को ढांके तो गोल का आधे से अधिक खण्ड ढंक जाता है इस लिये कपड़े के वृत्त का जो फल उसके दूने से गोल का पृष्ठफल अल्प ही होगा और गणित से निश्चय है कि गोल के वृत्त के

फल से कपड़े के वृत्त का दूना फल पांच गुना के आसन्न है इस लिये वृत्त के फल को पांच गुना करने से गुणनफल गोल के पृष्ठफल से अधिक होगा इस लिये लल्ल ने जो अपने गणित में लिखा है कि (वृत्तफलं परिधिघ्नं समन्ततो भवति गोलपृष्ठफलम्) वृत्तफल को परिधि से गुण देने से पृष्ठफल होता है यह बहुत ही अशुद्ध है।

१४५। बृहद्व्यास के चारो ओर दीर्घवृत्त के घूमने से जो घनक्षेत्र हो उसको दीर्घगोल कहो तो इस के पृष्ठफल के आनयन के लिये कल्पना करो कि दीर्घवृत्त का समीकरण $अ^2र^2+क^2य^2=अ^2क^2$ यह है

$$\text{तो यहां } \frac{तार}{ताय} = -\frac{क^2य}{अ^2र} \text{ और } \frac{ताचा}{ताय} = \sqrt{\left(1+\frac{क^4य^2}{अ^4र^2}\right)}$$

$$= \frac{क\sqrt{(अ^2-इ^2य^2)}}{अर}$$

इस लिये १४१ प्रक्रम के (२) समीकरण से

$$पृ = \frac{2\pi क}{अ}\int\sqrt{(अ^2-इ^2य^2)}\,ताय = \frac{2\pi कइ}{अ}\int\sqrt{\left(\frac{अ^2}{इ^2}-य^2\right)}\,ताय \cdots\cdots (1)$$

$$= \frac{\pi कइ}{अ}\left\{य\sqrt{\left(\frac{अ^2}{इ^2}-य^2\right)}+\frac{अ^2}{इ^2}ज्या^{-1}\frac{इय}{अ}\right\}$$

यदि ०, अ के भीतर य के मान में पृष्ठफल का साधन करें तो दीर्घगोल

$$\text{का आधा पृष्ठफल} = \pi अक\left\{\sqrt{(1-इ^2)}+\frac{ज्या^{-1}इ}{इ}\right\}$$

(दीर्घवृत्तलक्षण देखो)

यदि $य_2$, $य_1$ के भीतर चलानयन करें तो (१) से

$$पृ = \frac{2\pi कइ}{अ}\int_{य_1}^{य_2}\sqrt{\left(\frac{अ^2}{इ^2}-य^2\right)}\,ताय$$

यह दिखलाता है कि जिस दीर्घवृत्त का $\frac{अ}{इ}$ बृहद्व्यासार्द्ध और क लघुव्यासार्द्ध है उसका $य_2, य_1$ सम्बन्धि द्विगुण कोटियों के भीतर जो

खण्ड है उसे π से गुण देने से $य_2, य_1$ भुज सम्बन्धि अपने दीर्घवृत्त का पृष्ठफल हो जायगा।

इसी तरह यदि दीर्घवृत्त लघुव्यास के चारो ओर घूम कर घनक्षेत्र बनावे तो उसका पृष्ठफल भुज और कोटि को बदल देने से

$$पृ = २\pi \int य\, ताचा = २\pi \int \left[अ^2 + \frac{अ^4 इ^2}{क^4} र^2 \right]^{\frac{1}{2}} तार$$

$$= २\pi \frac{अ^2 इ}{क^2} \int \left[र^2 + \frac{क^4}{अ^2 इ^2} \right] तार$$

$$= २\pi \frac{अ^2 इ}{क^2} \left\{ \frac{र}{२} \sqrt{\left(र^2 + \frac{क^4}{अ^2 इ^2}\right)} + \frac{क^4}{अ^2 इ^2} ला \left\{ र + \sqrt{\left[र^2 + \frac{क^4}{अ^2 इ^2} \right]} \right\} \right\}$$

$$= \pi \frac{अर}{क^2} (अ^2 इ^2 र^2 + क^4)^{\frac{1}{2}} + \pi \frac{क^2}{इ} ला \frac{अइर + \sqrt{(अ^2 इ^2 र^2 + क^4)}}{अइ}$$

०, क के बीच में चलानयन करने से और उसको दूना कर देने से

$$समग्र\ पृष्ठफल = २\pi अ^2 + \pi \frac{क^2}{इ} ला \frac{1+इ}{1-इ} ।$$

यदि $\frac{य^2}{अ^2} - \frac{अ^2 इ^2 र^2}{क^2} = 1$ इस अति परवलय का $य_1$, $य_2$ के भीतर फल साधन करो तो स्पष्ट होगा कि इस फल से π गुना ऊपर के घनक्षेत्र का $य_1, य_2$ भुजसम्बन्धी पृष्ठफल होगा।

१४६। परवलय का चाप य अक्ष के चारो ओर घूम कर जो घनक्षेत्र बनाता है उसके पृष्ठफल का आनयन।

कल्पना करो कि परवलय का समीकरण $र^2 = ४अय$ यह है तो

$$\frac{तार}{ताय} = \frac{२अ}{र} \therefore \frac{ताचा}{तार} = \sqrt{1 + \frac{र^2}{४अ^2}}$$

$= \frac{\sqrt{(४अ^2+र^2)}}{२अ}$ इस लिये १४१ प्रक्रम के (३) समीकरण से

$पृ = \int २\pi र \frac{ताचा}{तार} तार = \frac{\pi}{अ} \int र\sqrt{(४अ^2+र^2)}\, तार$

$= \frac{\pi}{२अ} \int \sqrt{(४ अ^2+र^2)}\, २ रतार = \frac{\pi}{२अ} \times \frac{२}{३} (४ अ^2+र^2)^{\frac{3}{2}}$

$= \frac{\pi}{३अ} (४ अ^2+र^2)^{\frac{3}{2}} + स्थि$

०, और $र_1$ के भीतर पृष्ठफल $= \frac{\pi}{३अ} \left\{ (४अ^2+र_1^2)^{\frac{3}{2}} - ८अ^3 \right\}$

१४० । कातन्वली (Catenary) का पृष्ठफलानयन।

इस का $र = \frac{\pi}{२} (इ^{\frac{य}{\pi}} + इ^{-\frac{य}{\pi}})$ यह समीकरण है

और जहां य=० वहां से गणना करने से $चा = \frac{\pi}{२} (इ^{\frac{य}{ग}} - इ^{\frac{य}{ग}})$ (७३वां प्रक्रम देखो) इस लिये यदि य अक्ष के चारो ओर वक्र के घूमने से घनक्षेत्र बना हो तो उसका पृष्ठफल १४१ प्रक्रम के (२) समीकरण से

$\int २\pi र \frac{ताचा}{ताय} ताय$ यह होगा परन्तु यहां वक्र के लक्षण से

$र^2 = \frac{ग^2}{४} (इ^{\frac{२य}{ग}} + इ^{\frac{२य}{ग}} + २) = \frac{ग^2}{४} (इ^{\frac{२य}{ग}} - २ + इ^{-\frac{२य}{ग}} + ४) = चा^2 + ग^2$

इस लिये र तार = चा· ताचा। $\frac{र}{चा} = \frac{ताचा}{ता}$ और $\frac{तार}{ताय} = \frac{1}{२} (इ^{\frac{य}{ग}} - इ^{\frac{य}{ग}})$

$= \frac{चा}{ग}$ इस लिये $\frac{ताचा}{ताय} = \frac{र}{ग}$।

$\therefore पृ = २\pi \int र \frac{ताचा}{ताय} ताय = २\pi \int \frac{र^2 ताय}{ग} = \frac{२\pi}{ग} \int \frac{ग^2}{४} (इ^{\frac{२य}{ग}} + इ^{\frac{२य}{ग}} + २) ताय$

$= \frac{\pi ग}{२} \int (इ^{\frac{२य}{ग}} + इ^{\frac{२य}{ग}} + २) ताय = \frac{ग^2 \pi}{४} (इ^{\frac{२य}{ग}} - इ^{-\frac{२य}{ग}}) + ग \pi य$

$= \pi (र चा + ग य)$

इस से यह सिद्ध होता है कि चाप और कोटि के घात में ग गुणित भुज जोड़कर उसको व्यास मानो तो इस व्यास पर से जो परिधि हो

वही कातन्वली घनक्षेत्र का पृष्ठफल होगा ।

इसी स्थान में यदि र अक्ष के चारो ओर घूमने से घनक्षेत्र बना हो तो पृष्ठफल

$$२\pi\int य\, ताचा = २\pi\int \frac{यर\, ताय}{ग} = \pi\int य(इ^{\frac{य}{ग}} + इ^{-\frac{य}{ग}})\, ताय$$

परन्तु $\int यइ^{\frac{य}{ग}} ताय = गयइ^{\frac{य}{ग}} - ग\int इ^{\frac{य}{ग}} ताय = गयइ^{\frac{य}{ग}} - ग^२ इ^{\frac{य}{ग}}$

और $\int यइ^{-\frac{य}{ग}} ताय = -गयइ^{-\frac{य}{ग}} + ग\int इ^{-\frac{य}{ग}} ताय = -गयइ^{-\frac{य}{ग}} - ग^२ इ^{-\frac{य}{ग}}$

खण्डचलानयन से ।

इस लिये

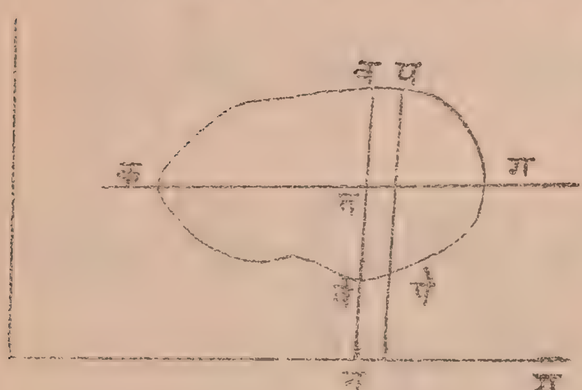
$$0,\ य \text{ के बीच में } पृ = \pi\int_0^य य\, इ^{\frac{य}{ग}} ताय + \pi\int_0^य य\, इ^{-\frac{य}{ग}} ताय$$

$$= \pi(गयइ^{\frac{य}{ग}} - ग^२इ^{\frac{य}{ग}} + ग^२ - गयइ^{-\frac{य}{ग}} - ग^२इ^{-\frac{य}{ग}} + ग^२)$$

$$= २\pi\left\{ग^२ + य\left[\frac{ग}{२}(इ^{\frac{य}{ग}} - इ^{-\frac{य}{ग}})\right] - ग\left[\frac{ग}{२}(इ^{\frac{य}{ग}} + इ^{-\frac{य}{ग}})\right]\right\}$$

$$= २\pi(ग^२ + यचा - गर) ।$$

१४८ । कल्पना करो कि कवपग पवं क एक ऐसा सीमितवक्र है जिस का कग रेखा के दोनों ओर तुल्य अवयव है । कग रेखा अय अक्ष के समानान्तर और अय अक्ष क्षेत्र के बाहर है ।



अय अक्ष के चारो ओर इस क्षेत्र के घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उस का पृष्ठफल १४१ प्रक्रम से यदि व, प और वं पं को बहुत ही पास पास समझो और अय अक्ष पर व न लम्ब को र, वं न लम्ब को रं और क ग के दोनो ओर सब तरह से क्षेत्र के समान भाग होने से वप चाप = वं पं चाप तो $२\pi\int (र+रं)$ ताचा $= ४\pi क$ ताचा यहां क = तन इस लिये यदि

समग्र वक्र की लम्बाई अर्थात् परिधि कवपगपंरं क का मान संचा हो तो समग्र पृष्ठफल=२πक $\times$ संचा ।

इस से यह सिद्ध होता है कि ऐसे घ चों का पृष्ठफल उन के परिधि और य अक्ष से समानान्तर रेखा का अन्तर जो हो उस को व्यासार्द्ध मानने से जो वृत्त की परिधि हो इन के घात के तुल्य होता है।

जैसे यदि वृत्त का समीकरण $(\text{य}-\text{च})^2+(\text{र}-\text{ज})^2-\text{ग}^2=0$ ऐसा हो तो स्पष्ट है कि य अक्ष के समानान्तर केन्द्रगामिनी रेखा जो होगी उस का य अक्ष से अन्तर ज होगा इस लिये य अक्ष के चारो ओर वृत्त के घूमने से गोलमुद्रिका होगी उस का पृष्ठफल=गोल परिधि $\times$ ज व्यासार्द्ध की परिधि=$२\pi\text{ग}\times २\pi\text{ज}$

यहां यदि १४१वें प्रक्रम से समानान्तर रेखा के ऊपरी भाग का पृष्ठ-फल साधन करो तो $\text{पृ}=२\pi\int[\text{ज}+\sqrt{\{\text{ग}^2-(\text{य}-\text{च})^2\}}]\text{ताचा}$

$=२\pi\int\text{ज ताजा}+२\text{ग}\int\sqrt{\{\text{ग}^2-(\text{य}-\text{च})^2\}}\text{ताचा}$

$=२\pi\text{जचा}+२\pi\int\sqrt{\{\text{ग}^2-(\text{य}-\text{च})^2\}}\text{ताचा}=२\pi\text{जचा}+२\pi\text{गय}$

लघुरूप करने से ।

इसी प्रकार रेखा के नीचे के भाग का पृष्ठफल=$२\pi\text{जचा}-२\pi\text{गय}$ ऐसा होगा

इस लिये समग्र घनफल=$२\pi\text{ज}\times२\text{चा}=२\pi\text{गज}\times$ गो॰ प॰

१४९ । जिस वक्र का अक्षीय समीकरण $\text{श्रु}=\text{अ}(१+\text{को ज्याष})$ यह है, स्थिर रेखा के चारो ओर उस के घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उस के पृष्ठफल का ज्ञान करना हो तो १४१वें प्रक्रम के (४) समीकरण से

$$\text{पृ}=२\pi\int\text{श्रुज्याष}\,\frac{\text{ताचा}}{\text{ताष}}\,\text{ताष} \text{ ।}$$

$$\text{परन्तु } \frac{\text{ताचा}}{\text{ताष}}=\sqrt{\left\{\text{श्रु}^2+\left(\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}}\right)^२\right\}}=\text{अ}\sqrt{\{(१+\text{कोज्याष})^2+\text{ज्या}^2\text{ष}\}}$$

$$=\text{अ}\sqrt{(२+२\text{को ज्याष})}=२\text{अ को ज्या}\frac{\text{ष}}{२}$$

$$\text{इस लिये } \text{पृ}=४\pi\text{अ}^2\int(१+\text{को ज्याष})\text{कोज्या}\frac{\text{ष}}{२}\text{ज्याष ताष}$$

$$=१६\pi अ^२ \int को ज्या^४ \frac{ष}{२} ज्या \frac{ष}{२} ताप = -\frac{३२\pi अ^२}{५} को ज्या^५ \frac{ष}{२} + स्थि ।$$

$0, \pi$ के भीतर ष के मान में समग्र घनक्षेत्र का पृष्ठफल$=\dfrac{३२\pi अ^२}{५}$

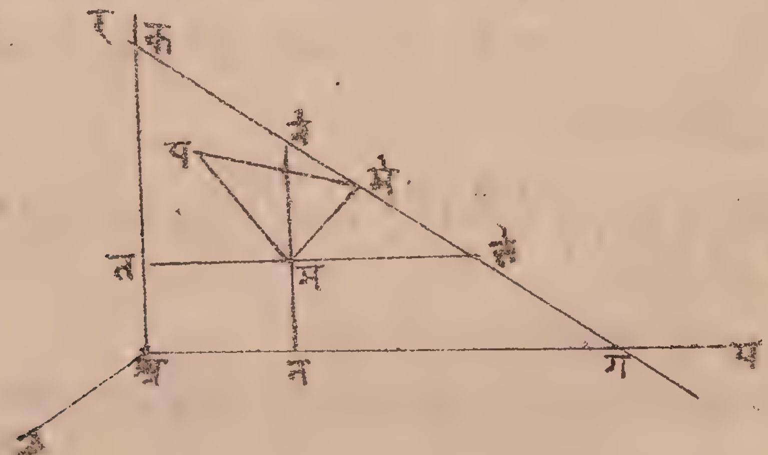
१५० । कल्पना करो कि परस्पर लम्बरूप तीन धरातलों के योग रेखाओं के वश से किसी घनक्षेत्र के पृष्ठ का फ(य, र, ल)=० यह समीकरण है (६८वां प्रक्रम देखेा) तो इस पर से स्पष्ट है कि ल=फा (य,र) ऐसा होगा । जिस पृष्ठविन्दु का भु=य, को=र, शं=ल है उस विन्दु पर घनक्षेत्र मे स्पर्शधरातल करने की इच्छा है ।

स्पर्शधरातल उसे कहते हैं जिस के और वक्र के पृष्ठ के बीच दूसरा धरातल न बन सके । इस धरातल के जानने के लिये पहले साधारण किसी धरातल का समीकरण बनाते हैं ।

कल्पना करो कि किसी इष्टधरातल में प कोई विन्दु है जिस के शङ्कु ल का मूल यर धरातल में म और यर धरातल और इष्ट धरातल की योग रेखा कग है ।

म विन्दुसे अय और अर अक्ष पर क्रम से मन, मत लम्ब डाल कर बढ़ा दो और मान लो कि कग रेखा में इन दोनों लम्बों का योग न', और त' विन्दु में हैं ।

प विन्दु से कग रेखा पर लम्ब पम' है ।



अब यहां घनक्षेत्र मिति से शं=ल=पम, भु=य=अन और कोटि=र=मन। ∠ ममंप=यर धरातल और इष्ट धरातल से उत्पन्न कोण=इ, ∠ क=क, ∠ ग=ग।

नग=अग−अन=अग−य ∴ ननं=नग कोस्पनं=(अग−य) कोस्पक

और नंम=नंन−मन=(अग−य) कोस्पक−र ∴ ममं=नंम ज्यानं =(अग−य) कोज्याक−रज्याक परन्तु ममं=पम कोस्प∠पमंम =लकोस्पइ। इस लिये

(अग−य) कोज्याक−रज्याक=अगज्याग−यज्याग−रज्याक=लकोस्पइ

वा य ज्याग+रज्याक+लकोस्पइ−अगज्याग=०, · · · · · · (१)

इस में ज्याग, ज्याक, कोस्पइ, और −अगज्याग इन स्थिराङ्कों को इन के महत्तमापवर्त्तन से भाग दे कर इन के स्थान में क्रम से आ, का, खा, गा का उत्थापन देवो तो धरातल का समीकरण

आय+कार+खाल+गा=० · · · · · · · · · · (२) यह हुआ

कल्पना करो कि पृष्ठ के उस विन्दु पर गये धरातल का समीकरण

आय+कार+खाल+गा=० यह है तो इस के दूसरे विन्दु के भु=यं, को=रं, शं=लं से आयं+कारं+खालं+गा=० ऐसा समीकरण होगा। इस लिये दोनों के अन्तर से आ(यं−य)+का(रं−र)+खा(लं−ल)=०

इसलिये लं−ल=आं △ य+कां △ र जहां $-\frac{\text{आ}}{\text{खा}}$=आं−$\frac{\text{का}}{\text{खा}}$−=कां

परन्तु य+ △ य, र+ △ र भुजकोटि के वश से घनवक्र के पृष्ठ का शङ्कु

$$=\text{ल}+\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\triangle\text{य}+\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\triangle\text{र}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{\text{ता}^2\text{ल}}{\text{ताय}^2}(\triangle\text{य})^2+2\,\frac{\text{ता}^2\text{ल}}{\text{ताय तार}}\triangle\text{य}\triangle\text{र}+\frac{\text{ता}^2\text{ल}}{\text{तार}^2}(\triangle\text{र})^2\right\}+\cdots$$

(चलनकलन का ६८वां प्रक्रम देखो) इस लिये घनक्षेत्र के पृष्ठ के शङ्कु में धरातल के शङ्कु को घटा देने से

$$\text{अन्तर}=\text{अं}=\left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}-\text{आं}\right)\triangle\text{ य}+\left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}=\text{कां}\right)\triangle\text{ र}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{ता^2ल}{ताय^2}(\Delta य)^2+2\frac{ता^2ल}{ताय\ तार}\Delta य\Delta र+\frac{ता^2ल}{तार^2}(\Delta र)^2\right\}+\cdots$$

यर धरातल मे जिन विन्दुओं का य, र और य+△य, र+△र भुजकोटि हैं उन पर गई रेखा य अक्ष से यदि ब कोण बनावे तो △ र = △यस्पब अन्तर में इन का उत्थापन देने से

$$अं=\left\{\left(\frac{ताल}{ताय}-आं\right)+\left(\frac{ताल}{तार}-कां\right)स्पब\right\}\Delta य$$

$$+\left\{\frac{ता^2ल}{ताय^2}+2\frac{ता^2ल}{ताय\ तार}स्प\,ब+\frac{ता^2ल}{तार^2}स्प^2ब\right\}\frac{(\Delta य)^2}{2}+\cdots$$

इस लिये

$$\frac{अं}{\Delta य}=\left(\frac{ताल}{ताय}-आं\right)+\left(\frac{ताल}{तार}-कां\right)स्प\,ब$$

$$+\left\{\frac{ता^2ल}{ताय^2}+2\frac{ता^2ल}{तायतार}स्प\,ब+\frac{ता^2ल}{तार^2}स्प^2\,ब\right\}\frac{\Delta य}{2}$$

यह समीकरण दिखलाता है कि △ य अत्यल्प लेने से $\frac{अं}{\Delta य}$ यह $\left(\frac{ताल}{ताय}-आं\right)+\left(\frac{ताल}{तार}-कां\right)स्प\,ब$ इस के तुल्य हो सक्ता है इस में यदि △य, △ र ऐसे हों कि स्प $ब=-\frac{\frac{ताल}{ताय}-आं}{\frac{ताल}{तार}-कां}$ तो स्पष्ट है कि एक दिशा में परमाल्प अन्तर शून्य के लगभग होगा।

परन्तु यदि $\frac{ताल}{ताय}=आं$ और $\frac{ताल}{तार}=कां$ तो सब दिशाओं में परमाल्प अन्तर शून्य के लगभग होगा और △ य के स्थान में ताय रखने से ठीक ही ठीक शून्य के तुल्य होगा ऐसी दशा में वह धरातल स्पर्श धरातल होगा और उस का समीकरण आं, कां के स्थान में $\frac{ताल}{ताय}$, $\frac{ताल}{तार}$ का उत्थापन देने से

$$लं-ल=\frac{ताल}{ताय}(यं-य)+\frac{ताल}{तार}(रं-र)$$ यह होगा .. .. .. (३)

(१) समीकरण का रूपान्तर करने से

ल=अग स्प इ ज्या ग—य स्प इ ज्या ग—र स्प इ ज्या क

और ल'=अ ग स्प इ ज्या ग—य' स्प इ ज्या ग—र' स्प इ ज्या क

इस लिये ल'—ल= —स्प इ ज्या ग(य'—य)—स्प इ ज्या क(र'—र),..(४)

(३) और (४) का तुलना करने से

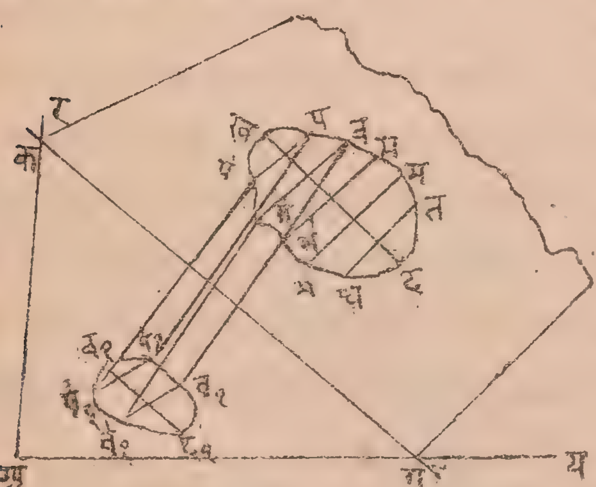
$\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}=-\text{स्पइज्याग}, \frac{\text{ताल}}{\text{तार}}=-\text{स्पइज्याक}=-\text{स्पइकोज्याग}$

इस लिये $\left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^{2}+\left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^{2}=\text{स्प}^{2}\text{ इ}$

इस लिये $\text{छे इ}=\sqrt{\left\{१+\left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^{2}+\left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^{2}\right\}}$ .. .. .. (५)

मैं यहां पर घनक्षेत्रमिति के सिद्धान्तों का वर्णन नहीं करता हूं किन्तु घनक्षेत्रमिति के बल से कुछ चलराशि के सिद्धान्त को दिखलाया चाहता हूं । हिन्दी भाषा में घन क्षेत्रमिति के न होने से उपयोगि सिद्धान्तों का कुछ वर्णन कर दिया है डिमार्गन (Demorgan) साहब ने चलनकलन और चलराशिकलन के १५वें अध्याय मे इस विषय पर बहुत बढ़ाकर लिखा है। चलराशिकलन में घनक्षेत्रमिति के सिद्धान्तों का लिखना मैं अनावश्यक समझता हूं ।

१५१ । कल्पना करो कि यर धरातल से जो इष्टधरातल इ तुल्य कोण बनाता है उसमें ख प व भ म त द ध ख एक कोई क्षेत्र है इसके सीमा



के प्रतिविन्दु से यर धरातल पर लम्ब डाल लम्बमूलों में रेखा कर देने से यर धरातल में एक नया क्षेत्र $\text{ख}_1\text{प}_1\text{व}_1\text{द}_1\text{व}'_1\text{प}'_1\text{ख}_1$ उत्पन्न हुआ इस का फल जानना हो तो पहले क्षेत्र में कोई ख विन्दु लेकर धरातलों के योग रेखा क ग के समानान्तर खद रेखा खींचो। इस का छोटा छोटा च के समान बहुतसा बिभाग कर प्रति भागों पर पप' वव', भभ', इत्यादि लम्ब खड़ा कर दो इस तरह से इस क्षेत्र का समान लम्ब

चतुर्भुज रूप बहुत खण्ड हो गये जिन में किसी एक पपं वं व चतुर्भुज का फल$=$च $\left(\frac{\text{पपं}+\text{ववं}}{२}\right)$ और इस चतुर्भुज के वश से यर धरातल में नये क्षेत्र में भी लम्बमूल के वश से एक समान लम्ब $\text{प}_1\text{पं}_1\text{वं}_1\text{व}_1$ चतुर्भुज उत्पन्न होगा जिस में $\text{प}_1\text{पं}_1$$=$कोज्याइ$\times$प पं, $\text{वं}_1\text{व}_1$$=$कोज्याइ$\times$व वं और इस में लम्ब मान वही च के तुल्य होगा इस लिये इस का फल $=$च $\left(\frac{\text{प}_1\text{पं}_1+\text{व}_1\text{वं}_1}{२}\right)$ $=$च $\left(\frac{\text{पपं}+\text{ववं}}{२}\right)$ कोज्या इ$=$पहले चतुर्भुज का फल$\times$कोज्या इ ॥ इसी तरह सब पहले चतुर्भुजों के फल को कोज्याइ से गुण देने से नये क्षेत्र के चतुर्भुजों का सब फल होगा इस लिये सब चतुर्भुजों का योग नये क्षेत्र का फल$=$पहले क्षेत्र के चतुर्भुजों का योग$\times$ कोज्याइ$=$पहले क्षेत्र का फल$\times$कोज्याइ।

इस से यह सिद्ध होता है कि जिस धरातल में जो कोई क्षेत्र हो उसके प्रान्त से दूसरे धरातल में लम्ब डाल इस क्षेत्र को दूसरे धरातल में परिणामन करें तो परिणत क्षेत्र का फल पहले क्षेत्र के फल को धरातलों के झुकाव की कोटिज्या से गुण देने से होगा।

१५२। कल्पना करो कि किसी घनक्षेत्र के पृष्ठ का फ (य, र, ल)$=$0 यह समीकरण है। पृष्ठ के प विन्दु का भु$=$य, को$=$र, —श$=$ल और प विन्दु के बहुत ही पास जो ब विन्दु है उस का भु$=$य$+\triangle$य, को$=$र$+\triangle$र, शं$=$ल$+\triangle$ल। प, विन्दु पर एक स्पर्शधरातल बना लो और प और ब विन्दुओं में लगा कर य ल, र ल, धरातलों के समानान्तर धरातलों को बनावो तो समानान्तर धरातलों से जो स्पर्शधरातल में अवयव उत्पन्न हुआ उसके प्रान्त से य र धरातल पर यदि लम्ब डालें तो उस का परिणत रूप एक आयत होगा जिसका भुज$=\triangle$य, को$=\triangle$र इस लिये स्पर्शधरातल के अवयव का फल$=\frac{\triangle\text{य}\times\triangle\text{र}}{\text{कोज्या इ}}$। १५१ प्रक्रम से इस में स्पष्ट है कि $\triangle$य के स्थान में यदि ताय को रख दें तो स्पर्शधरात-

का अवयव घनक्षेत्र के पृष्ठ का अवयव हो जायगा। परन्तु जब य=ताय तो र=तार इस लिये रल धरातल के समानान्तर दोनों धरातलों के बीच का पृष्ठफल=ताय $\int \frac{\text{तार}}{\text{कोज्याइ}}$ और समग्र पृष्ठफल

$$=\int \text{ताय} \int \frac{\text{तार}}{\text{कोज्याइ}} = \int\int \sqrt{\left\{1+\left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^2+\left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^2\right\}}\ \text{तार ताय}$$

१५० प्रक्रम और द्विगुण चलानयन से

यहां यदि पहले तार को स्थिर मान चलानयन करो तो यल धरातल के समानान्तर धरातल जो हैं उन के बीच का पहले पृष्ठफल आवेगा फिर इस पर से तार के वश से समग्र पृष्ठफल आ जायगा।

पृष्ठ के समीकरण के वश से $\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}, \frac{\text{ताल}}{\text{तार}}$ के मान विदित हो जायंगे फिर य, और र के उचित सीमाओं पर से अभीष्ट पृष्ठखण्ड का फल $\int\int \sqrt{\left\{1+\left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^2+\left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^2\right\}}$ तार ताय इस पर से विदित हो जायगा।

जैसे (१) जिस गोल के पृष्ठ का $\text{य}^2+\text{र}^2+\text{ल}^2=\text{अ}^2$ यह समीकरण है उस के अष्टमांश का पृष्ठफल जानना है तो यहां

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = -\frac{\text{य}}{\text{ल}},\ \frac{\text{ताल}}{\text{तार}} = -\frac{\text{र}}{\text{ल}}$$

$$\text{इसलिये पृ} = \int\int \sqrt{\left(1+\frac{\text{य}^2}{\text{ल}^2}+\frac{\text{र}^2}{\text{ल}^2}\right)}\ \text{तार ताय}$$

$$= \int\int \frac{\text{अतार ताय}}{\sqrt{(\text{अ}^2-\text{य}^2-\text{र}^2)}}$$

$$= \text{अ}\int\int \frac{\text{तार ताय}}{\sqrt{(\text{अ}^2-\text{य}^2-\text{र}^2)}} = \text{अ}\int\int \frac{\text{तार ताय}}{\sqrt{(\text{र}_1^2-\text{र}^2)}}\ \text{यदि}\ \text{अ}^2-\text{य}^2=\text{र}_1^2$$

$$\text{परन्तु} \int \frac{\text{तार}}{\sqrt{(\text{र}_1^2-\text{र}^2)}} = \text{ज्या}^{-1}\frac{\text{र}}{\text{र}_1}$$

यहां यदि ल=० तो यर धरातल में जो गोल पृष्ठ का अवयव लगा है उस का समीकरण $\text{अ}^2-\text{य}^2=\text{र}^2=\text{र}_1^2$ ऐसा होगा इस में यदि र=०,

और $र=र_1$ मानें तो अय अक्ष के ऊपर से य र धरातल और गोलपृष्ठ के सम्पात तक रल धरातल के समानान्तर धरातलों के बीच का

$$पृष्ठफल=\int_0^{र_1}\frac{ता र}{\sqrt{(र_1^2-र^2)}}=\frac{\pi}{२}$$

इसलिये $पृ=\frac{अ\pi}{२}\int ताय$ इस में यदि ० और अ के बीच य के मान में चलनयन करें तो गोल के अष्टमांश पृष्ठ का फल $=\frac{\pi अ^2}{२}$ इसलिये समग्र $पृष्ठफल=४\pi अ^2$ ।

इसी स्थान में यदि पहले ताय और फिर तार के वश से चलनयन करें तो ऊपर की युक्ति से अष्टमांश पृष्ठ का फल

$$=\int_0^{अ}\int_0^{य_1}\frac{अताय\ तार}{\sqrt{(अ^2-र^2-य^2)}}$$ । जहां $य_1^2=अ^2-र^2$

(२) जिस घनक्षेत्र के पृष्ठ का $ल^2+(य\ कोज्याअ_1+रज्याअ_1)^2-अ^2=0$ यह समीकरण है उस के पृष्ठ फल का क्या मान होगा।

$$यहां\ \frac{ताल}{ताय}=-\frac{कोज्याअ_1(यकोज्याअ_1+रज्याअ_1)}{ल}$$

$$\frac{ताल}{तार}=-\frac{ज्याअ_1(यकोज्याअ_1+रज्याअ_1)}{ल}$$

$$इसलिये\ पृ=\int\int\frac{अतार\ ताय}{ल}=\int\int\frac{अतार\ ताल}{\sqrt{\{अ^2-(यकोज्याअ_1+रज्याअ_1)^2\}}}$$

यर धरातल घनपृष्ठ को जहां काटता है उस का समीकरण $अ=\pm(यकोज्याअ_1-रज्याअ_1)$ यह है। यहां धनचिन्ह ग्रहण करने से धन पद में $र=(अ-यकोज्याअ_1)$ कोछेअ$_1$

$$अब\int\frac{तार}{\sqrt{\{अ^2-(यकोज्याअ_1+रज्याअ_1)^2}}$$

$$= \frac{१}{ज्याअ_१} ज्या^{-१} \frac{य कोज्याअ_१ + र ज्याअ_१}{अ}$$ इस का र = ० और

र = (अ − य कोज्याअ$_१$) कोछेअ$_१$ के भीतर का मान

$$= \frac{१}{ज्याअ_१} \left(\frac{\pi}{२} - ज्या^{-१} \frac{यकोज्याअ_१}{अ}\right)$$

इस लिये $पृ = \frac{अ}{ज्याअ_१} \int \left(\frac{\pi}{२} - ज्या^{-१} \frac{यकोज्याअ_१}{अ}\right) ताय$

इस में यदि $ज्या^{-१} \frac{यकोज्याअ_१}{अ} = स$, तो $\frac{अज्यास}{कोज्याअ_१} = य$ और

$$\frac{अकोज्यासतास}{कोज्याअ_१} = ताय$$

इसलिये

$$\int ताय ज्या^{-१} \frac{यकोज्याअ_१}{अ} = \int \frac{असकोज्यासतास}{कोज्याअ_१} = \frac{अ}{कोज्याअ_१} \int सकोज्यासतास$$

$$= \frac{अ}{कोज्याअ_१} (सज्यास + कोज्यास)$$

अब ० और $\frac{अ}{कोज्याअ_१}$ के भीतर य के मान में

$$पृ = \frac{अ}{ज्याअ_१} \int \frac{अ}{कोज्याअ_१} \left(\frac{\pi}{२} - ज्या^{-१} \frac{यकोज्याअ_१}{अ}\right) ताय$$

$$= \frac{अ}{ज्याअ_१} \left(\frac{\pi}{२} \frac{अ}{कोज्याअ_१} + \frac{अ}{कोज्याअ_१} - \frac{\pi}{२} \frac{अ}{कोज्याअ_१}\right) = \frac{अ^२}{ज्याअ_१ कोज्याअ_१}$$

यह पृष्ठफल धन पद में जो घनक्षेत्र का खण्ड है उस का हुआ।

यदि ध्यान दे कर विचार करो तो जिस घनक्षेत्र के पृष्ठ का समीकरण ऊपर लिख कर दिखाया है वह एक समतल मस्तक रूप शङ्कु

है जिस के अक्ष का समीकरण $ल=0$, $य$ कोज्या$अ_1$ $+र$ज्या$अ_1=0$ ऐसा होगा ।

१५३ । बहुत से घनक्षेत्र के पृष्ठ ऐसे होते हैं जिन के पृष्ठ का अवयव जो १५२ प्रक्रम में देखा गया है एक ही होते हैं । जैसे जिस पृष्ठ का $२ अल=य^2+र^2$ यह समीकरण है उस में

$$\left(\frac{ताल}{ताय}\right)^2+\left(\frac{ताल}{तार}\right)^2=\frac{य^2+र^2}{अ^2}$$ और जिस के पृष्ठ का समीकरण

$अल=यर$ यह है उसस में भी $\left(\frac{ताल}{ताय}\right)^2+\left(\frac{ताल}{तार}\right)^2=\frac{य^2+र^2}{अ^2}$

वही सिद्ध होता है इस लिये दोनों में पृष्ठ का परमाल्पमान अर्थात् तात्कालिकी गति एक ही है । ऐसे पृष्ठों का यूलर (Euler) ने Congruent नाम रक्खा है मैं इन्हें समगतिक पृष्ठ कहता हूं ।

इसी प्रकार $(ल-ग)^2=\{(य-अ)^2+(र-क)^2\}स्प^2इ$ इस शङ्कु और $य$कोज्या$अ_1$ $+ र$ कोज्या$क_1+ल$ कोज्या$इ=च$ इस धरातल में भी पृष्ठ का अवयव एक ही है । जहां कोज्या$^2अ_1+$ कोज्या$^2क_1$ $+$ कोज्या$^2इ=१$

इसी तरह

$२अल=य^2+र^2$

$२अल=(य^2-र^2)ग+२यर\sqrt{(१-ग^2)}$

$२अल=\{(य^2+र^2)^2-४कयर+२ग(य^2-र^2)+क^2+ग^2\}^{\frac{1}{2}}$

इत्यादि सब पृष्ठ समगतिक पृष्ठ हैं ।

१५४ । यदि स्पर्शधरातल में ऐसा एक अवयव लें जिस का यर धरातल में परिणत मान$अु$ता$अु$ताप यह हो तो

$पृ=\int\int\sqrt{\{१+\left(\frac{ताल}{ताय}\right)^2+\left(\frac{ताल}{तार}\right)^2\}}$ $अु$ता$अु$ ताप

जैसे जिस घनक्षेत्र के पृष्ठ का $\text{यर}=\text{अल}$ यह समीकरण है वह $\text{य}^2+\text{र}^2=\text{ग}^2$ इस वृत्त से काटा गया तो कटे खण्ड का पृष्ठफल जानना हो तो यहां

$$\text{छेइ}=\sqrt{\left(१+\frac{\text{य}^2}{\text{अ}^2}+\frac{\text{र}^2}{\text{अ}^2}\right)}=\frac{\sqrt{(\text{अ}^2+\text{स्रु}^2)}}{\text{अ}} \text{ क्योंकि } \text{य}^2+\text{र}^2=\text{स्रु}^2$$

$$\text{इस लिये }\ \text{पृ}=\int_0^{२\pi}\int_३^{\text{ग}}\frac{\sqrt{(\text{अ}^2+\text{स्रु}^2)}}{\text{अ}}\,\text{स्रु}\,\text{तास्रु}\,\text{ताष}$$

$$\text{परन्तु}\int\frac{\sqrt{(\text{अ}^2+\text{स्रु}^2)}}{\text{अ}}\,\text{स्रु}\,\text{तास्रु}=\frac{१}{३\text{अ}}\left(\text{अ}^2+\text{स्रु}^2\right)^{\frac{३}{२}}$$

$$\text{इस लिये }\int_0^{\text{ग}}\frac{\sqrt{(\text{अ}^2+\text{स्रु}^2)}}{\text{अ}}\,\text{स्रु}\,\text{तास्रु}=\frac{१}{३\text{अ}}\left\{\left(\text{अ}^2+\text{ग}^2\right)^{\frac{३}{२}}-\text{अ}^३\right\}$$

$$\text{और }\int\frac{१}{३\text{अ}}\left\{\left(\text{अ}^2+\text{ग}^2\right)^{\frac{३}{२}}-\text{अ}^३\right\}\text{ताष}=\frac{\text{ष}}{३\text{अ}}\left\{\left(\text{अ}^2+\text{ग}^2\right)^{\frac{३}{२}}-\text{अ}^३\right\}$$

$$\text{इस लिये अभीष्ट पृष्ठ फल}=\int_0^{२\pi}\int_0^{\text{ग}}\frac{\sqrt{(\text{अ}^2+\text{ग}^2)}}{\text{अ}}\,\text{स्रु}\,\text{तास्रु}\,\text{ताष}$$

$$=\frac{२\pi}{३\text{अ}}\left\{\left(\text{अ}^2+\text{ग}^2\right)^{\frac{३}{२}}-\text{अ}^३\right\}$$

१५५। यदि पृष्ठ का ध्रुवीय समीकरण लें अर्थात्

$\text{य}=\text{स्रु}\,\text{ज्याष}\,\text{कोज्याष}_१$, $\text{र}=\text{स्रु}\,\text{ज्याष}\,\text{ज्याष}_१$, $\text{ल}=\text{स्रु}\,\text{कोज्याष}$

और इन पर से ताय, तार इत्यादि का मान बना कर

$$\text{पृ}=\int\int\sqrt{\left\{१+\left(\frac{(\text{ताल})}{\text{ताय}}\right)^2+\left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^2\right\}}\ \text{तार}\ \text{ताय}$$

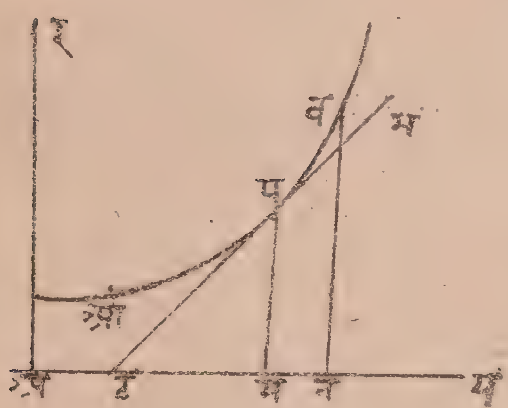
इस में उत्थापन दें तो

$$\text{पृ}=\int\int\sqrt{\left\{\text{श्रु}^{2}\text{ज्या}^{2}\text{प}+\left[\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}}\right]^{2}\text{ज्या}^{2}\text{प}+\left[\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}_1}\right]^{2}\right\}}\,\text{श्रुताप ताप}_1$$

ऐसा सिद्ध होगा । जहां सुभीता समझ पड़े तहां इस पर से भी उचित सीमाओं के भीतर पृष्ठफल जान सक्ते हो विस्तार के भय से बहुत बढ़ाना नहीं चाहते । २५० प्रक्रम के (३) उदाहरण तक पहुंचोगे तो स्पष्ट घनक्षेत्र हो जायगा ।

वक्र का घनफलानयन ।

१९६ । कल्पना करो कि आ, वक्र में नियत बिन्दु और प कोई बिन्दु है जिस का भु=अम=य, को=पम=र और मान लो कि आ के भुज से य बड़ा है ।



कल्पना करो कि आपव वक्र य अक्ष के चारो ओर घूम कर घनक्षेत्र बनाता है तो यदि आ और प बिन्दु में गये और य अक्ष पर लम्बरूप ऐसे दो धरातलों से घन क्षेत्र को काटें और इन दोनों धरातलों के बीच में के घनफल को घ कहें तो चलनकलन के १६० वें प्रक्रम से

$$\frac{\text{ताघ}}{\text{ताय}}=\pi\text{र}^{2}$$

इस लिये $\text{घ}=\int\pi\text{र}^{2}\,\text{ताय}$

वक्र के समीकरण से र का ज्ञान य के फल के रूप में आ जायगा । समझ लो कि $\int\pi\,\text{र}^{2}\text{ताय}=\text{फा}(\text{य})$ तो

$$\text{घ}=\text{फा}(\text{य})+\text{स्थि}$$

कल्पना करो कि जिस बिन्दु का भु=य_1 उस का घनफल=घ_1 और जिस बिन्दु का भु= य_2 उस का घनफल=घ_2 है तो

$$घ_1=फा(य_1)+स्थि$$

$$घ_2=फा(य_2)+स्थि$$

इस लिये $घ_2-घ_1=फा(य_2)-फा(य_1)=\int_{य_1}^{य_2}\pi र^2 ताय=\pi\int_{य_1}^{य_2}र^2 ताय$

१५७ । समसूच्याकार शङ्कु का घनफलानयन ।

कल्पना करो कि एक सरल रेखा अ मूल विन्दु में हो कर गई है और य अक्ष से अ तुल्य कोण बनाती है तो य अक्ष के चारो ओर इस के घूमने से समसूची उत्पन्न होगी (१४३वां प्रक्रम देखो) इस लिये यहां $र=य\cdot स्पअ$

$$घ=\int\pi\ स्प^2अ\ य^2 ताय=\frac{\pi स्प^2 अ\cdot य^3}{3}+स्थि$$

और $घ_2-घ_1=\frac{\pi स्प^2 अ}{3}(य_2^3-य_1^3)$

कल्पना करो कि $य_1=0$ और $चि=य_2\ स्पअ$ अर्थात् $य_2=\frac{चि}{स्पअ}$ तो समसूच्याकार शङ्कु (जिसके आधार परिधि का व्यासार्द्ध चि है) का

$$घनफल=\frac{\pi स्प^2 अ}{3}\times\frac{चि^3}{स्प^3 अ}=\frac{\pi चि^3}{3 स्पअ}=\frac{\pi चि^2 य_2}{3}$$

इस से यह सिद्ध होता है कि समखात फल की तिहाई सूची का घन फल होता है। इस को भास्कराचार्य ने भी अपनी लीलावती में लिखा है।

१५८ । गोल का घनफलानयन ।

यहां $र^2=अ^2-य^2$

इस लिये $घ=\int\pi र^2 ताय=\pi\int(अ^2-य^2)ताय$

$= \pi($अ^{2}य$-\frac{\text{य}^3}{3})+$ स्थि । य $= 0$ और य $=$ अ मानने से आधे गोले का घनफल $= \frac{2\pi\text{अ}^3}{3}$ इस लिये सम्पूर्ण घनफल $= \frac{4\pi\text{अ}^3}{3} = \frac{4\pi\text{अ}^2\times 2\text{अ}}{6}$

$= \frac{\text{पृफ}\times\text{व्या}}{6}$ अर्थात् पृष्ठफल को व्यास से गुण कर छ का भाग देने से गोल का घनफल होता है । इस को भी भास्कराचार्य ने अपनी लीलावती में लिखा है ।

१५९ । जिस परवलय का र$^2 = 4$अय यह समीकरण है य अक्ष के चारो ओर उस के घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उस का

घ $= \int \pi$र^{2}ताय $= \pi \int 4$अय ताय $= 4$अ$\pi \int$ यताय $= 2$अπय$^2 +$ स्थि

इस लिये घ$_2$—घ$_1 = 2$अπ(य$_2^2$—य$_1^2$) इस में यदि य$_1 = 0$ तो नीच के समीकरण से घ$_1 = 0$ इस लिये र$_2$ कोटि से बने वृत्त और शिरः-

स्थान के भीतर का घनफल $= 2$अπय$_2^2 = \frac{4\text{अय}_2\pi\text{य}_2}{2} = \frac{\pi\text{र}_2^2\text{ य}_2}{2}$

अर्थात् जिस समतलमस्तकपरिधि शङ्कु का आधार र$_2$त्रिज्या से उत्पन्न परिधि हो और उंचाई य$_2$ हो उस के घनफल के आधे के बराबर उसी उंचाई और उसी आधार से जो परवलय का घनक्षेत्र होगा उस का घनफल होगा ।

१६० । चलनकलन के ३८८ पृष्ठ में जो चक्राभ (Cycloid) का समीकरण र $=$ क (अ$+$ज्याय) , य $=$ क (१ —कोज्याअ) यह लें तो य अक्ष के चारो ओर इस के घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उस का

घ $= \int \pi$र^{2}ताय $= \pi$क$^3 \int$(अ$+$ज्याअ)^{2}ज्याअताअ

$= \pi$क$^3 \int$(अ$^2+2$अज्याअ$+$ज्या^{2}अ)ज्याअताअ

यहां खण्डचलानयन से

$$\int अ^2 ज्या अ ता अ = - अ^2 कोज्या अ + २\int अ कोज्या अ ता अ$$

$$= - अ^2 कोज्या अ + २ अ ज्या अ + २ कोज्या अ ।$$

$$\int २ अ ज्या^2 अ ता अ = \int अ (१ - कोज्या २ अ) ता अ$$

$$= \frac{अ^2}{२} - \frac{अ ज्या २ अ}{२} - \frac{कोज्या २ अ}{४} ।$$

और $\int ज्या^3 अ ता अ = \frac{कोज्या अ ज्या^2 अ}{३} + \frac{२}{३}\int ज्या अ ता अ$

$= -\frac{कोज्या अ ज्या^2 अ}{३} - \frac{२ कोज्या अ}{३}$ (१२वें प्रक्रम के १५वें उदाहरण से)।

अब आधे चक्रालद के घूमने से जो घनक्षेत्र होता है उस के घनफल का ज्ञान करना हो तो य = 0 और य = २क वा अ = 0, अ = π के भीतर ऊपर के चलों का मान ले आने से

$$\int_0^\pi अ^2 ज्या अ ता अ = \pi^2 - २ - २ = \pi^2 - ४$$

$$२\int_0^\pi अ ज्या^2 अ ता अ = \frac{\pi^2}{२} - \frac{१}{४} + \frac{१}{४} = \frac{\pi^2}{२},$$

और $\int_0^\pi ज्या^3 अ ता अ = \frac{२}{३} + \frac{२}{३} = \frac{४}{३}$,

इस लिये अभीष्टघनफल

$$= \pi क^3 \left\{\pi^2 - ४ + \frac{\pi^2}{२} + \frac{४}{३}\right\} = \pi क^3 \left(\frac{३\pi^2}{२} - \frac{८}{३}\right) ।$$

१६१। यदि वक्र र अक्ष के चारो ओर घूम कर घनक्षेत्र बनावे तो स्पष्ट है कि उस का घनफल य और र को बदल देने से $\int \pi य^2 तार$ यह होगा। इस लिये $घ_२ - घ_१ = \pi \int_{र_१}^{र_२} य_२ तार$ ऐसा होगा ।

१६२। परवलय का $र^2 = ४ अ य$ यह समीकरण है और यह र अक्ष के चारो ओर घूम कर घनक्षेत्र बनाता है तो इस का घन फल ऊपर के प्रक्रम से

$$घ = \int \pi य^2 तार = \pi \int \frac{र^4}{१६अ^2} तार = \frac{\pi र^5}{८०अ^2} + स्थि$$

इस लिये $घ_2 - घ_1 = \frac{\pi(र_2^5 - र_1^5)}{८०अ^2}$ । इस में यदि $र_1 = 0$ तो क्षेत्र के समीकरण से $घ_1 = 0$ इस लिये $र_2$ त्रिज्या से बने वृत्त और शिरःस्थान के भीतर का घनफल $= \frac{\pi र_2^5}{८०अ^2}$ ।

१६३। यदि दो वक्र य अक्ष के चारो ओर घूम कर दो घनक्षेत्र बनाते हों तो जो धरातल य अक्ष पर लम्ब है ऐसे दो धरातलों से दोनों घनक्षेत्रों के काटने से उन के भीतर जो घनफल होंगे उन के अन्तर को घ कहो और पहले वक्र का र=फ(य) यह और दूसरे का र=फ(य) यह समीकरण हो तो पिछले प्रक्रमों से स्पष्ट है कि

$$घ = \pi \int [\{फ(य)\}^2 - \{फ(य)\}^2] ताय \quad \text{यह होगा ।}$$

जिन दोनों लम्बरूपी धरातलों से दोनों घनक्षेत्रों को काटा है उन का समीकरण क्रम से यदि $य=य_1$, $य=य_2$ ऐसे हों तो ऊपर के चल में $य_1$, $य_2$ के भीतर जो मान होगा वही घनफलों का अन्तर होगा ।

कल्पना करो कि एक सीमित वक्र ऐसा है कि एक सरल रेखा जिस का समीकरण र=क है उस के सब कोटि खण्डरूपी पूर्णज्याओं का समान द्विभाग करती है (१४८वें प्रक्रम का क्षेत्र देखो) तो पूर्णज्या का मान यदि फि(य) हो तो रेखा के नीचे वक्र के भाग का समीकरण र = क − फि(य) = फा(य) और ऊपर के भाग का समीकरण र = क + फि(य) = फ(य) ऐसा होगा। इस लिये दोनों भागों से उत्पन्न घनक्षेत्र का फल $= घ = \pi \int [\{फ(य)\}^2 - \{फा(य)^2\}] ताय$

$$= ४\pi क \int फि(य) ताय$$

कल्पना करो कि सीमित वक्र के दोनों प्रान्त के जहां कोटि वक्र की स्पर्शरेखा हो जाती है भुज क्रम से $य_1$, $य_2$ हैं तो य अक्ष के चारो ओर सीमित वक्र के घूमने से जो घनक्षेत्र उत्पन्न होगा उस का घन फल $४\pi क\int_{य_1}^{य_2} फि(य)ताय$ यह होगा ।

य अक्ष के चारो ओर वक्र के घूमने से जो घनक्षेत्र होगा इस वाक्य का तात्पर्य यह है कि य, और र अक्ष से जितने जितने अन्तर पर वक्र के प्रत्यवयव हैं उतने ही उतने ही अन्तर पर सर्वत्र रहें ऐसा वक्र को चारो ओर घुमाने से वक्र के आकार के वश से आकाश में जो घनाकृति उत्पन्न हो वही वक्रजन्य घनक्षेत्र है ।

ऊपर के घनफल में अर्थात् $\pi\int[\{फ(य)\}^2-\{फा(य)\}^2]ताय$ इस में यदि फ(य) के स्थान में र और फा(य) के स्थान में $र'$ रख दें तो

$घ=\pi\int(र^2-र'^2)ताय=\pi\int(र+र')(र-र')ताय=२\pi क\int(र-र')ताय$
ऐसा होगा परन्तु $\int(र-र')ताय$ यह पिछले अध्याय से सीमित वक्र का फल है

इस लिये यदि सम्पूर्ण वक्र का फल आ हो तो सम्पूर्ण घनक्षेत्र का फल $२\pi क\times$ आ होगा । यहां भी १४८ प्रक्रम के ऐसा समझ लेना चाहिये कि वक्र का सब भाग य अक्ष के ऊपर है । यदि वक्र का कुछ भाग य अक्ष के नीचे भी हो तो सहज में दिखला सक्ते हो कि $२\pi क\times$ आ यह य अक्ष के नीचे और ऊपर के घनक्षेत्र विभागों के घन फलों का अन्तर होगा ।

जैसे १४८ प्रक्रम में जो $(य-च)^2+(र-ज)^2-ग^2=0$ इस वृत्त के य अक्ष के चारो ओर घूमने से गोलीय मुद्रिका होगी उस का घनफल ऊपर की युक्ति से $२\pi^2ग^2ज$ यह होगा जहां ग वृत्त का व्यासार्द्ध और ज; य अक्ष से वृत्त के केन्द्र का लम्बरूपी अन्तर है ।

१६३ । इसी तरह यदि दोनों वक्र जिन के समीकरण क्रम से
$य=फ(र)$, $य=फा(र)$

ये हैं र अक्ष के चारो ओर घूमकर घनक्षेत्र बनावें तो ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से घन फलान्तर=घ= $\pi \int [\{फ(र)\}^2 - \{फा(र)\}^2]$ तार यह होगा ।

फिर इस पर से पूर्ववत् विचार कर सक्ते हो ।

१६४ । १५६वें प्रक्रम में घनफल के लिये जो युक्ति लिखी गई है उसी युक्ति से चाहे जैसा घनक्षेत्र हो सब का घनफल जान सक्ते हैं ।

जैसे किसी घनक्षेत्र को य अक्ष पर लम्ब जो धरातल है उस से काटें और कटे क्षेत्र का फल फ(य) कल्पना करें तो स्पष्ट है कि इस लम्बरूपी धरातल के बहुत ही पास जो दूसरा लम्बरूप धरातल है उस से भी जो कट कर दोनों धरातलों के बीच में घनक्षेत्र का घनफल $\triangle$ घ है वह फ(य) $\triangle$ य के समान होगा इस लिये

$\frac{\triangle घ}{\triangle य}$ =फ(य) $\triangle$ य को शून्य अर्थात् ताय मानने से

$\frac{ताघ}{ताय}$ =फ(य) $\therefore$ घ= $\int$फ(य) ताय ऐसा होगा ।

१६५ । दैर्घवृत्तीय घनक्षेत्र जिसके पृष्ठ का समीकरण

$\frac{य^2}{अ^2} + \frac{र^2}{क^2} + \frac{ल^2}{ग^2} = १$ यह है उसका घन फलानयन ।

यहां यदि घनक्षेत्र को य अक्ष पर लम्ब धरातल से काटो जो कि मूल विन्दु से य तुल्य हट कर य अक्ष में लगा है तो घनक्षेत्र के लक्षण से कटा हुआ प्रदेश एक दीर्घवृत्त होगा जिसके दोनों व्यासार्द्ध क्रम से

$क\sqrt{\left(१-\frac{य^2}{अ^2}\right)}$, $ग\sqrt{\left(१-\frac{य^2}{२}\right)}$ ये हैं इस लिये छेदित प्रदेश का

फल=फ(य)= π क ग$(१ - \frac{य}{अ^2})$ यह हुआ और अभीष्ट क्षेत्र का संपूर्ण घनफल

$= \int_{-अ}^{अ} \left(१-\frac{य^2}{अ^2}\right) \pi$ क ग ताय$= \frac{४ \quad अ क ग}{३}$

१६६। किसी सूची क्षेत्र का घन फलानयन।

कल्पना करो कि सूची का आधार कोई बहुभुजक्षेत्र है जिस का फल आ है और सूची का वेध वा उंचाई वे है तो यदि भुज, कोटि शङ्कुओं का मूल विन्दु सूची का शिरःस्थान मानें और य अक्ष को सूची के आधार पर लम्ब रूप मानें तो १६४ प्रक्रम की युक्ति से सूची का घनफल $\int_0^{वे}$ फ(य) ताय यह होगा। अब यदि य अक्ष पर लम्बरूपी धरातल से सूची को काटें तो स्पष्ट है कि छेदित प्रदेश आधार का सजातीय होगा इस लिये इस प्रदेश का फल=फ(य)=$\frac{य^2 आ}{वे^2}$ इस लिये सूची का घनफल

$$=\int_0^{वे} फ(य) ताय=\int_0^{वे} \frac{य^2 आ}{वे^2} ताय=\frac{आ}{वे^2}\int_0^{वे} य^2\, ताय=\frac{आ\cdot वे}{3}$$

बहुभुज क्षेत्र रूपी आधार के स्थान मे यदि कोई सीमित क्षेत्र हो तब भी यही घनफल आवेगा। इस पर से यह सिद्ध होता है कि आधार पर वेध तुल्य वेध में जो समखात का घनफल होता है उसके तृतीयांश के तुल्य सूची का घनफल होता है। इसको भी भास्कराचार्य ने अपनी लीलावती के खातव्यवहार में लिखा है (समखातफलत्र्यंशःसूचीखाते फलं भवति) परन्तु इसकी उपपत्ति कहीं नहीं लिखी है।

१६७। कल्पना करो कि $\frac{य^2}{अ^2}-\frac{र^2}{क^2}-\frac{ल^2}{ग^2}=1$ यह एक आति परवलयिक घनक्षेत्र का समीकरण और $\frac{य^2}{अ^2}-\frac{र^2}{क^2}-\frac{ल^2}{ग^2}=0$ यह एक समसूच्याकार शङ्कु का समीकरण है तो पहले घनक्षेत्र को य अक्ष पर लम्ब और मूल विन्दु से य तुल्य हट कर य अक्ष में लगा हुआ जो धरातल है उस से काटें तो छेदित प्रदेश एक दीर्घवृत्त होगा जिस का फल फ(य)

$= \pi$ क ग $\left(\frac{य^2}{अ^2}+1\right)$ यह होगा और उसी धरातल से शङ्कु का छेदित प्रदेश भी दीर्घवृत्तही होगा जिसका फल=फा(य) $=\frac{\pi \text{ क ग य}^2}{\text{अ}^2}$ इस लिये दोनों का अन्तर π क ग यह हुआ। इस लिये शङ्कु, अतिपरवलयिक और दो लम्ब रूपी धरातल जो मूल बिन्दु से क्रम से $य_1$, $य_2$ तुल्य हट कर य अक्ष में लगे हैं उनके भीतर का घनफल$=\int_{य_1}^{य_2} \pi$ क ग ताय

$= \pi$ क ग $(य_2 - य_1)$

१६८। जिन समानान्तर धरातलों से घनक्षेत्र को काटकर ऊपर के प्रक्रमों में घनफल साधन की युक्ति दिखाई है वे यदि **य** अक्ष पर लम्ब न हों किन्तु य अक्ष उन से $अ_1$तुल्य झुका हो तो स्पष्ट है कि $\int$फ(य)ताय इस के स्थान में $\int$फ(य)ज्या $अ_1$ताय इस को लेने से घनफल का मान आ जायगा

१६९। १६४वें प्रक्रम से सिद्ध है कि घ$=\int$फ (य) ताय इस लिये फ(य) को कल्पना कर लें कि किसी वक्र की कोटि र है तो १३८वें प्रक्रम की युक्ति से तीन समानान्तर वा चार समानान्तर धरातलों से जिन का परस्पर अन्तर=च है छेदित प्रदेश के फलों से आद्यन्त धरातलान्तर्गत घन फल का स्वल्पान्तरसे मान $\frac{च}{3}$ $(आ_0+4\ आ_1+आ_2)$ वा $\frac{3\ च}{8}\{आ_0+आ_3+3\ (आ_1+आ_2)\}$ यह होगा जहां $र_0$, $र_1$, इत्यादि के स्थान में $आ_0$, $आ_1$ इत्यादि को रख दिया है।

१७०। १५६वें प्रक्रम से सिद्ध है कि घ$=\int \pi र^2$ ताय परन्तु

$\pi र^2=\int 2 \pi$ र तार इस लिये द्विगुण चलानयन की रीति से घनफल को $\int\int 2 \pi$ र तार ताय$=2 \pi \int\int$र तार ताय इस से प्रकाश कर सक्ते हैं। ११४ वें प्रक्रम के क्षेत्र को यदि य अक्ष के चारो ओर घुमावें तो दट चतुर्भुज से एक वलय उत्पन्न होगा जिसका घनफल स्वल्पान्तर से

$२\pi र \triangle य \triangle र$ यह होगा और एक स्तम्भ में जितने चतुर्भुज हैं सब से उत्पन्न वलयों के घनफल का योग $\triangle य \int_{फ(य)}^{फा(य)} २\pi र\, तार$ अर्थात्

$$\triangle य \times २\pi \int_{फ(य)}^{फा(य)} र\, तार = \pi \triangle य \left[\{फा(य)\}^२ - फ(य)\}^२ \right]$$ यह होगा

इस लिये कातो कत के घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उस का घनफल

$$= \pi \int_{अगा}^{अचा_१} \left[\{फा(य)\}^२ - \{फा(य)\}^२ \right] ताय$$

$$= \int_{य_१}^{य_२} \int_{फ(य)}^{फा(य)} २\pi र\, तार\, ताय$$

$$= २\pi \int_{य_१}^{य_२} \int_{फ(य)}^{फा(य)} र\, तार\, ताय$$ यदि अचा$=य_२$, अगा$=य_१$

ऊपर के $\pi \int_{अगा}^{अचा_१} \left[\{फा(य)\}^२ - \{फ(य)\}^२ \right] ताय$ इस समीकरण में यदि फा(य) के स्थान में फ (य) और फ (य) के स्थान में फा(य) को रख दें तो ठीक १६३वें प्रक्रम का समीकरण हो जायगा।

१७१। यदि जिन वक्रों के क्रम से य=फ(र), य=फा(र) ये समीकरण हैं उन के चाप से और जिन रेखाओं के क्रम से $र=र_१$, $र=र_२$ ये समीकरण हैं उन से बना हुआ क्षेत्र य अक्ष के चारो ओर घूम कर घनक्षेत्र बनावे तो ऊपर की युक्ति से उसका घनफल$=२\pi \int_{र_१}^{र_२} \int_{फा(र)}^{फ(र)} र\, ताय\, तार$ ऐसा होगा इस का ताय के वश यदि चलबना लो तो

$$घ = २\pi \int_{र_२}^{र_१} \{फ(र) - फा(र)\}\, र\, तार$$

१७२। ऊपर के प्रक्रमों की व्याप्ति दिखलाने के लिये ११६वें प्रक्रम का क्षेत्र लो। कल्पना करो कि अलक वक्र क्षेत्र य अक्ष के चारो ओर घूम कर जो घन क्षेत्र बनाया उसका घनफल जानना है तो स्पष्ट है कि कनल के घूमने से जो अर्द्धगोल होगा और अनल के घूमने से जो परवलय सम्बन्धि घनक्षेत्र होगा उनके घनफलों के अन्तर के समान

अभीष्ट घनफल होगा । इन दोनों घनक्षेत्रों का घनफल पिछले प्रक्रमों से विदित है इसलिये अभीष्ट घनक्षेत्र का घनफल भी इन दोनों के अन्तर पर से विदित होगा इसलिये द्विगुण चलानयन से जो इसका घनफल निकलेगा उसकी जांच अच्छी तरह से इस उदाहरण में होगी अर्थात् दोनों रीति से फलों का मान एक हो जाने से मन भर जायगा मानो कि न मूल विन्दु और नक य अक्ष में धनात्मक मार्ग है तो कल वक्र का समीकरण $र^2=४ अ (अ-य)$ और कल का $र^2=४ अ^2-य^2$ यह होगा ।

इस लिये ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से अभीष्ट घनफल

$$=\int_0^{२अ}\int_{\frac{४अ^2-र^2}{४अ}}^{\sqrt{(४अ^2-र^2)}} २\pi र\, ताय\, तार$$

इसी जगह यदि यह इच्छा होकि पहले र के वश से चलानयन करें तो अलक का अफ रेखा से दो विभाग करने से

घ=वृत्त खण्ड का घ· फ+परवलय के खण्ड का घ· फ

$$=\int_{अ}^{२अ}\int_0^{\sqrt{(४अ^2-य^2)}} २\pi र\, तार\, ताय$$

$$+\int_0^{अ}\int_{\sqrt{(४अ^2-४अय)}}^{\sqrt{(४अ^2-य^2)}} २\pi र\, तार\, ताय$$

इसी जगह यदि य अक्ष के चारो ओर घलग के घूमने से जो घनक्षेत्र बने उसका घनफल अपेक्षित हो तो मान लो कि य अक्ष की धनात्मक दिशा नघ की ओर है तब न को मूल विन्दु मानने से लग का समीकरण $र^2=४ अ (अ+य)$ और लघ का $र^2=४ अ^2-य^2$ यह होगा

इस लिये अपेक्षित घनफल$=\int_0^{२अ}\int_{\sqrt{(४अ^2-य^2)}}^{\sqrt{(४अ^2+४अय)}} २\pi र\, तार\, ताय$

इसी स्थान में यदि पहले य के वश से चल अपेक्षित हो तो $लल_1$ रेखा से अभीष्ट क्षेत्र का दो विभाग कर देने से

$$घ = \text{वृत्तखण्ड का घ फ} + \text{घरवलयखण्ड का घ फ}$$

$$= \int_{0}^{२अ} \int_{\sqrt{(४अ^{२}-र^{२})}}^{२अ} २\pi र \text{ ताय तार}$$

$$+ \int_{\frac{र^{२}-४अ^{२}}{४अ}}^{२अ\sqrt{३}} २\pi र \text{ ताय तार}$$

१०३। यदि क्षेत्र र अक्ष के चारों ओर घूमने से घनक्षेत्र बनावे तो य, र को परस्पर बदल देने से ऊपर की युक्ति से सहज में सिद्ध हो जायगा कि घ= $\int\int$ २π य ताय तार।

१०४। किसी घनक्षेत्र के पृष्ठ में एक प बिन्दु और इस बिन्दु के बहुत ही पास दूसरी व बिन्दु लेकर दोनों बिन्दुओं में लगा कर यल, रल धरातलों के समानान्तर दो दो धरातलों को बनावो तो घनक्षेत्र के भीतर एक आयत आधार के ऊपर समखात बन जायगा जिस के आधार का भुज △य, कोटि △र और वेध, ल होगा इस लिये समखात का घनफल=ल △ य △ र।△ य, △ र को बहुत छोटा मानने से समखात का घनफल =ल तार ताय, इस लिये समग्र घनफल= $\int\int$ ल तार ताय इस में पहले यदि $\int$ ल तार इस का मान निकालो तो स्पष्ट है कि यह य अक्ष पर लम्ब जो धरातल है उस से छेदित प्रदेश का फल होगा इसे यदि फ(य) के बराबर मान लो तो समग्र घनफल= $\int$ फ(य) ताय यही १६४वें प्रक्रम से भी सिद्ध हुआ है।

इसी में यदि पहले $\int$ ल ताय इस का मान निकालो तो यह र अक्ष पर लम्ब रूप धरातल जो होगा उस से छेदित प्रदेश का फल होगा इस लिये इस को यदि फ(र) कहो तो ऊपर की युक्ति से समग्र घनफल= $\int$ फ(र) तार। सर्वत्र सीमाओं का विचार कर घनफल निकालना चाहिये।

१०५ । दैर्घवृत्तीय घनक्षेत्र का अष्टमांश घनफल (जिस के पृष्ठ का समीकरण $\frac{य^2}{अ^2}+\frac{र^2}{क^2}+\frac{ल^2}{ग^2}=१$ यह है) जानना हो तो यहां

$$ल=ग\sqrt{\left(१-\frac{य^2}{अ^2}-\frac{र^2}{क^2}\right)}$$

इस लिये $घ=ग\int\int\sqrt{\left(१-\frac{य^2}{अ^2}-\frac{र^2}{क^2}\right)}\,तार\,ताय$

यहां पहले $\int\sqrt{\left(१-\frac{य^2}{अ^2}-\frac{र^2}{क^2}\right)}\,तार=क\int\sqrt{\left(१-\frac{य^2}{अ^2}-\frac{र^2}{क^2}\right)}\frac{तार}{क}$

$$=क\left\{\frac{र}{२क}\sqrt{\left(१-\frac{य^2}{अ^2}-\frac{र^2}{क^2}\right)}+\frac{\left(१-\frac{य^2}{अ^2}\right)}{२}ज्या^{-१}\frac{र}{क\sqrt{\left(१-\frac{य^2}{अ^2}\right)}}\right\}$$

इस में र=० और $र=क\sqrt{१-\frac{य^2}{अ^2}}$ के भीतर का चल

$=\frac{\pi क}{४}\left(१-\frac{य^2}{अ^2}\right)$। इस लिये $घ=\int\frac{\pi क ग}{४}\left(१-\frac{य^2}{अ^2}\right)ताय$

$=\frac{\pi क ग}{४}\left(य-\frac{य^3}{३अ^2}\right)$ ० और अ के बीच य के मान में समग्र का $\frac{१}{८}$ घन-

फल$=\frac{\pi कग}{४}\left(अ-\frac{अ^3}{३अ^2}\right)=\frac{\pi क ग}{४}\cdot\frac{२अ}{३}=\frac{\pi अकग}{६}$ इस को ८ से गुण देने से सम्पूर्ण घनफल$=\frac{४\pi अकग}{३}$ । यही १६५वें प्रक्रम में भी सिद्ध हुआ है।

१०६ । जिसके पृष्ठ का समीकरण य र=अल है उस से यर धरा-तल से और जिन चारो धरातलों का क्रम से $य=य_१$, $य=य_२$, $र=र_१$, $र=र_२$ ये समीकरण हैं उन से बने हुये घनक्षेत्र का घनफल जानना है।

यहां १०४वें प्रक्रम की युक्ति से

$$घ=\int_{य_1}^{य_2}\int_{र_1}^{र_2}\frac{यर}{अ}\text{ तार ताय}=\frac{1}{2अ}\int_{य_1}^{य_2}(र_2^2-र_1^2)य\text{ ताय}$$

$$=\frac{1}{4अ}(र_2^2-र_1^2)(य_2^2-य_1^2)$$

$$=\frac{1}{4अ}(य_2-य_1)(र_2-र_1)\{य_1र_1+य_2र_2+य_1र_2+य_2र_1\}$$

$$=\frac{1}{4}(य_2-य_1)(र_2-र_1)(ल_1+ल_2+ल_3+ल_4)$$

जहां $ल_1$, $ल_2$, $ल_3$, $ल_4$ ये चारों कोनों के क्रम से शङ्कु हैं

यहां पर यह मान लिया गया है कि सीमाओं के भीतर सर्वत्र यर धन है।

१०७। जिस धरातल का समीकरण $ल=0$, वृत्त का $(य-च)^2+(र-ज)^2=ग^2$ और घन के पृष्ठ का $यर=अल$ यह है उन से बने घनक्षेत्र का घनफल जानना है।

यहां वृत्त के समीकरण से र की सीमा $ज-\sqrt{\{ग^2-(य-च)^2\}}$ और $ज+\sqrt{\{ग^2-(य-च)^2\}}$ ये होंगी इस लिये १०४वें प्रक्रम की युक्ति से

$$घ=\int\int\frac{यर}{अ}\text{तार ताय}=\frac{1}{अ}\int\int\text{यर तार ताय}$$

$$=\frac{2ज}{अ}\int य\sqrt{\{ग^2-(य-च)^2\}}\text{ ताय}$$

जहां य की सीमा $च-ग$, $च+ग$, ये हैं

और $\frac{2ज}{अ}\int य\sqrt{\{ग^2-(य-च)^2\}}\text{ ताय}=\int(य-च)\sqrt{\{ग^2-(य-च)^2\}}\text{ ताय}$ $+च\int\sqrt{\{ग^2-(य-च)^2\}}\text{ ताय}$ यदि $य-च=त$ तो ऊपर का घनफल

$$=\frac{2ज}{अ}\int त\sqrt{\{ग^2-त^2\}}\text{ तात}+च\int\sqrt{\{ग^2-त^2\}}\text{ तात}$$

यहां त की सीमा $-ग, +ग$ हैं इस लिये सीमाओं के भीतर ऊपर के चल का मान निकालने से अभीष्ट घनफल$=\dfrac{ज\,च\cdot ग^2\pi}{अ}$,

यहां भी यह मान लिया गया है कि सीमाओं के भीतर यर धन है अर्थात् $(य-च)^2+(र-ज)^2=ग^2$ इस वृत्त का सब भाग प्रथम वा तृतीय पद में है ऐसा समझ कर तब ऊपर का घनफल निकाला गया है।

१९८। यदि घनक्षेत्र को ऐसे धरातलों से काटें जिस में शङ्कु मूल के अनीय समीकरण के वश श्रुताश्रुताप यह आधार का फल हो तो समखात का फल लश्रुताश्रुताप यह होगा इस लिये घ $=\int$ लश्रुताश्रुताप। यहां श्रु$^2=$य$^2+$र^2

जैसे जिस धरातल का ल$=0$, और दो पृष्ठों का य$^2+$र$^2=४$ अ ल, र$^2=२$ गय$-$य^2 ये समीकरण हैं उन से बने घनक्षेत्र का फल जानना है तो यहां $\frac{\text{श्रु}^2}{४\text{अ}}=$ल और श्रु, प की ऐसी सीमा होगी जिस में चल का फैलाव र$^2=२$ ग य$-$य^2 इस वृत्त के सम्पूर्ण फल तक हो तो यहां श्रु$_१=२$ ग कोज्याप ऐसा मानने से अभीष्ट घनफल

$$=\int_{-\frac{\pi}{२}}^{\frac{\pi}{२}}\int_{0}^{\text{श्रु}_१}\frac{\text{श्रु}^3}{४\text{अ}}\text{ताश्रु ताप}=\frac{\text{ग}^४}{\text{अ}}\int_{-\frac{\pi}{२}}^{\frac{\pi}{२}}\text{कोज्या}^४\text{पताप}$$

$$=\frac{२\,\text{ग}^४}{\text{अ}}\times\frac{३}{४}\times\frac{१}{२}\times\frac{\pi}{२}=\frac{३\pi\,\text{ग}^४}{८\,\text{अ}}(\text{खण्डचलानयन से})$$

१९९। जिस पृष्ठ का ल$=$अ इ$^{-\frac{\text{य}^2+\text{र}^2}{\text{ग}^2}}=$अइ$^{-\frac{\text{श्रु}^2}{\text{ग}^2}}$ यह समीकरण है उस से और यर तल से बने घनक्षेत्र का घनफल जानना हो तो यहां पृष्ठ के समीकरण से स्पष्ट है कि मूल बिन्दु से चारो ओर अनन्त दूर तक पृष्ठ फैला हुआ है इस लिये य की सीमा ०, और २π होगी और श्रु की ०, और ∞ होगी इस लिये घ$=\int\int$अ इ$^{-\frac{\text{श्रु}^2}{\text{ग}^2}}$श्रुताश्रुताप

इस में $\int$ इ$^{-\frac{\text{श्रु}^2}{\text{ग}^2}}$श्रुताश्रु इस का मान $=-\frac{\text{इ}^{-\frac{\text{श्रु}^2}{\text{ग}^2}}}{२}$ग^2 यह होगा।

इस लिये $\int_0^\infty$ इ$^{-\frac{\text{श्रु}^2}{\text{ग}^2}}$ श्रुताश्रु $=\frac{\text{ग}^2}{२}$ और तब अभीष्ट घनफल का प्रमाण

$$=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty}\int \text{अइ}^{-\frac{\text{श्रु}^2}{\text{ग}^2}}\,\text{श्रुताश्रुताए}=\text{अ}\int_{0}^{2\pi}\frac{\text{ग}^2}{2}\,\text{ताए}=\frac{2\pi\text{अग}^2}{2}=\pi\ \text{अग}^2$$

१८० । १७४वें प्रक्रम में जो समखात का फल लतायतार यह निकाला है इसका ल अक्ष पर लम्ब जो धरातल हैं उन से अनन्त विभाग कर डालें तो एक विभाग वा समखात घनफल की तात्कालिकी गति =ताल तार ताय यह होगी इस लिये घनक्षेत्र के घनफल का मान त्रिगुण चलानयन की रीति से $\int\int\int$ताल तार ताय यह होगा ।

१८१ । जिस नलक का $\text{य}^2+\text{र}^2-2\,\text{अ}\,\text{य}=0$ यह समीकरण है उसके यदि उस खण्ड का घनफल जानना चाहते हो जो कि $\text{ल}=\text{य स्पअ}_1$, $\text{ल}=\text{यस्पक}_1$ इन धरातलों से नलक के कटने से उत्पन्न हुआ है तो यहां नलक के समीकरण से $\text{र}^2=2\,\text{अ}\,\text{य}-\text{य}^2=\text{र}_1^2 \therefore \text{र}_1=\sqrt{(2\,\text{अ}\,\text{य}-\text{य}^2)}$

अब १८० प्रक्रम की युक्ति से $\text{घ}=\int_{0}^{2\text{अ}}\int_{-\text{र}_1}^{\text{र}_1}\int_{\text{य स्प अ}_1}^{\text{य स्प क}_1}\text{तालतारताय}$

$$=\int_{0}^{2\text{अ}}\int_{-\text{र}_1}^{\text{र}_1}(\text{यस्पक}_1-\text{यस्पअ}_1)\,\text{तारताय}$$

$$=\int_{0}^{2\text{अ}}(\text{स्पक}_1-\text{स्पअ}_1)\,2\text{य}\sqrt{(2\text{अय}-\text{य}^2)}\,\text{ताय}$$

$$=2\,(\text{स्पक}_1-\text{स्पअ}_1)\frac{\pi\ \text{अ}^2}{2}\ ।$$

१८२ । १८८वें प्रक्रम में समखात का आधार जिसका फल, श्रुताश्रुताप यह है उसे मान लो कि यर के धरातल में है अब इस आधार को स्थिररेखा अर्थात् य अक्ष के चारो ओर घुमाओ तो स्पष्ट है कि इस आधार के घूमने से एक घनवलय होगा जिसका घनफल=२ πर श्रुताश्रुताप = २π श्रुज्याप श्रुताश्रुताप यह होगा और पूरा फेरा करने में आधार का धरातल यर धरातल से २π कोण उत्पन्न करेगा इस लिये बहुत पास पास के दो स्थानों में आधार के धरातल के कोने में यर धरातल से उत्पन्न कोण का मान क्रम से प_1, $\text{प}_1+\text{ताप}_1$ मानो तो

घनवलय के घनफल का परमाल्प विभाग वा तात्कालिकी गति =ताप$_1$ अुज्यापअुताअुताप = अु^{2}ज्यापताअुतापताप$_1$ इस लिये उचित सोमाओं के वश से सम्पूर्ण घनक्षेत्र का घनफल

$$\text{घ} = \iiint \text{अु}^2\text{ज्यापताअुतापताप}_1$$

जैसे जिस गोल का व्यासार्द्ध अ है उसके अष्टमांश का घनफल जानना है तो पहले $\int \text{अु}^2 \text{ ताअु} = \frac{\text{अु}^3}{\text{३}}$ इस में ०, और अ के बीच अु के मान में चल= $\frac{\text{अ}^3}{\text{३}}$

$$\text{तब} \quad \text{घ} = \iint \frac{\text{अ}^3}{\text{३}} \text{ज्यापतापताप}_1$$

इस तरह से पहले र के वश चल ले आने से अु^{2}ज्याप अु प प$_1$ इन सब अवयवों का योग जो कि एक सूची के (जिसके आधार का फल=अ^{2}ज्याप प प$_1$ और वे=अ) समान है आया ।

फिर प के वश चल ज्ञान करने से

$$\int \text{ज्याप ताप} = -\text{कोज्याप},$$

यहां प की सीमा ० और $\frac{\pi}{\text{२}}$ मानने से

$$\text{घ} = \int \frac{\text{अ}^3}{\text{३}} \text{ताप}_1$$

इस तरह यहां प के वश चलानयन से $\frac{\text{अ}^3}{\text{३}}$ज्याप $\triangle$प $\triangle$प$_1$ इस चाल को प$_1$ और प$_1$+ प$_1$ के भीतर जितनी सूचियां हैं उनका योग आया।

फिर सब के पीछे प$_1$ के वश से चल ज्ञान करने से और प$_1$ की सीमा ० और $\frac{\pi}{\text{२}}$ मानने से गोल के अष्टमांश घनफल का मान=घ= $\frac{\pi\text{अ}^3}{\text{६}}$

१८३ । एक सम सूच्याकार शङ्कु का शिरःस्थान एक गोल के पृष्ठ पर है और शिरःस्थान से गोलगर्भ तक जो रेखा गई है वही शङ्कु का अक्ष है ।

गोल का व्यासार्द्ध अ और शङ्कु का शिर:कोणार्द्ध $अ_1$ है तो शङ्कु के आधार के गोल के पृष्ठ में लगने से शङ्कु पृष्ठ और गोल पृष्ठ के भीतर जो घनक्षेत्र होगा उसका घनफल जानना हो तो शङ्कु के शिर:स्थान को मूलबिन्दु मानने से गोलपृष्ठ का ध्रुवीय समीकरण

$श्रु = २ अ कोज्याप$ यह होगा। इस लिये अभीष्ट

$$घनफल = \int_0^{२\pi} \int_0^{अ_1} \int_0^{२ अ कोज्याप} श्रु^२ ज्याप ताश्रु ताप ताप_1$$

१८४। इसी प्रकार $श्रु = अ(१+कोज्याप)$ इस वक्र के स्थिर रेखा के चारो ओर घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उसका घनफल।

$$घ = \int_0^{२\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{अ(१+कोज्याप)} श्रु^२ ज्याप ताश्रु ताप ताप_1$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{२\pi} \int_0^{अ(१+कोज्याप)} श्रु^२ ज्याप ताश्रु ताप_1 ताप$$ (६३वें प्रक्रम से)

$$= \frac{२\pi\, अ^३}{३} \int_0^{\pi} (१+कोज्याप)^३ ज्याप ताप$$ इसका मान १२वें प्रक्रम के १५वें उदाहरण से वा खण्डचलनानयन से $\frac{\pi\, ८\, अ^३}{३}$ यह होगा।

१८५। जिन दो घनक्षेत्रों के पृष्ठ का समीकरण (१) $फ\left(\frac{य}{अ}, \frac{र}{क}, \frac{ल}{ग}\right)=0$

(२) $फ(य, र, ल)=0$ ये हों तो यदि

$\frac{य}{अ} = य', \frac{र}{क} = र', \frac{ल}{ग} = ल'$ तो

$$लतायतार = अकग\, ल' ताय' तार'$$

इस लिये १०४ वें प्रक्रम से

(१) का $घ = \int\int लतायतार = \int\int अकगल' ताय' तार' = अकग \times$ (२) का घ।

जैसे दैर्घवृत्तीय घनक्षेत्र के पृष्ठ का समीकरण $\frac{अ^२ य^२}{अ^२} + \frac{अ^२ र^२}{क^२} + \frac{अ^२ ल^२}{ग^२} - अ^२ = 0$

और गोल का $य^2+र^2+ल^2-अ^2=0$ यह है इस लिये
दैर्घवृत्तीयघनक्षेत्र का घनफल$=\frac{अकग\times}{अअअ}$ गोल का घनफल

$$=\frac{४\pi अ^3\times अकग}{३\times अ^3}=\frac{४\pi अकग}{३}$$ यही १६५वें प्रक्रम में भी सिद्ध हुआ है।

इस प्रकार से ऊपर कहे हुये सिद्धान्तों से सैकड़ों नये सिद्धान्त उत्पन्न होते हैं जिन के बल से बड़े बड़े कठिन प्रश्नों का उत्तर सहज में निकल सक्ता है। विद्यार्थियों को चाहिये कि जिस प्रश्न में जिस सिद्धान्त से सहज में उत्तर निकलने की आशा पाई जाय उसका उत्तर बड़ी सावधानी से उसी सिद्धान्त से निकालें। उत्तर निकालने में सीमाओं का विचार बड़ी सावधानी से करना चाहिये क्योंकि सीमा ही से तो क्षेत्र बंधा है और जब सीमा ही बिगड़ गई तो क्षेत्र ही दूसरा हो गया इस लिये जिस का फल अपेक्षित है उसका फल सीमाओं के बिगड़ जाने से कथमपि न निकलेगा। जहां कहीं सीमाओं में संशय जान पड़े वहां वक्र क्षेत्र की आकृति बनाकर सीमाओं का ज्ञान कर लो।

अभ्यास के लिये प्रश्न।

१। जिस वक्र का $यर=अ^2$ यह समीकरण है उसके चाप के य अक्ष के चारो ओर घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उसका क्या पृष्ठफल होगा।

२। $र=\frac{क}{अ}इ^{\frac{य}{ग}}$ यह वक्र य अक्ष के चारो ओर घूमकर जो घनक्षेत्र बनाता है उसका पृष्ठफल क्या होगा।

३। चक्रालद यदि शिरःस्थानगतस्पर्शरेखा के चारो ओर घूमकर घनक्षेत्र बनावे तो उसका सम्पूर्ण पृष्ठफल क्या होगा।

उ० $\frac{३२\pi क^2}{३}$

४। यदि चक्रालद अपने आधार के चारो ओर घूमकर घनक्षेत्र बनावे तो उसका सम्पूर्ण पृष्ठफल क्या होगा। उ० $\frac{६४\pi क^2}{३}$

५। त्रोतर (Tractory) य अक्ष के चारो ओर घूमकर जो घनक्षेत्र बनाता है उसका सम्पूर्ण पृष्ठफल बतावो (६१वां प्रक्रम देखो) उ० $४\pi ग^2$

६ । एक गोल को दो तुल्य समतलपरिधि रूप शङ्कु से (जो कि गर्भक्षितिज पर लम्ब हैं और जिन के आधार वृत्त का व्यास गोल के व्यासार्द्ध तुल्य हैं और जिन के अक्ष गोल के उन व्यासार्द्धों का सम द्विभाग करते हैं जिनके योग से गर्भक्षितिज का व्यास बनता है) आर पार छेद डाला तो अवशिष्ट गोल के भाग का पृष्ठफल क्या होगा ।

उ० अवशिष्ट भाग का पृष्ठफल गोलव्यास के वर्ग का दूना होगा (१५२ प्रक्रम का (१) उदाहरण देखो । सीमा का विचार अच्छी तरह से करलो)

७ । जिस वक्र का $र = अ \pm अ\ ला\ \frac{य}{अ}$ यह समीकरण है वह यदि य अक्ष के चारो ओर घूमकर घनक्षेत्र बनावे तो य=अ, य=अक इस के भीतर के खण्ड का क्या पृष्ठफल होगा ।

$$उ०\quad ४\pi अ^२ \left\{ \sqrt{(१+क^२)} - \sqrt{२} + ला\ \frac{क\ (१+\sqrt{२})}{१+\sqrt{(१+क^२)}} \right\}$$

८ । जिस वक्र के समीकरण पर से $र^२$ तो $य = -(अ^२-र^२)^{\frac{१}{२}}$ र ता र ऐसा सिद्ध हो य अक्ष के चारो ओर उसके घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उस का सम्पूर्ण पृष्ठफल क्या होगा । उ० $२\pi अ^२$ ।

९ । एक गोल को एक समतलमस्तकपरिधि रूप शङ्कु से छेद डाला तो छेदित प्रदेश का क्या पृष्ठफल होगा । इस प्रश्न में इतना जानते हैं कि गोल की परिधि से शङ्कु की आधार परिधि आधी है और शङ्कु का एक पृष्ठसूच गोलगर्भ में होकर जाता है ।

उत्तर, यदि गोल का व्यासार्द्ध=अ तो अभीष्ट पृष्ठफल=$२\pi अ^२ - ४अ^२$ ।

१० । एक गोल जिसका व्यासार्द्ध १५ हाथ है उन दो समानान्तर धरातलों से काटा गया केन्द्र से जिनका अन्तर क्रम से ३, ७ हाथ हैं तो धरातलों के बीच में जो गोलखण्ड है उसका पृष्ठफल क्या होगा ।

उ० ३०६·६६०८ वर्ग हस्त ।

११ । पृथ्वी के पृष्ठ से कितनी ऊंचाई पर पृथ्वी के पृष्ठ भाग की तिहाई देख पड़ेगी उ० पृथ्वी के व्यास के समान ऊंचाई पर ।

१२ । एक समसूच्याकार शङ्कु के भीतर एक गोल बना हुआ है गोल का व्यासार्द्ध चि और गोल के केन्द्र और शङ्क्वग्र का अन्तर (अ) है तो शङ्कु और गोल के पृष्ठफलों में क्या सम्बन्ध होगा । उ० $स = \frac{अ^2 - चि^2}{४अ चि}$

१३ । अ, क गोल के व्यासार्द्ध क्रम से ३ और ४ हाथ हैं इन के पृष्ठफल के योग के समान ग गोल का पृष्ठफल है तो बतावो कि ग गोल का क्या व्यासार्द्ध होगा । उ० ५ हाथ

१४ । यदि एक त्रिभुज जो कि य अक्ष के एकही ओर है य अक्ष के चारो ओर घूमने से घनक्षेत्र बनावे तो उसका पृष्ठफल कैसे निकालोगे । हर एक भुज को बढ़ाकर य अक्ष से मिला दो तो त्रिभुज के घूमने से वर्द्धित भुज भी घूमकर समसूची बनावेंगे फिर इन सूचियों के पृष्ठ सूची की सीमा तीनों भुज क्रम से कल्पना कर सूची खण्ड के पृष्ठफलों के योग से अभीष्ट पृष्ठफल जानलो ।

१५ । दो समानान्तर धरातलों के काटने से एक गोल खण्ड ऐसा उत्पन्न हुआ कि उसके मुखपरिधि का व्यासार्द्ध (अ) आधार परिधि का व्यासार्द्ध (क) और गोलखण्ड की ऊंचाई (उ) ठीक ठहरी तो उस गोलखण्ड का समग्र पृष्ठफल क्या होगा ।

$$उ० \quad \pi \left\{ २उ \sqrt{अ^2 + \left\{\frac{क^2 - अ^2 + उ^2}{२उ}\right\}^2} + क^2 + अ^2 \right\}$$

१६ । र=अ(क+य) यह वक्र य अक्ष के चारो ओर घूमकर जो घनक्षेत्र बनाता है उसका घनफल सिद्ध करो कि

$$\frac{\pi \; अ^2(क+य)^3}{६} + स्थि \quad यह होगा$$

१७ । य अक्ष के चारो ओर घूमकर यदि $र^2(य - अ क) = अ_1 य(य - गक)$ यह वक्र घनक्षेत्र बनावे तो सिद्ध करो कि

$$घ_२-घ_१=\pi अ_१\left\{\frac{य_२^२-य_१^२}{२}+क(अ-ग)(य_२-य_१)+अक^२(अ-ग)ला\frac{य_२-अक}{य_१-अक}\right\}$$

१८ । य अक्ष के चारो ओर घूमकर यदि $र^२=\frac{अय(य-३अ)}{य-४अ}$ यह अक्ष घनक्षेत्र बनावे तो ० और ३अ, य के मान में क्या घनफल होगा ।

उ० $\frac{\pi अ^२}{२}$ (१५—१६ ला २)

१६ । शिरः स्थानगत स्पर्शरेखा के चारो ओर घूमकर चक्रालद जो घनक्षेत्र बनाता है उसका क्या घनफल होगा उ० $\pi^२ अ^२$ ।

२० । यदि आधार के चारो ओर चक्रालद घूमे तो क्या घनफल होगा ।

उ० $५\pi अ^३$

२१ । अपने असीमपथ के चारो ओर घूमने से जो घनक्षेत्र $र^२=\frac{य^३}{२अ-य}$ यह वक्र बनाता है उसका घनफल क्या होगा । उ० $२\pi^२अ^३$

२२ । अपने असीमपथ के चारो ओर घूमने से जो घनक्षेत्र $र^२=\frac{४ अ^३ (२ अ-य)}{य}$ यह वक्र बनाता है उसका घनफल क्या होगा ।

उ० $४\pi^२अ^३$ ।

२३ । जिस वक्र का $(र-क^२)^२=१६अ^३ य$ यह समीकरण है वह र अक्ष के चारो ओर घूमकर जो घनक्षेत्र बनाता है उस में चारो ओर से घिरा हुआ जो भाग है उस का घनफल क्या होगा । उ॰ $\frac{\pi क^६}{३१५अ^६}$

२४ । जिस गोलखण्ड में मुखव्यासार्द्ध ($र_१$) आधार व्यासार्द्ध ($र_२$) उंचाई (वे) उसका घनफल क्या होगा । उ॰ $\frac{\pi वे}{६}\left\{वे^२+३(र_१^२+र_२^२)\right\}$

२४ । जिस वक्र का $र^२=२ मय+नय^२$ यह समीकरण है वह यदि य अक्ष के चारो ओर घूमकर घनक्षेत्र बनावे तो सिद्ध करो कि

$$घ_२—घ_१= \frac{\pi(य_२—य_१)}{२}\left\{र_२^२+र_१^२—\frac{१}{३}(य_२-य_१)^२\right\}$$

२५ । एक समसूची (जिस का शिर:कोण ६०° है) के भीतर एक गोल है जो कि सूची के आधार और पृष्ठसूचों को स्पर्श करता है । यदि गोल का व्यासार्द्ध (चि) हो तो गोल और सूची से बने घनक्षेत्र का क्या घनफल होगा ।

उ॰ $\frac{\pi\, चि^३}{६}$

२६ । य अक्ष के चारो ओर घूमने से जो घनक्षेत्र $स्रु^४=अ^२(य^२—र^२)$ यह वक्र बनाता है उस का क्या घनफल होगा ।

उ० $\frac{\pi\, अ^३}{२}\left\{\frac{१}{\sqrt{२}} ला\ (१+\sqrt{२})—\frac{१}{३}\right\}$

२७ । जिस वक्र में $स्रु^४=अ^२य^२+क^२र^२$ हैं वह य अक्ष के चारो ओर घूमकर जो घनक्षेत्र बनाता है उस का घनफल निकालो ।
इस में अ $>$ क समझो ।

उ० $\frac{\pi}{६}(२\, अ^२+३\, क^२)अ+\frac{\pi\, क^४}{२\sqrt{(अ^२-क^२)}}\, ला\, \frac{अ+\sqrt{(अ^२—क^२)}}{क}$

२८ । २७ वें प्रश्न में यदि अ=क तो घनक्षेत्र का क्या फल होगा ।

उ० $\frac{४\,\pi\, अ^३}{३}$ ।

२९ । २७ वें प्रश्न का वक्र यदि र अक्ष के चारो ओर घूमे तो घनक्षेत्र का क्या घनफल होगा ।

उ० $\frac{\pi}{६}(२क^२+३अ^२)\, क+\frac{\pi\, अ^४}{२\sqrt{(अ^२-क^२)}}\, ज्या^{-१}\frac{\sqrt{अ^२—क^२}}{अ}$

३० । जिस के पृष्ठ का $\frac{य^२}{अ^२}+\frac{र^२}{क^२}+\frac{ल^४}{ग^४}=१$ यह समीकरण है उसका सम्पूर्ण घनफल क्या होगा ।

उ० $\frac{८\pi अकग}{५}$

३१। जिसके पृष्ठ का $\frac{य^2}{अ^2}+\frac{र^2}{क^2}=$ २ ल यह समीकरण है उसे यदि यर धरातल के समानान्तर धरातल (जिसमें ल=ग) से काटें तो कटे खण्ड का क्या घनफल होगा। उ० π अ क ग^2

३२। जिस के पृष्ठ का $\frac{य^2}{अ^2}+\frac{र^2}{क^2}=\frac{२ल}{ग}-\frac{ल^2}{ग^2}$ यह समीकरण है उसे यदि य र धरातल के समानान्तर धरातल (जिसमें ल=च) से काटें तो कटे खण्ड का क्या घनफल होगा।

उ० π अ क $\left\{\frac{च^2}{ग}-\frac{च^3}{३ग^2}\right\}$

३३। जिसके पृष्ठ का $\left(\frac{य}{अ}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{र}{क}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{ल}{ग}\right)^{\frac{1}{2}}=1$ यह समीकरण है उसका प्रथम पद में जो खण्ड है उसका क्या घनफल होगा। उ०। $\frac{अकग}{९०}$

३४। जिस के पृष्ठ का $\left(\frac{य}{अ}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{र}{क}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{ल}{ग}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ यह समीकरण है उसका सम्पूर्ण घनफल क्या होगा। उ० $\frac{४ अ क ग}{३५}$

३५। जिसके पृष्ठ का $(य^2+र^2+ल^2)^3=$ २७अ^{3}यरल यह समीकरण है उसका सम्पूर्ण घनफल क्या होगा। उ० $\frac{६अ^3}{२}$

(१८२ प्रक्रम देखो और अ का परमाधिक मान समीकरण को अनीय समीकरण में बदल $\frac{३अ}{२\sqrt[3]{२}}$ यह जान लो)

३६। जिस त्रिभुज के तीनों भुज क्रम से अ, क, ग हैं वह यदि ग भुज के चारो ओर घूमकर एक घनक्षेत्र बनावे तो उसका क्या घनफल होगा। यदि स= $\frac{अ+क+ग}{२}$ तो घनफल= $\frac{४\pi}{३}\cdot\frac{स(स-अ)(स-क)(स-ग)}{ग}$

३७। जिसके पृष्ठ का ल^न=अय^2+कर^2 यह समीकरण है उसे यदि यर धरातल के समानान्तर धरातल से काटें (जिस धरातल में ल=ल$_1$) तो कटे खण्ड का क्या घनफल होगा। उ० $\frac{\pi ल_1^{न+1}}{(न+1)\sqrt{अक}}$

३८। जिस वृत्त का व्यासार्द्ध अ है उस में एक पूर्णज्या केन्द्र से ग दूरी पर है इस के ऊपर का चाप इस पूर्णज्या के चारो ओर घूमकर यदि घनक्षेत्र बनावे तो उसका क्या घनफल होगा। चाप को समझो कि परिधि के आधे से छोटा है और कोज्याप$_1=\frac{ग}{अ}$। प$_1$= कोण का चापीयमान।

$$उ० \quad अभीष्ट घनफल=२\pi अ\left\{\frac{(२अ^2+ग^2)ज्याप_1}{३}-गप_1\right\}$$

३९। य अक्ष पर जो पूर्णज्या (ग) लम्ब है उसके चारो ओर घूमकर यदि परवलय का चाप घनक्षेत्र बनावे तो उसका क्या घनफल होगा।

उ० यदि पूर्णज्या के आधे पर जो लम्ब खड़ा हो वह जहां परवलय के चाप में लगे उसका मान पूर्णज्यार्द्ध विन्दु से क मानो तो घनफल$=\frac{८\pi क^2 ग}{१५}$

४०। एक गोल जिसका व्यासार्द्ध (अ) है एक धरातल से जो गोल गर्भ से द दूरी पर है काटा गया है। काटने से जो गोल में एक वृत्त बना उसे आधार मान दो समसूची बनाया जिसके वेध क्रम से, अ+द, अ−द हैं तो दोनों के घनफलों का क्या अन्तर होगा। उ० $\frac{२\pi द}{३}(अ^2-द^2)$

४१। एक परवलय के य अक्ष पर केन्द्र कल्पना कर एक वृत्त बनाया तो यह वृत्त परवलय की एक शाखा में दो जगह जहां पर लगा उनके कोटियों का लम्ब रूपी अन्तर क ठहरा और यह वृत्त य अक्ष को दो जगह जहां काटा वे दोनों विन्दु परवलय के भीतर हैं। अब यदि परवलय और वृत्त दोनों साथही य अक्ष के चारो ओर घूमें तो परवलय और वृत्त के सम्पातान्तर्गत परवलय चाप, और वृत्तचाप के वश से एक घनक्षेत्र होगा। बतावो इसके घनफल का क्या मान होगा। उ० $\frac{\pi क^3}{६}$

४२। जिस गोल का व्यासार्द्ध (अ) है उसे गोल गर्भ से (ग) अन्तर पर जो धरातल है उससे काट डाला। काटने से जो गोलार्द्ध से अल्प खण्ड है उसका क्या घनफल होगा। उ० $\frac{\pi}{३}$ (अ—ग)^{२} (२अ+ग)

४३। परवलय का र^{२}=४अय यह समीकरण है। य अक्ष में केन्द्र कल्पना कर परवलय के विन्दु का भु=३ अ है उसे स्पर्श करते हुये एक वृत्तार्द्ध बनाया जिसके केन्द्र का अन्तर परवलय के शिरःस्थान से (४ अ) दूरी पर भुज की ओर है। यदि परवलय और वृत्तार्द्ध दोनों साथही य अक्ष के चारो ओर घूम कर घनक्षेत्र बनावें तो गोल पृष्ठ और परवलय सम्बन्धी पृष्ठ के भीतर का क्या घनफल होगा। उ० $\frac{१४}{३}$ अ$^{३}\pi$

४४। लघुव्यासाग्र पर जो दीर्घवृत्त में स्पर्शरेखा है दीर्घवृत्त के परिधि का चतुर्थांश उसके चारो ओर घूमकर जो घनक्षेत्र बनाता है उसका क्या घनफल होगा। उ० $\frac{\pi \text{ अ क}^{२}}{६}$ (१०—३π)

(जहां लघुव्यासार्द्ध =क, बृहद्व्यासार्द्ध=अ)

४५। एक गोले के नीचे ऊपर छेद कर उसके भीतर एक चोंगे को रख दिया तो यह चोंगा उसके भीतर चौचक बैठ गया यदि चोंगे की ऊंचाई (ग) हो तो चोंगे के पृष्ठ और गोल के पृष्ठ के भीतर जो घन क्षेत्र होगा उसका क्या घनफल होगा। उ० $\frac{\pi \text{ ग}^{३}}{६}$

४६। किसी घनक्षेत्र में पृष्ठ के प विन्दु का मूल विन्दु से अन्तर श्रु हो और प विन्दुगत स्पर्शधरातल पर मूलविन्दु से लम्ब = श्रुकोज्याप और पृष्ठफल की तात्कालिकी गति=ताप्र तो सिद्ध करो कि

घ=$\frac{१}{३}$ $\int$ श्रुकोज्यापताप्र

४७। जिस सूची के खण्ड में मुख परिधि का व्यासार्द्ध (चि$_{१}$) आधारपरिधि का व्यासार्द्ध (चि$_{२}$) और ऊंचाई (वे) है उस का घनफल क्या होगा। उ० $\frac{\pi \text{ वे}}{३}$ (चि$_{१}^{२}$ +चि$_{१}$ चि$_{२}$+चि$_{२}^{२}$)

४८। समसूचियों का पृष्ठसूत्र (ग) स्थिर है। जिसका सब से अधि घनफल है उसके शिरःकोण का क्या प्रमाण होगा। उ० कोज्या$^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$

४९। एक समतलमस्तकपरिधिरूप शङ्कु के एक पृष्ठसूत्र को अक्ष मान एक समसूच्याकारशङ्कु बनाया। यदि दोनों शङ्कुओं का आधार (अ) और वेध (अ×उ) हो तो पहले शङ्कु से सूची के जो दो खण्ड होंगे उनके पृष्ठफल और घनफल क्या होंगे। उ० क्रम से खण्डों के

पृष्ठफल, $\frac{४\pi\sqrt{(१+इ^२)}-३\sqrt{(३+३इ^२)}}{६}अ^२$, $\frac{२\pi\sqrt{(१+इ^२)}+३\sqrt{(३+३इ^२)}}{६}अ^२$

और घनफल, $\frac{८\pi+२०\sqrt{३}-६४}{१८}इअ^३$, $\frac{६४-२०\sqrt{३}-२\pi}{१८}इअ^३$,

५०। जिसके पृष्ठ का $ल^२+\frac{अ^२र^२}{य^२}-ग^२=0$ यह समीकरण है उसे उन दो धरातलों से जिन में य=0, य=अ है काटा तो दो धरातलों के अन्तरगत खण्ड का क्या घनफल होगा। उ० $\frac{\pi अ ग^२}{२}$

५१। $य^२+र^२=गल$, $य^२+र^२=अय$, और ल=0 इन तीनों पृष्ठों के अन्तर्गत घनक्षेत्र का क्या घनफल होगा। उ० $\frac{३\pi अ^४}{३२}$

(१०८वां प्रक्रम देखो)

५२। जिस पृष्ठ का $\frac{य^२}{अ^४}+\frac{र^२}{क^४}+\frac{ल^२}{ग^४}=१$ यह समीकरण है उसका सम्पूर्ण घनफल क्या होगा। उ० $\frac{४\pi अ^२क^२ग^२}{३}$

(१८५वां प्रक्रम देखो)

५३। एक पुजारी ने ठाकुर जी के सामने जलती धूपबत्ती खोंसने के लिये मट्टी की एक समसूची बना रक्खी थी। एक दिन एक धनी ठाकुर

जी के दर्शन के लिये आया और चलती बेर उस समसूची के शिरे से आधार तक एक सूत से नापकर कहा कि देखो यह १० अङ्गुल का सूत हुआ इसे मैं याद रखने के लिये जेब में रख लेता हूं तुम इस सूची को खूब खोखली कर किसी दिन मेरी कोठी में आवो तो मैं उसे सोने से भर दूंगा । प्रातःकाल पुजारी ने एक ज्योतिषी से आकर निवेदन किया कि महाराज आप एक मट्टी की खोखली समसूची ऐसी बना दीजिये जिसके शिरे से आधार तक सर्वत्र दश अङ्गुल रहे और भीतर सोना भरने के लिये जगह भी खूब खुलासा रहे । ज्योतिषी ने गणित द्वारा उसके आधार परिधि का मान निकाल पुजारी को बता दिया कि इसी परिधि पर दश अङ्गुल पृष्ठ सूत्र से किसी कोहार के द्वारा समसूची को बनालो । बतावो ज्योतिषी ने आधार परिधि का क्या मान बतलाया था । उ० यदि व्यास परिधि का सम्बन्ध $\frac{२२}{७}$ हो तो आधार परिधि $=\frac{४४}{७}\sqrt{\frac{२००}{३}}=५१\cdot२६$

इति अष्टमाध्याय ।

अथ नवमाध्याय ।

सान्तचलानयन ।

१८६ । जिस तात्कालिक सम्बन्ध का साधारण रीति से अनन्त चल का ज्ञान हो जाता है उस में दोनों सीमाओं का उत्थापन देने से उस के सान्तचल का भी ज्ञान हो जाता है । इस लिये सान्तचल का मूल अनन्तचल ही ठहरा तथापि बहुत से स्थानों में अनन्तचल का रूप बिना बनाये लाघव से सान्तचल का मान आ जाता है जैसा कि ५० वें प्रक्रम में कुछ उदाहरण दिखा आये हैं और बहुत से स्थानों में जहां अनन्त-चल का मान ठीक ठीक नहीं जान सक्ते वहां भी इस सान्तचल के नियम से अनेक चमत्कृत सिद्धान्त उत्पन्न होते हैं इस लिये इस अध्याय में कुछ सान्तचलानयन के प्रकार लिखे जाते हैं ।

आज तक जितने सान्तचलों का ज्ञान हुआ है D. Bierens de Haan ने सब को एकट्ठा कर के सान्तचलसारणी Fables d' Integrales Definies के नाम से छपवा दिया है । जिन को इच्छा हो उसे देखें हम यहां पर कुछ रीतियों को दिखलाते हैं ।

१८७ । $\int_0^\pi \text{ज्या मय ज्यानय ताय}$ इस का मान जानना चाहते हैं । जहां म, न अभिन्न घनात्मक संख्या हैं और म 7 न ।

$$\text{यहां ज्यामय ज्यानय} = \frac{\text{कोज्या (म—न) य—कोज्या (म+न) य}}{२}$$

$$\text{इस लिये} \int \text{ज्यामय ज्यानय} = \frac{\text{ज्या (म-न)य}}{२\text{(म-न)}} - \frac{\text{ज्या (म+न)य}}{२\text{(म+न)}}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{और} & \int_0^\pi \text{ज्यामय ज्यानय ताय} = 0 \\ \text{इसी प्रकार} & \int_0^\pi \text{कोज्यामय कोज्यानय ताय} = 0\end{array}\right\} \cdots\cdots \quad (१)$$

यदि म = न = और अभिन्न घनात्मक तो

$$\int \text{ज्यामय ज्यानय ताय} = \int \text{ज्या}^२\text{नय ताय} = \int \frac{\text{(१-कोज्या २ नय)}}{२}\text{ताय}$$

$$= \frac{\text{य}}{२} - \frac{\text{ज्या२नय}}{\text{४न}} \text{ ।}$$

$$\therefore \int_0^\pi \text{ज्या}^२\text{नय} = \frac{\pi}{२}, \text{ इसी तरह } \int_0^\pi \text{कोज्या}^२\text{नय} = \frac{\pi}{२} \text{ ।}$$

१८८। $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ ज्या^{म}य कोज्या^{न}य ताय इस का मान जानना है। जहां म और न अभिन्न धनात्मक संख्या हैं।

यहां ३५ वें प्रक्रम से

$$\int \text{ज्या}^{म}\text{य कोज्या}^{न}\text{य ताय} = \frac{\text{कोज्या}^{न-१}\text{य ज्या}^{म+१}\text{य}}{म+न} + \frac{न-१}{म+न}\int \text{ज्या}^{म}\text{य कोज्या}^{न-२}\text{य ताय}$$

वा $$\int \text{ज्या}^{म}\text{य कोज्या}^{न}\text{य ताय} = \frac{म-१}{म+न}\int \text{ज्या}^{म-२}\text{य कोज्या}^{न}\text{य ताय} - \frac{\text{ज्या}^{म-१}\text{य कोज्या}^{न+१}\text{य}}{म+न}$$

इस लिये दोनों पर से

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{म}\text{य कोज्या}^{न}\text{य ताय} = \frac{न-१}{म+न}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{म}\text{य कोज्या}^{न-२}\text{य ताय}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{म}\text{य कोज्या}^{न}\text{य ताय} = \frac{म-१}{म+न}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{म-२}\text{य कोज्या}^{न}\text{य ताय।}$$

इस लिये म और न में से कोई विषम हो तो सहज में सान्तचल विदित होगा। म के स्थान में २ म+१ का उत्थापन देने से

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{२म+१}\text{य कोज्या}^{न}\text{य ताय} = \frac{२म}{२म+न+१}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{२म-१}\text{य कोज्या}^{न}\text{यताय}$$

इस लिये बार बार क्रिया करने से

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{२म+१}\text{य कोज्या}^{न}\text{य ताय}$$
$$= \frac{२म(२म-२)(२म-४)\cdots२}{(२म+न+१)(२म+न-१)\cdots(न+३)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्याय कोज्या}^{न}\text{य ताय}$$

परन्तु $\int$ ज्याय कोज्या^{न}यताय

$$= -\frac{\text{कोज्या}^{न+१}\text{य}}{न+१} \therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्याय कोज्या}^{न}\text{य ताय} = \frac{१}{न+१}$$

इस लिये

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{२म+१}\text{य कोज्या}^{न}\text{य ताय} = \frac{२\cdot४\cdot६\cdots२म}{(न+१)(न+३)\cdots(२म+न+१)} \cdots\cdots (२)$$

इसी प्रकार न यदि विषम हो तो न के स्थान में २न+१ का उत्थापन देने से

$$\int_0^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{\text{म}}\text{य}\,\text{कोज्या}^{२\text{न}+१}\text{य}\ \text{ताय} = \frac{२\text{न}}{\text{म}+२\text{न}+१}\int^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{\text{म}}\text{य}\,\text{कोज्या}^{२\text{न}-१}\text{य}\ \text{ताय}$$

$$= \frac{२\text{न}(२\text{न}-२)\cdots २}{(\text{म}+२\text{न}+१)(\text{म}+२\text{न}-१)\cdots(\text{म}+३)}\int_0^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{\text{म}}\text{य}\ \text{कोज्या}\ \text{य}\ \text{ताय}$$

$$= \frac{२\cdot ४\cdot ६\cdots २\text{न}}{(\text{म}+१)(\text{म}+३)\cdots(\text{म}+२\text{न}+१)} \quad \cdots\cdots \quad (३)$$

इसी तरह

$$\int_0^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{२\text{म}}\text{य}\,\text{कोज्या}^{२\text{न}}\text{य}\,\text{ताय} = \frac{२\text{न}-१}{२(\text{म}+\text{न})}\int_0^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{२\text{म}}\text{य}\ \text{कोज्या}^{२\text{न}-२}\text{य}\ \text{ताय}$$

$$= \frac{१\cdot ३\cdot ५\cdots(२\text{न}-१)}{(२\text{म}+२)(२\text{म}+४)\cdots(२\text{म}+२\text{न})}\int_0^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{२\text{म}}\text{य}\ \text{ताय}$$

$$= \frac{१\cdot ३\cdot ५\cdots(२\text{न}-१)\cdot १\cdot ३\cdot ५\cdots(२\text{म}-१)}{२\cdot ४\cdot ६\cdots\cdots(२\text{म}-२\text{न})}\cdot\frac{\pi}{२}\cdots\cdots \quad (४)$$

बहुत सान्तचलों का रूप ऊपर के आकार में ला सक्ते हो।

जैसे यदि य=स्पष

$$\text{तो}\ \int_0^{\infty}\frac{\text{ताय}}{(१+\text{य}^२)^{\text{न}}} = \int_0^{\frac{\pi}{२}} \text{कोज्या}^{२\text{न}-२}\text{ष}\ \text{ताष} = \int_0^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{२\text{न}-२}\text{ष}\ \text{ताष}$$

(४१ प्रक्रम के (४) समीकरण से)

$$= \frac{१\cdot ३\cdot ५\cdots(२\text{न}-३)}{२\cdot ४\cdot ६\cdots(२\text{न}-२)}\,\frac{\pi}{२}$$ (१२ वें प्रक्रम के (१५) उदाहरण से)

इसी तरह य=अ ज्याष मानने से

$$\int_0^{\text{अ}} \text{य}^{\text{न}}(\text{अ}^२-\text{य}^२)^{\frac{\text{म}}{२}}\ \text{ताय} = \text{अ}^{\text{न}+\text{म}+१}\int_0^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{\text{न}}\text{ष}\ \text{कोज्या}^{\text{म}+१}\text{ष}\ \text{ताष}$$

और य=अ(१−कोज्याष) मानने से

$$\int_0^{\text{अ}} (२\ \text{अय}-\text{य}^२)^{\frac{\text{म}}{२}}\ \text{ताय} = \text{अ}^{\text{म}+१}\int_0^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{\text{म}+१}\text{ष}\ \text{ताष}\ ।$$

इत्यादि।

१८६। $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{फा}(\text{य})}$ ताय इस का मान जानना है जहां जानते हैं कि फा(य) में जो सब से बड़ा य का मान २न हो तो फ(य) में

य का सब से बड़ा घात न—२ के समान वा २न—२ से छोटा है और फा(य)=० इस में य का मान कोई सम्भाव्य संख्या नहीं है। इसलिये यहां स्पष्ट हो जायगा कि य के सम्भाव्य मान में $\frac{फ(य)}{फा(य)}$ यह अनन्त के तुल्य नहीं होगा।

मान लो कि फा(य)=० इस में एक जोड़ा असम्भाव्य मान $अ_१+क_१\sqrt{-१}$, $अ_१-क_१\sqrt{-१}$ ये हैं और १७वें प्रक्रम से $\frac{फ(य)}{फा(य)}$ इस का रूप खण्डभिन्नों में ले आवें तो इन दोनों मानों के वश से एक खण्ड—

$$भिन्न=\frac{आ_१+का_१\sqrt{-१}}{य-अ_१+क_१\sqrt{-१}} \quad दूसरा =\frac{आ_१-का_१\sqrt{-१}}{य-अ_१-क_१\sqrt{-१}} \text{ है}$$

$$\text{इस लिये दोनों का योग}=\frac{२आ_न\ (य-अ_१)+२का_१क_१}{(य-अ_१)^२+क_१^२}$$

इस प्रकार से दो दो खण्ड भिन्नों का योग करने से

$$\frac{फ(य)}{फा(य)}=\frac{२आ_१(य-अ_१)+२का_१क_१}{(य-अ_१)^२+क_१^२}+\frac{२आ_२\ (य-अ_२)+२का_२क_२}{(य-अ_२)^२+क_२^२}$$

$$+\cdots+\frac{२आ_न\ (य-अ_न)+२का_नक_न}{(य-अ_न)^२+क_न^२}\ \cdots(१)$$

(जहां और दो दो असम्भाव्य मानों के वश से $आ_२$, $अ_२$, इत्यादि सिद्ध हुये हैं)

(१) में समच्छेद करने से स्पष्ट है कि दहने पक्ष में $य^{२न-१}$ का गुणक $२(आ_१+आ_२+आ_३+\cdots+आ_न)$ यह होगा परन्तु बायें पक्ष में अर्थात् फ(य) में $य^{२न-१}$ का गुणक ० है क्यों कि मान लिया है कि फ(य) में सब से बड़ा य का घात २न-२ के समान वा २न—२ से छोटा है इस लिये सरूप समीकरण की विधि से $आ_१+आ_२+आ_३+\cdots+आ_न=०$।

(५) में एक खण्ड का चल साधारण रीति से

$$\int\frac{2\text{आ}_1(\text{य}-\text{अ}_1)\text{ताय}}{(\text{य}-\text{अ}_1)^2+\text{क}_1^2}+\int\frac{2\text{का}_1\text{क}_1\text{ताय}}{(\text{य}-\text{अ}_1)^2+\text{क}_1^2}=\text{आ}_1\text{ला}\left\{(\text{य}-\text{अ}_1)^2+\text{क}_1^2\right\}$$

$$+2\text{का}_1\text{स्प}^{-1}\int\left(\frac{\text{य}-\text{अ}_1}{\text{क}_1}\right)$$

इस लिये $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\text{का}_1\text{क}_1\text{ताय}}{(\text{य}-\text{अ}_1)^2+\text{क}_1^2}=2\text{का}_1\pi$

$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\text{आ}_1(\text{य}-\text{अ}_1)\text{ताय}}{(\text{य}-\text{अ}_1)^2+\text{क}_1^2}$ इस में मान लो कि $\infty=\frac{1}{\text{इ}_1\text{ए}}, -\infty=\frac{-1}{\text{इ}_2\text{ए}}$

जहां ए= ०, अब $\text{आ}_1\text{ला}\{(\text{य}-\text{अ}_1)^2+\text{क}_1^2\}$ इस में य के स्थान में

क्रम से $\frac{1}{\text{इ}_1\text{ए}}, -\frac{1}{\text{इ}_2\text{ए}}$ का उत्थापन दे कर अन्तर करने से

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\text{आ}_1(\text{य}-\text{अ}_1)\text{ ताय}}{(\text{य}-\text{अ}_1)^2\text{क}+_1^2}=\text{आ}_1\Big[\text{ला}\Big\{\Big(\frac{1}{\text{इ}_1\text{ए}}-\text{अ}_1\Big)^2-\text{क}_1^2\Big\}$$

$$-\text{ला}\Big\{\Big(-\frac{1}{\text{इ}_2\text{ए}}-\text{अ}_1\Big)^2+\text{क}_1^2\Big\}\Big]$$

$$=\text{आ}_1\Big[\text{ला}\left\{\frac{(1-\text{इ}_1\text{अ}_1\text{ए})^2+\text{इ}_1^2\text{क}_1^2\text{ए}^2}{\text{इ}_1^2\text{ए}^2}\right\}$$

$$-\text{ला}\left\{\frac{(1+\text{इ}_2\text{अ}_1\text{ए})^2+\text{इ}_2^2\text{क}_1^2\text{ए}^2}{\text{इ}_2^2\text{ए}^2}\right\}\Big]$$

$$=\text{आ}_1\text{ला}\left\{\frac{\text{इ}_2^2}{\text{इ}_1^2}\;\frac{(1-\text{इ}_1\text{अ}_1\text{ए})^2+\text{इ}_1^2\text{क}_1^2\text{ए}^2}{(1+\text{इ}_2\text{अ}_1\text{ए})^2+\text{इ}_2^2\text{क}_1^2\text{ए}^2}\right\}=\text{आ}_1\text{ला}\left[\frac{\text{इ}_2^2}{\text{इ}_1^2}\right]$$

$=2\text{आ}_1\text{ला}\frac{\text{इ}_2}{\text{इ}_1}$, ए का मान शून्य मानने से ।

इस प्रकार से (१) में एक खण्डभिन्न सम्बन्धि $\infty, -\infty$ सीमाओं के भीतर का मान$=२आ_१ ला\dfrac{इ_२}{इ_१}+२का_१\pi$ यह सिद्ध हुआ।

इसी तरह (१) के सब खण्डभिन्नों के $=\infty, -\infty$ सीमाओं के भीतर सान्तचलों का मान ले आ कर योग कर देने से

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{फ(य)}{फा(य)}ताय=२\left(आ_१+आ_२+\cdots+आ_न\right)ला\left[\frac{इ_२}{इ_१}\right]$$
$$+२\pi\left(का_१+का_२+\cdots+का_न\right)$$
$$=२\pi\left(का_१+का_२+\cdots+का_न\right)\cdots\cdots\cdots(२)$$

१६०। ऊपर के प्रक्रम संबंधि एक उदाहरण अत्यन्त चमत्कृत दिखाते हैं। मानो कि $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{य^{२म}ताय}{१+य^{२न}}$ इस का मान जानना है जहां न और म धन अभिन्न संख्या हैं और न $>$ म। यहां मानो कि $य^{न२}+१=0$ इस में एक मान अं है तो २५वें प्रक्रम से $आ_१-का_१\sqrt{-१}=-\dfrac{अं^{२म+१}}{२न}$ और चलनकलन के ३१०वें प्रक्रम से अं, $कोज्या\,\frac{२क+१}{२न}\pi+\sqrt{-१}\,ज्या\,\frac{२क+१}{२न}\pi$ इस चाल का होगा जिस में क कोई धन संख्या न से छोटो है।

इस लिये $अं^{२म+१}=\left(कोज्या\,\frac{२क+१}{२न}\pi+\sqrt{-१}\,ज्या\,\frac{२क+१}{२न}\pi\right)^{२म+१}$
$$=कोज्या\,\frac{२क+१}{२न}(२म+१)\pi+\sqrt{-१}\,ज्या\,\frac{२क+१}{२न}(२म+१)\pi$$
$$=कोज्या\,(२क+१)\,ष+\sqrt{-१}\,ज्या(२क+१)ष,\ यदि\ \frac{(२म+१)\pi}{२न}=ष$$

इसलिये असम्भाव्य और सम्भाव्य को समान करने से

$$आ_१-का_१\sqrt{-१}=-\frac{कोज्या(२क+१)ष}{२न}-\frac{\sqrt{-१}\,ज्या(२क+१)ष}{२न}$$ इस में

$$का_१=\frac{ज्या\,(२क+१)ष}{२न},$$ क के स्थान में ०, १, २, $\cdots$ न$-$१ उत्थापन देकर योग करने से

$का_१+का_२+\cdots+का_न$

$=\frac{१}{२न}\{ज्याष+ज्या३ष+ज्या५ष+\cdots+ज्या(२न-१)ष\}$

इस में यदि $स=ज्याष+ज्या\,३ष+\cdots+ज्या\,(२न-१)ष$

तो $२\,स\,ज्याष=२ज्या^२ष+२ज्याषज्या३ष+\cdots+२ज्याषज्या\,(२न-१)ष$

$$=१-कोज्या२ष+कोज्या२ष-कोज्या४ष+\cdots$$

$+कोज्या\,(२न-२)\,ष-कोज्या\,२\,नष$

$$=१-कोज्या२नष=२ज्या^२नष=२ज्या^२\,(२म+१)\,\frac{\pi}{२}=२$$

इस लिये $स=\frac{१}{ज्याष}=\frac{१}{ज्या\,\frac{२म+१}{२न}\pi}$ ।

इसका उत्थापन ऊपर के मान में देने से

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{य^{२म}ताय}{१+य^{२न}}=\frac{१}{२न}\frac{२\,\pi}{ज्या\,\frac{२म+१}{२न}\pi}=\frac{\pi}{न\,ज्या\,\frac{२म+१}{२न}\pi}$$

$=२\int_{0}^{\infty}\frac{य^{२म}}{१+य^{२न}}$ ताय(चतुर्थाध्यायके (१) अभ्यासार्थ प्रश्न से)

इस लिये $\int_{0}^{\infty}\frac{य^{२म}}{१+य^{२न}}ताय=\frac{\pi}{२न}\cdot\frac{१}{ज्या\,\frac{२म+१}{२न}\pi}$

१६१ । $\int_{0}^{\infty}\frac{य^{२म}}{१-य^{२न}}$ ताय इस का मान जानना है जहां $न>म$ और दोनों धनात्मक अभिन्न संख्या हैं ।

इस के जानने के लिये पहले दिखलाते हैं कि

$$\int_{0}^{\infty}\frac{ताय}{१-य^२}=0$$

क्योंकि $\int_{0}^{\infty}\frac{ताय}{१-य^२}=\int_{0}^{१}\frac{ताय}{१-य^२}+\int_{१}^{\infty}\frac{ताय}{१-य^२}$ (४१ प्रक्रम के(१)समीकरण से)

परन्तु यदि $य=\frac{१}{र}$ तो $\int_{१}^{\infty}\frac{ताय}{१-य^२}=\int_{0}^{१}\frac{तार}{१-र^२}=-\int_{0}^{१}\frac{तार}{१-र^२}=-\int_{0}^{१}\frac{ताय}{१-य^२}$

(४१ प्रक्रम के (३) समीकरण की कल्पना से)

इसका उत्थापन देने से

$$\int_{0}^{\infty}\int\frac{\text{ताय}}{\text{१}-\text{य}^{\text{२}}}=\int_{0}^{\text{१}}\frac{\text{ताय}}{\text{१}-\text{य}^{\text{२}}}+\int_{\text{१}}^{\infty}\frac{\text{ताय}}{\text{१}-\text{य}^{\text{२}}}=\int_{0}^{\text{१}}\frac{\text{ताय}}{\text{१}-\text{य}^{\text{२}}}-\int_{0}^{\text{१}}\frac{\text{ताय}}{\text{१}-\text{य}^{\text{२}}}=0$$

यह सिद्ध हुआ।

अब $\int_{0}^{\infty}\frac{\text{य}^{\text{२म}}\,\text{ताय}}{\text{१}-\text{य}^{\text{२न}}}$ इस में स्पष्ट है कि $\text{१}-\text{य}^{\text{२न}}=0$ इस में दो सम्भाव्य मान य के आवेंगे एक +१ दूसरा −१ इस लिये खण्डभिन्नों मे +१, −१, इन दोनों मान के वश से जो दो भिन्न होंगे उन का योग = $\frac{\text{१}}{\text{न}(\text{१}-\text{य}^{\text{२}})}$ यह होगा । इस लिये ऊपर की युक्ति से

$\frac{\text{१}}{\text{न}}\int_{0}^{\infty}\frac{\text{ताय}}{\text{१}-\text{य}^{\text{२}}}=0$ । बाक़ी खण्डभिन्नों में न−१ जोड़े असम्भाव्य मान होंगे इस लिये

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\text{य}^{\text{२म}}\,\text{ताय}}{\text{१}-\text{य}^{\text{२न}}}=\text{२}\pi\,(\text{का}_{\text{१}}+\text{का}_{\text{२}}+\cdots+\text{का}_{\text{न}+\text{१}})$$

यहां भी ऊपर ही की युक्ति से

$$\text{का}_{\text{१}}+\text{का}_{\text{२}}+\cdots+\text{का}_{\text{न}-\text{१}}=\frac{\text{१}}{\text{२न}}\left\{\text{ज्या २ष}+\text{ज्या ४ष}+\cdots+\text{ज्या २(न}-\text{१)ष}\right\}$$

जहां पहले के ऐसा $\text{ष}=\frac{(\text{२म}+\text{१})}{\text{२न}}\pi$

यहां पर भी सरलत्रिकोणमिति की युक्ति से सब जीवाओं के योग का मान = $\frac{\text{कोज्याष}-\text{कोज्या(२न}-\text{१)ष}}{\text{२ज्याष}}=\text{कोस्प}\,\frac{(\text{२म}+\text{१})\pi}{\text{२न}}$

इस लिये $\int_{0}^{\infty}\frac{\text{य}^{\text{२म}}\text{ताय}}{\text{१}-\text{य}^{\text{२न}}}=\frac{\pi}{\text{२न}}\text{कोस्प}\,\frac{\text{२म}+\text{१}}{\text{२न}}\pi$ ।

इस में और ऊपर के प्रक्रम में यदि $\text{य}^{\text{२न}}=\text{ल}$ और $\text{अ}=\frac{\text{२म}+\text{१}}{\text{२}}$ तो

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{य^{२म}ताय}{१+य^{२न}} = \int_0^\infty \frac{ल^{अ-१}ताल}{१+ल} = \frac{\pi}{ज्या अ\pi} \text{ ।}\\ &\text{ओर} \int_0^\infty \frac{य^{२म}ताय}{१-य^{२न}} = \int_0^\infty \frac{ल^{अ-१}\ ताल}{१-ल} = \pi कोस्प\ अ\pi\end{aligned}\right\} \cdots (१)$$

यहां म, और न के वश से सिद्ध कर सक्ते हो कि अ सर्वदा धनात्मक और १ से अल्प है ।

१६२ । ऊपर के दो प्रक्रमों में जो दो सान्तचल आये हैं उनके बल से अनेक रूपान्तर बना सक्ते हो। जैसे ऊपर के प्रक्रम के (१) समीकरण में यदि ह $=$ ल^{अ} तो

$$\int_0^\infty \frac{ताह}{१+ह^{\frac{१}{अ}}} = \frac{अ\pi}{ज्या अ\pi},\ \int_0^\infty \frac{ताह}{१-ह^{\frac{१}{अ}}} = अ\pi कोस्प\ अ\pi$$

इन में त $= \frac{१}{अ}$ मानने से

$$\int_0^\infty \frac{ताह}{१+ह^{त}} = \frac{\pi}{तज्या\ \frac{\pi}{त}},\ \int_0^\infty \frac{ताह}{१-ह^{त}} = \frac{\pi}{त} कोस्प\ \frac{\pi}{त} \cdots (१)$$

जहां त धन और १ से अधिक है ।

$$\text{और} \int_0^\infty \frac{य^{न}ताय}{१+य^{२}} = \int_0^१ \frac{य^{न}ताय}{१+य^{२}} + \int_१^\infty \frac{य^{न}ताय}{१+य^{२}}$$

$$\text{परन्तु यदि } य = \frac{१}{ल} \text{ तो} \int_१^\infty \frac{य^{न}ताय}{१+य^{२}} = -\int_१^0 \frac{ल^{-न}ताल}{१+ल^{२}} = \int_0^१ \frac{य^{-न}ताय}{१+य^{२}}$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{य^{न}ताय}{१+य^{२}} = \int_0^१ \frac{य^{न}+य^{-न}}{१+य^{२}} ताय \text{ ।} \cdots\cdots (२)$$

और १६० प्रक्रम के सान्तचल में यदि न$=$१, और २ म$=$न $\angle$ १ मान

$$\text{लें तो} \int_0^\infty \frac{य^{न}ताय}{१+य^{२}} = \frac{\pi}{२ को ज्या \frac{न\pi}{२}} \text{ ।} \cdots\cdots (३)$$

(३) से (२) का मान

$$= \frac{\pi}{२ \text{ कोज्या} \frac{न\pi}{२}} = \int_0^१ \frac{य^न + य^{-न}}{१+य^२} \text{ताय} = \int_0^१ \frac{य^न+य^{-न}}{य+य^{-१}} \cdot \frac{\text{ताय}}{य}, \cdots (४)$$

इसी तरह

$$\frac{\pi}{२} \text{स्प} \frac{न\pi}{१} = \int_0^\infty \frac{य^न \text{ताय}}{१-य^२} = \int_0^१ \frac{य^न - य^{-न}}{य-य^{-१}} \cdot \frac{\text{ताय}}{य} \cdots\cdots (५)$$

सर्वत्र समझो कि न $\angle$ १ है

(४) और (५)वें में यदि य= $इ^{-\pi ल}$ और अ=नπ तो

$$\int_0^\infty \frac{इ^{अल}+इ^{-अल}}{इ^{\pi ल}+इ^{-\pi ल}} \text{ताल} = \frac{\text{छे}\frac{अ}{२}}{२} \text{।} \int_0^\infty \frac{इ^{अल}-इ^{-अल}}{इ^{\pi ल}-इ^{-\pi ल}} \text{ताल} = \frac{\text{स्प}\frac{अ}{२}}{२}, \cdots (६)$$

इस तरह से सैकड़ों रूपान्तर कर सक्ते हो।

१६३। इस सान्तचलानयन की विधि से फल में चाहे जिस वर्ण को स्वतन्त्र मान उसके वश से चाहे जैान सा तात्कालिक सम्बन्ध जान सक्ते हैं।

जैसे $\int_अ^क$ फ(य)ताय इस का तात्कालिक सम्बन्ध क को स्वतन्त्र मान उस के वश से निकालना है जहां यह जानते हैं कि फ(य) में क नहीं है और क और अ यहां यदि $\int$फ(य)ताय=फा(य)+स्थि,

तो $\int_अ^क$फ(य)ताय=फा(क)—फा (अ) दोनेां परस्पर स्वतन्त्र हैं।

इस लिये $\frac{\text{तास}}{\text{ताक}} = \frac{\text{ता}}{\text{ताक}} \{ \text{फा(क)} - \text{फा(अ)} \} = \frac{\text{ताफा(क)}}{\text{ताक}} =$ फ(क) यह बड़े लाघव से सिद्ध हो जाता है इसके लिये यूरप के लेागेां की कल्पना जो टाड् हण्टर इत्यादिकेां ने लिखी है सो दिखाते हैं।

कल्पना करो कि स= $\int_अ^क$ फ(य)ताय

और जब क बढ़ के क+$\triangle$क हुआ तब स का मान स+$\triangle$स हुआ॥

इस लिये स+$\triangle$स= $\int_अ^{क+\triangle क}$ फ(य)ताय

इस लिये$\triangle$ स= $\int_अ^{क+\triangle क}$ फ(य)ताय—$\int_अ^क$ फ(य) ताय

$= \int_अ^{क+\triangle क}$ फ(य)ताय (४१) प्रक्रम के (१) समीकरण से)

परन्तु ४०वें प्रक्रम से

$$\int_{क}^{क+\triangle क} फ(य) ताय = \triangle क\ फ(क+ष\triangle क)$$

जहां ष कोई १ से अल्प भिन्नाङ्क है ।

इस तरह से $\frac{\triangle स}{\triangle क} = फ(क+ष\triangle क)$, △ क का मान शून्य मानने से

$$\left.\begin{array}{l} \frac{तास}{ताक} = फ(क) \\ और \quad \frac{ता^{न}स}{ताक^{न}} = फ^{(न-१)}(क) \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (१)$$

इसी तरह अ को स्वतन्त्र मानने से यदि फ(य) में अ न हो और अ,क परस्पर स्वतन्त्र हों तो $\frac{तास}{ताअ} = -फ(अ)$

$$और \quad \frac{ता^{न}स}{ताअ^{न}} = -फ^{(न-१)}(अ) \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (२)$$

१८४ । $स = \int_{अ}^{क} फ(य,ग) ताय$ यहां पर ग को स्वतन्त्र मानने से $\frac{तास}{ताग}$ का मान जानना है जहां अ और क दोनों ग की अपेक्षा स्वतन्त्र हैं ।

$$यहां \quad स = \int_{अ}^{क} फ(य,ग)\ ताय$$

$$इस लिये \quad स + \triangle स = \int_{अ}^{क} फ(य, ग+\triangle ग)\ ताय$$

$$और \quad \triangle स = \int_{अ}^{क} फ(य,ग+\triangle ग) ताय - \int_{अ}^{क} फ(य,ग) ताय$$

$$= \int_{अ}^{क} \{फ(य,ग+\triangle ग) - फ(य,ग)\}\ ताय$$

$$इस लिये \quad \frac{\triangle स}{\triangle ग} = \int_{अ}^{क} \left\{\frac{फ(य, ग+\triangle ग) - फ(य,ग)}{\triangle ग}\right\} ताय$$

△ग को शून्य मानने से तात्कालिक सम्बन्ध के धर्म्म से

$$\frac{तास}{ताग} \int_{अ}^{क} \frac{ताफ(य,ग)}{ता ग}\ ताय$$

इस में इतना समझ लो कि अ, वा क दोनों में से कोई अनन्त के तुल्य नहीं है ।

क्योंकि चलनकलन की युक्ति से

$$\frac{फ(य,ग+\triangle ग) - फ(य,ग)}{\triangle ग} = \frac{ताफ(य, ग)}{ता ग} + इ_{१} \text{ ऐसा होगा}$$

जहां △ग को शून्य मानने से $इ_{१}$ भी शून्य हो जायगा ।

$$इस लिये \quad \frac{\triangle स}{\triangle ग} = \int_{अ}^{क} \frac{ताफ(य,ग)}{ता ग}\ ताय + \int_{अ}^{क} इ_{१}\ ताय$$

अब यहां प्रत्यक्ष देख पड़ता है कि ग को शून्य मानने में यदि क, और अ अनन्त न हों तो $\int_{अ}^{क} इ_1 \text{ ताय}$ यह शून्य के तुल्य हो जायगा।

$$\left.\begin{array}{ll} \text{अब जब} & \frac{\text{तास}}{\text{ताग}} = \int_{अ}^{क} \frac{\text{ताफ}(य,ग)}{\text{ताग}} \text{ताय} \\ \text{इस लिये} & \frac{\text{ता}^{न}\text{स}}{\text{ताग}^{न}} = \int_{अ}^{क} \frac{\text{ता}^{न}\text{फ}(य,ग)}{\text{ताग}^{न}} \text{ताय} \end{array}\right\} \cdots\cdots (१)$$

कल्पना करो कि (१) में $\int \text{फ}(य,ग)\text{ताय} = \text{फा}(य,ग)$

और $\int \frac{\text{ताफ}(य,ग)}{\text{ताग}} \text{ताय} = \text{फि}(य,ग)$

$$\text{तो } \frac{\text{तास}}{\text{ताग}} = \frac{\text{ता फा}(क,ग)}{\text{ताग}} - \frac{\text{ता फा}(अ,ग)}{\text{ताग}} = \text{फि}(क,ग) - \text{फि}(अ,ग) \cdots (२)$$

इस में मानो कि फ(य,ग) में क नहीं है और अ, क से स्वतन्त्र है तो

$$(२) \text{ से } \frac{\text{ता फा}(क,ग)}{\text{ताग}} + \text{फि}(अ,ग) - \frac{\text{ता फा}(अ,ग)}{\text{ताग}} = \frac{\text{ता फा}(क,ग)}{\text{ताग}} + \text{स्थि}$$
$$= \text{फि}(क,ग) \cdots (३)$$

जहां $\text{फि}(अ,ग) - \frac{\text{ता फा}(अ,ग)}{\text{ताग}} = \text{स्थि} =$ क से स्वतन्त्र स्थिराङ्क।

अब (३) में चाहे क के स्थान में जो उत्थापन दो समीकरण ठीक ही रहेगा मान लो कि क के स्थान में य को रख दिया तो

$$\frac{\text{ता फा}(य,ग)}{\text{ताग}} + \text{स्थि} = \text{फि}(य,ग) \cdots (४)$$

(४) में यदि स्थिराङ्क को छोड़ दें और फा(य,ग) और फि(य,ग) के स्थान में इनका पहला मान रख दें तो

$$\frac{\text{ता}}{\text{ताग}} \int \text{फ}(य,ग)\text{ताय} = \int \frac{\text{ता फ}(य,ग)}{\text{ताग}} \text{ताय} \cdots\cdots (५)$$

(५) वें से एक के चलज्ञान से दूसरे का चलज्ञान सहज में हो सक्ता है जैसे

$$\text{यदि फ}(य,ग) = \frac{१}{१+ग^२य^२} \text{ तो } \int \text{फ}(य,ग)\text{ताय} = \int \frac{\text{ताय}}{१+ग^२य^२} = \frac{१}{ग}\text{स्प}^{-१}\text{गय}$$

$$\text{और } \frac{\text{ताफ}(य,ग)}{\text{ताग}} = -\frac{२गय^२}{(१+ग^२य^२)^२}, \frac{\text{ता}}{\text{ताग}} \int \text{फ}(य,ग)\text{ताय} = \frac{\text{ता}}{\text{ताग}} \left(\frac{१}{ग}\text{स्प}^{-१}\text{गय}\right)$$

$$= \frac{१}{ग} \frac{\text{ता}}{\text{ताग}} (\text{स्प}^{-१}\text{गय}) = \frac{१}{ग} \cdot \frac{य}{१+ग^२य^२}$$

इस लिये (५)वें से

$$\frac{\text{ता}}{\text{ताग}}\int \text{फ}(\text{य},\text{ग})\text{ताय}=\frac{1}{\text{ग}}\,\frac{\text{य}}{1+\text{ग}^2\text{य}^2}=\int\frac{\text{ताफ}(\text{य},\text{ग})}{\text{ताग}}\text{ताय}=-\int\frac{2\text{गय}^2\text{ताय}}{(1+\text{ग}^2\text{य}^2)^2}$$

देखेा यहां $\int \text{फ}(\text{य},\text{ग})\text{ताय}=\int\frac{\text{ताय}}{1+\text{ग}^2\text{य}^2}$ इस के ज्ञान से तात्कालिक सम्बन्ध पर से इस से अधिक कठिन का $-\int\frac{2\text{गय}^2\text{ताय}}{(1+\text{ग}^2\text{य}^2)^2}$ इस का ज्ञान सहज में होगया ।

१६५ । यदि $\text{स}=\int_{\text{अ}}^{\text{क}}\text{फ}(\text{य},\text{ग})\text{ताय}$ इस में यदि क, और अ दोनों ग के फल हों तो $\frac{\text{तास}}{\text{ताग}}$ का मान जानना ।

यहां स्पष्ट है कि तीन चलराशि के वश मे अर्थात् अ, क, ग के वश मे तात्कालिक सम्बन्ध निकलेगा । इस लिये चलनकलन के प्रक्रम से और ऊपर के प्रक्रमों से $\frac{\text{तास}}{\text{ताग}}=\int_{\text{ग}}^{\text{क}}\frac{\text{ताफ}(\text{य},\text{ग})}{\text{ताग}}\text{ताय}+\frac{\text{तास}}{\text{ताक}}\cdot\frac{\text{ताक}}{\text{ताग}}+\frac{\text{तास}}{\text{ताअ}}\cdot\frac{\text{ताअ}}{\text{ताग}}$

$$=\int_{\text{ग}}^{\text{क}}\frac{\text{ताफ}(\text{य},\text{ग})}{\text{ताग}}\text{ताय}+\text{फ}(\text{क},\text{ग})\frac{\text{ताक}}{\text{ताग}}-\text{फ}(\text{अ},\text{ग})\frac{\text{ताअ}}{\text{ताग}}$$

इसी तरह से

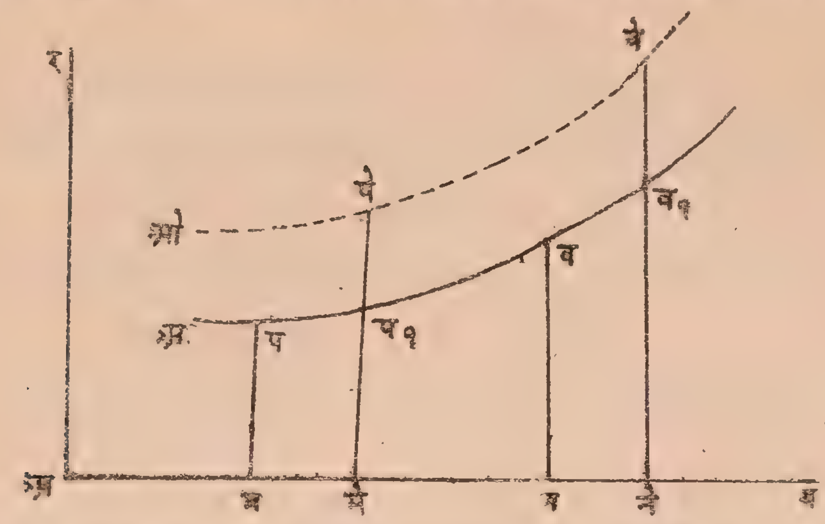
$$\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताग}^2}=\int_{\text{ग}}^{\text{क}}\frac{\text{ता}^2\text{फ}(\text{य},\text{ग})}{\text{ताग}^2}\text{ताय}$$

$$+\text{फ}(\text{क},\text{ग})\frac{\text{ता}^2\text{क}}{\text{ताग}^2}+\frac{\text{ताफ}(\text{क},\text{ग})}{\text{ताक}}\left\{\frac{\text{ताक}}{\text{ताग}}\right\}^2+2\frac{\text{ताफ}(\text{क},\text{ग})}{\text{ताग}}\cdot\frac{\text{ताक}}{\text{ताग}}$$

$$-\text{फ}(\text{अ},\text{ग})\frac{\text{ता}^2\text{अ}}{\text{ताग}^2}-\frac{\text{ताफ}(\text{अ},\text{ग})}{\text{ताअ}}\left\{\frac{\text{ताअ}}{\text{ताग}}\right\}^2-2\frac{\text{ताफ}(\text{अ},\text{ग})}{\text{ताग}}\cdot\frac{\text{ताअ}}{\text{ताग}}$$

इसी तरह $\frac{\text{ता}^3\text{स}}{\text{ताग}^3}$ इसका और इस से अधिक का भी मान जान सक्ते हेा ।

१६६ । १६५ प्रक्रम में जेा $\frac{\text{तास}}{\text{ताग}}$ इसका मान दिखलाया है उसे बीच की रीति से भी दिखा सक्ते हेा ।



मान लो कि आपव वक्र का समीकरण र=फ(य,ग) और आ'प'व' का समीकरण र=फ(य,ग+△ग) यह है और माना कि

अम=अ, अ न=क, म म'=△अ, न न'=△क तो स, पमनव का और स+△स पम'न'व' का क्षेत्रफल होगा। इस लिये

$$\triangle\text{स}=\text{प}'\text{प}_1\text{व}_1\text{व}'+\text{वनन}'\text{व}_1-\text{पमम}'\text{प}_1$$

$$\text{और } \frac{\triangle\text{स}}{\triangle\text{ग}}=\frac{\text{प}'\text{प}_1\text{व}_1\text{व}'}{\triangle\text{ग}}+\frac{\text{वनन}'\text{व}_1}{\triangle\text{ग}}-\frac{\text{पमम}'\text{प}_1}{\triangle\text{ग}}\text{ ।}$$

इस में म न का मान यदि परमाल्प अर्थात् ताय के तुल्य हो तो

$$\frac{\text{प}'\text{प}_1\text{व}_1\text{व}'}{\text{ग}}=\frac{\text{फ}(\text{य},\text{ग}+\triangle)-\text{फ}\ \text{य},\text{ग})}{\triangle\text{ग}}\text{ ताय}, \quad \frac{\text{वनन}'\text{व}_1}{\triangle\text{ग}}=\text{फ}(\text{क},\text{ग})\frac{\triangle\text{क}}{\triangle\text{ग}},$$

$$\text{और } \frac{\text{पमम}'\text{प}_1}{\triangle\text{ग}}=\text{फ}(\text{अ},\text{ग})\frac{\triangle\text{अ}}{\triangle\text{ग}},$$ । इस पर से △ग के स्थान में ताग मानने से

$$\frac{\text{तास}}{\text{ताग}}=\frac{\text{ताफ}(\text{य},\text{ग})}{\text{ताग}}\text{ ताय}+\text{फ}(\text{क},\text{ग})\frac{\text{ताक}}{\text{ताग}}-\text{फ}(\text{अ},\text{ग})\frac{\text{ताअ}}{\text{ताग}}$$

यही १९५ प्रक्रम में भी उत्पन्न हुआ था।

१९७। ऊपर के प्रक्रमों में जो सिद्धान्त दिखलाये हैं उनकी व्याप्ति के लिये कुछ उदाहरण दिखलाते हैं।

(१) उस वक्र को जानना है जिस में चाप, य अक्ष, और कोटि से बने क्षेत्र का फल भुजकोटि के घात से न गुणित हो। जहां न कोई स्थिराङ्क है। मानो कि वक्र का समीकरण र=फ(य) है तो फलानयन की विधि से

$\int_0^{ग}$ फ(य) ताय यह उस खण्ड का फल होगा जो वक्रचाप, य अक्ष, और उस कोटि से जिस में भु=ग, है बना है इस लिये प्रश्न के आलाप से

$स=\int_0^{ग}$ फ(य)ताय$=\frac{गफ(ग)}{न}$ यह स्थिति चाहे ग का मान जो हो सर्वत्र रहेगी इस लिये ग के वश तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से १९३ प्रक्रम के (१) समीकरण से $\frac{तास}{ताग}=फ(ग)=\frac{फ(ग)+गफं(ग)}{न}$

इस लिये (न—१) फ(ग)=गफं(ग)

और $$\frac{फं(ग)}{फ(ग)}=\frac{न-१}{ग}$$

चलानयन से ला फ(ग)=(न—१) लाग+स्थि

अर्थात् फ(ग)=आग$^{न-१}$ जहां आ कोई स्थिराङ्क है ।

ग के स्थान में य को रख देने से अभीष्ट वक्र का समीकरण

फ(य)=आय$^{न-१}$ यह हुआ।

(२) जिस वक्र का र=फ(य) यह समीकरण है उसमें यह जानते हैं कि ग के सब मान में

$\frac{\int_0^{ग} य\{फ(य)\}^२ ताय}{\int_0^{ग}\{फ(य)\}^२ ताय}=\frac{ग}{न}$ यह स्थिति है तो फ(य) का स्वरूप कैसा होगा ।

यहां प्रश्न के अनुसार छेदगम कर देने से

$\int_0^{ग} य\{फ(य)\}^२ ताय=\frac{ग}{न}\int_0^{ग}\{फ(य)\}^२ ताय$ ऐसा होगा ।

ग के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$ग\{फ(ग)\}^२=\frac{१}{न}\int_0^{ग}\{फ(य)\}^२ ताय+\frac{ग}{न}\{फ(ग)\}^२$$

समशोधन से $ग(१-\frac{१}{न})\{फ(ग)\}^२=\frac{१}{न}\int_0^{ग}\{फ(य)\}^२ ताय$

इस का ग के वश से फिर तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$(१-\frac{१}{न})\{फ(ग)\}^२+२ग(१-\frac{१}{न})$ फ(ग) फं(ग)$=\frac{\{फ(ग)\}^२}{न}$, फ(ग) का भाग दे कर समशोधन से $(१-\frac{२}{न})$ फ(ग)$+२ग(१-\frac{१}{न})$फं(ग)=०

इस लिये $\frac{फ'(ग)}{फ(ग)} = \frac{२-न}{२(न-१)} \frac{१}{ग}$, चलानयन करने से

$$लाफ(ग)=\frac{२-न}{२(न-१)}लाग+स्थि ।$$

इस लिये $फ(ग)=आ\, ग^{\frac{२-न}{२(न-१)}}$ जहां आ कोई स्थिराङ्क है।

इस तरह से $फ(य)=आ\, य^{\frac{२-न}{२(न-१)}}$ यह सिद्ध हुआ।

यह उदाहरण स्थिति विद्या में एक चमत्कार कारक है।

(३) फ(य) का ऐसा स्वरूप जानना है जिसमें $\int_0^म \frac{फ(य)ताय}{\sqrt{(ग-य)}}$ यह ग से स्वतन्त्र हो जहां जानते हैं कि ग से फ(य) स्वतन्त्र है।

यहां मान लो कि य=गल तो

$$स=\int_0^ग \frac{फ(य)ताय}{\sqrt{(ग-य)}}=\int_0^१ \frac{\sqrt{ग}\, फ(गल)\, ताल}{\sqrt{(१-ल)}}$$ अब प्रश्नानुसार स, ग से स्वतन्त्र है इस लिये

$$0=\frac{तास}{ताग}=\int_0^१ \frac{\frac{फ(गल)}{२\sqrt{ग}}+ल\sqrt{ग}\, फ'(गल)}{\sqrt{(१-ल)}}=\int_0^ग \frac{फ(य)+२यफ'(य)}{२ग\sqrt{(ग-य)}}\, ताय$$

यह सब ग के मान में जब $\frac{तास}{ताग}=0$ है इस लिये अवश्य ४० प्रक्रम के श्रेढी द्वारा सिद्ध कर सक्ते हो कि

$$फ(य)+२य\, फ'(य)=0 \therefore \frac{फ'(य)}{फ(य)}=-\frac{१}{२य}$$

इस लिये $लाफ(य)=-\frac{१}{२}\, ला(य)+स्थि$।

इस लिये $फ(य)=\frac{आ}{\sqrt{य}}$ जहां आ कोई स्थिराङ्क है।

इस वक्र में नीच स्थान से यदि उस विन्दु तक जिसका भु=य है चाप चाहो तो गति विद्या से

$$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}}=\text{फ}(\text{य})=\frac{\text{आ}}{\sqrt{\text{य}}} \therefore \text{चा}=२\text{आ}\sqrt{\text{य}}$$

(७१ वां प्रक्रम देखेा) इस पर से कह सक्ते हेा कि ऊपर का वक्र चक्रालद होगा ।

(४) $\int_0^\infty \text{इ}^{-\text{अय}}\ \text{ताय}=\frac{१}{\text{अ}}$ तेा यहां न वार अ के वश से तात्का-लिक सम्बन्ध निकालने से $\int_0^\infty \text{य}^{\text{न}}\text{इ}^{-\text{अय}}\,\text{ताय}=\frac{\lfloor\text{न}}{\text{अ}^{\text{न}+१}}$ यह सिद्ध हुआ ।

$$\text{क्योंकि } \int \text{इ}^{-\text{अय}}\text{ताय}=\frac{\text{इ}^{-\text{अय}}}{\text{अ}}=-\frac{१}{\text{अइ}^{\text{अय}}}$$

$$\text{इस लिये} -\int_0^\infty \text{इ}^{-\text{अय}}\text{ताय}=-\frac{१}{\text{अइ}^{\infty}}+\frac{१}{\text{अइ}^{0}}=0+\frac{१}{\text{अ}}=\frac{१}{\text{अ}}$$

इस तरह से सैकड़ों प्रश्नेात्तर निकाल सक्ते हेा ।

१६८ । फ्रुलानी का सिद्धान्त (Theorem of Frullani)

इसे सिद्ध करना है कि $\int_0^\infty \frac{\text{फ}(\text{अय})-\text{फ}(\text{कय})}{\text{य}}\text{ताय}=\text{फ}\ (0)\times\text{ला}\ (\frac{\text{क}}{\text{अ}})$

कल्पना करेा कि $\text{स}=\int_0^{\text{च}} \frac{\text{फ}(\text{ल})-\text{फ}(0)}{\text{ल}}\text{ताल}$ इस में ल=अय तेा

$$\text{स}=\int_0^{\frac{\text{च}}{\text{अ}}} \frac{\text{फ}(\text{अय})-\text{फ}(0)}{\text{य}}\text{ताय} \cdots\cdots\cdots (१)$$

इस में यदि अ के स्थान में क को रख दें तेा

$$\text{स}=\int_0^{\frac{\text{च}}{\text{क}}} \frac{\text{फ}(\text{कय})-\text{फ}(0)}{\text{य}}\text{ताय} \cdots\cdots\cdots (२)$$

(१) और (२) के अन्तर पर से

$$\int_0^{\frac{\text{च}}{\text{अ}}}\frac{\text{फ}(\text{अय})\text{ताय}}{\text{य}}-\int_0^{\frac{\text{च}}{\text{क}}}\frac{\text{फ}(\text{कय})\text{ताय}}{\text{य}}=\text{फ}\ (0)\int_{\frac{\text{च}}{\text{क}}}^{\frac{\text{च}}{\text{अ}}}\frac{\text{ताय}}{\text{य}}$$

$$=\int_0^{\frac{\text{च}}{\text{अ}}}\frac{\text{फ}(\text{अय})-\text{फ}(\text{कय})}{\text{य}}\text{ताय}-\int_{\frac{\text{च}}{\text{अ}}}^{\frac{\text{च}}{\text{क}}}\frac{\text{फ}(\text{कय})\text{ताय}}{\text{य}}=\text{फ}(0)\text{ला}\ (\frac{\text{क}}{\text{अ}}) \cdots\cdots (३)$$

यहां यदि च=∞ तो यदि $\int_{\frac{च}{अ}}^{\frac{च}{क}} \frac{फ(कय)ताय}{य}=0$

तो $\int_0^{\infty} \frac{फ(अय)-फ(कय)}{य} ताय = फ(0) \times ला\left(\frac{क}{अ}\right)$

जैसे यदि फ(य)=कोज्याय तो

यहां $\int_{\frac{च}{अ}}^{\frac{च}{क}} \frac{कोज्याकय}{य} ताय = 0$ यदि च=∞

क्योंकि $\int य^{-1} कोज्याकयताय = \frac{य^{-1}ज्याकय}{क} + \frac{1}{क} \int य^{-2} ज्याकयताय$

(खण्डचलानयन से)

इस लिये य का अनन्त मान मानने से कोज्याकय, और ज्याकय तो सर्वदा १ से कम रहेंगे परन्तु भाजक ∞ के तुल्य होगा।)

इस लिये $\int_0^{\infty} \frac{फ(अय)-फ(कय)}{य} ताय = \int_0^{\infty} \frac{कोज्याअय-कोज्याकय}{य} ताय$

$= फ(0) ला\left(\frac{क}{अ}\right) = कोज्या(0) \times ला\left(\frac{क}{अ}\right) = ला\left(\frac{क}{अ}\right)$

जहां कहीं फ(0)=0 तहां फ्रुलानी (Frullani) के सिद्धान्त से ठीक मान न आवेगा जैसे $\int_0^{\infty} \frac{स्प^{-1}अय - स्प^{-1}कय}{य} ताय$ यहां फ(0)=0 इस लिये

(३) समीकरण से

$$\int_0^{\infty} \frac{स्प^{-1}अय - स्प^{-1}कय}{य} ताय = \int_{\frac{च}{अ}}^{\frac{च}{क}} \frac{स्प^{-1}कय}{य} ताय, \text{ जहां } च=\infty$$

दहने पक्ष में स्पष्ट है कि $\frac{च}{अ}, \frac{च}{क}$ भीतर सब अनन्त मान में $स्प^{-1}कय = स्प^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2}$ इस लिये

$$\int_{\frac{च}{अ}}^{\frac{च}{क}} \frac{स्प^{-1}कयताय}{य} = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{च}{अ}}^{\frac{च}{क}} \frac{ताय}{य} = \frac{\pi}{2} ला\left(\frac{अ}{क}\right)$$

इस लिये $\int_0^{\infty} \frac{स्प^{-1}अय - स्प^{-1}कय}{य} ताय = \frac{\pi}{2} ला\left(\frac{अ}{क}\right)$

१९९। यूलर के चल (Eulerian Integrals)।

$\int_0^1$ य$^{द-१}$(१–य)$^{म-१}$ताय इस सान्तचल को यूलर का पहला चल कहते हैं। और इसे हम बी (द,म) इस सङ्केत से प्रकाश करते हैं। यूरप के लोग ग्रीक वर्णमाला का दूसरा अक्षर बीटा (B) को लेकर इस को बीटाफल (Beta function) कहते हैं। हमने अपने देश के अनुसार इस का नाम बीजफल रक्खा है।

$\int_0^\infty$ इ$^{-य}$य$^{न-१}$ताय इस को यूलर का दूसरा चल कहते हैं और इसे हम गा(न) इस सङ्केत से प्रकाश करते हैं। यूरप के लोग ग्रीक वर्णमाला का तीसरा अक्षर गामा (L) को लेकर इसे गामा फल (Gmma fanction) कहते हैं हमने इस का नाम गाफ़फल रक्खा है।

इन दोनों को यूलर ने निकाला है इसी लिये आदर के लिये उसके नाम सहित इन्हें बोलते हैं।

यूलर का जन्म सन् १७०७ ई० में हुआ था और ७६ वर्ष की अवस्था में इसकी मृत्यु हुई थी बीच में यह अंधा भी हो गया था और घर में आग लग जाने से बहुत से इसके प्रकार भस्म भी हो गये तथापि बहुत से इस के ग्रन्थ अद्यावधि यूरप में प्रसिद्ध हैं जिनका वर्णन मैं इस चलराशिकलन में व्यर्थ समझता हूं इस लिये अपने कृत्य के ऊपर लौट कर कुछ इन दोनों चलों के सिद्धान्तों को दिखलाता हूं। नीचे सर्वत्र द,म और न को धन समझो।

२००। ४१वें प्रक्रम के (४) समीकरण से

$\int_0^1$ य$^{द-१}$(१—य)$^{म-१}$ ताय$=\int_0^1$य$^{म-१}$(१—य)$^{द-१}$

इस लिये बी (द,म)=बी (म,द)

अर्थात् द,म का परस्पर परिवर्त्तन कर देने से मान में कुछ भी अन्तर नहीं होता।

यदि बी (द,म) में य$=\frac{र}{१+र}$ तो

$$\int_0^1 \text{य}^{द-१}(१-\text{य})^{म-१}\text{ताय}=\text{बी (द,म)}=\int_0^\infty \frac{\text{र}^{द-१}\text{तार}}{(१+\text{र})^{द+म}}$$

उसी में यदि $य=\frac{१}{१+र}$ तो

$$\int_0^1 य^{द-१}(१-य)^{म-१}ताय = बी\,(द,म) = \int_0^\infty \frac{र^{म-१}तार}{(१+र)^{द+म}} ।$$

२०१। यूलर के दूसरे चल में यदि $इ^{-य}=र$ अर्थात् $य=ला\,\frac{१}{र}$

तो $\int_0^\infty इ^{-य}य^{न-१}ताय = गा(न) = \int_0^1 (ला\,\frac{१}{र})^{न-१}तार$ यह एक गा(न) का रूपान्तर है ।

खण्ड चलानयन से

$$\int इ^{-य}य^{न}ताय = -इ^{-य}य^{न} + न\int इ^{-य}य^{न-१}ताय$$

और $इ^{-य}य^{न}$ शून्य के तुल्य होता है यदि य=०, य=∞ हो (चलनकलन का ३६वां प्रक्रम देखो)

इस लिये $\int_0^\infty इ^{-य}य^{न}ताय = न\int_0^\infty इ^{-य}य^{न-१}ताय$

अर्थात् गा(न+१)=नगा(न) . . . . (१)

और $\int_0^\infty इ^{-य}ताय=१$ (१६७ प्रक्रम के (४) उदाहरण से जहां अ=१)

इस लिये गा(१)=१, ... (२)

यदि न अभिन्न हो तो (१) और (२) से

गा (न+१)= $\lfloor न$

परन्तु यदि न भिन्न और १ से अधिक हो तो यदि गा(म) इस का मान (जहां म ∠ १)ज्ञात हो तो (१) समीकरण से बार बार क्रिया करने से गा (न) का मान भी आ जायगा ।

२०२। यदि जय=ल तो

$$\int_0^\infty इ^{-जय}य^{न-१}\,ताय = \frac{१}{ज^{न}}\int_0^\infty इ^{-ल}ल^{न-१}\,ताल = \frac{गा\,(न)}{ज^{न}} ।$$

२०३। $\int_0^\infty\int_0^\infty य^{द+म-१}र^{म-१}इ^{-(१+र)य}$ ताय तार इस का द्विगुण चलानयन से मान ले आवें तो २०२ प्रक्रम से

$$गा(द+म)\int_0^\infty \frac{र^{म-१}तार}{(१+र)^{द+म}} = गा\,(द+म)\,बी\,(द,म)\ (२००\ वें\ प्रक्रम)$$

और ऊपर के द्विगुण चल में यदि पहले य के वश से चलानयन करें

तो $\text{गा}(\text{म}) \int_0^\infty \frac{\text{इ}^{-\text{य}}\text{य}^{\text{द}+\text{म}-१}}{\text{य}^{\text{म}}} \text{ताय} = \text{गा}(\text{म}) \int_0^\infty \text{इ}^{-\text{य}}\text{य}^{\text{द}-१}\text{ताय}$

$=\text{गा}(\text{म})\,\text{गा}(\text{द})$ इस लिये ९३ वें प्रक्रम की अन्तिम युक्ति से

$$\text{गा}(\text{द}+\text{म})\ \text{बी}\ (\text{द},\text{म}) = \text{गा}(\text{म})\ \text{गा}(\text{द})$$

$$\therefore\ \text{बी}\ (\text{द},\text{म}) = \frac{\text{गा}(\text{म})\text{गा}(\text{द})}{\text{गा}\ (\text{द}+\text{म})}$$

इस में यदि $\text{द}+\text{म}=१$ तो $\text{गा}(\text{द}+\text{म})=\text{गा}\,(१)=१$ (२०१ प्रक्रम के (२) स॰ से)

इस लिये $\text{बी}\ (\text{द},\text{म}) = \int_0^\infty \frac{\text{र}^{\text{म}-१}\text{तार}}{१+\text{र}} = \text{गा}\ (\text{म})\ \text{गा}\ (१-\text{म})$

अब यदि $\text{म} \angle १$ तो १९१वें प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$\int_0^\infty \frac{\text{र}^{\text{म}-१}\text{तार}}{१+\text{र}} = \frac{\pi}{\text{ज्याम}\,\pi}$$ इस लिये ।

$$\text{गा}(\text{म})\ \text{गा}(१-\text{म}) = \frac{\pi}{\text{ज्याम}\,\pi}$$

इस में यदि $\text{म}=\frac{१}{२}$ तो $\{\text{गा}\ (\frac{१}{२})\}^२ = \pi \ \therefore\ \text{गा}\ (\frac{१}{२}) = \sqrt{\pi}$

इसे नीचे की युक्ति से भी सिद्ध कर सके हो ।

२०४ । चलनकलन से सिद्ध है कि $\frac{\text{य}^{\text{च}}-१}{\text{च}} = \text{लाय}$ यदि $\text{च}=0$

इस लिये कल्पना करो कि $(\text{ला}\ \frac{१}{\text{य}})^{\text{न}-१} = \left[\frac{१-\text{य}^{\text{च}}}{\text{च}}\right]^{\text{न}-१} + \text{र}$

जहां जब $\text{च}=0$ तो $\text{र}=0$ । च के स्थान में $\frac{१}{\text{इ}_१}$ रक्खो तो २०१ प्रक्रम से

$$\text{गा}\ (\text{न}) = \text{इ}_१^{\text{न}-१} \int_0^१ (१-\text{य}^{\frac{१}{\text{इ}_१}})^{\text{न}-१}\text{ताय} + \int_0^१ \text{र}\ \text{ताय}$$

समशोधन से $\text{गा}(\text{न}) = \int_0^१ \text{र}\ \text{तार} = \text{इ}_१^{\text{न}-१} \int_0^१ (१-\text{य}^{\frac{१}{\text{इ}_१}})^{\text{न}-१}\text{ताय}$

$$= \text{इ}_१^{\text{न}} \int_0^१ \text{ल}^{\text{इ}_१-१}(१-\text{ल})^{\text{न}-१}\ \text{ताल},\ \text{य}=\text{ल}^{\text{इ}_१}\ \text{मानने से}$$

अब यहां हमें सामर्थ्य है कि $इ_१$ को धनात्मक और चाहे जितना बड़ा कल्पना कर सकें इस लिये यदि $इ_१ = \infty$ तो $र=0$ इस लिये ५१ प्रक्रम के (१) समीकरण से और $इ_१$, और न को बदल देने से

$$गा\ (न) = \frac{\lfloor इ_१}{न(न+१)\ \cdots (न+इ_१-१)} इ_१^{न-१} \cdots\cdots (१)$$

(१) में न के स्थान में न−म, न+म का उत्थापन देने से

$$गा(न-म) = \frac{\lfloor इ_१}{(न-म)(न-म+१)\cdot (न-म+इ_१-१)} इ_१^{न-म-१} \cdots\cdots (२)$$

$$गा(न+म) = \frac{\lfloor इ_१}{(न+म)(न+म+१)\cdots(न+म+इ_१-१)} इ_१^{न+म-१} \cdots\cdots (३)$$

इस लिये ।

$$\frac{\{गा(न)\}^२}{\{गा(न-म)\}\{गा(न+म)\}} = \frac{\dfrac{\{\lfloor इ_१\}^२ इ_१^{२न-२}}{न^२(न+१)^२ \cdots (न+इ_१-१)^२}}{\dfrac{\{\lfloor इ_१\}^२ इ_१^{२न-२}}{(न^२-म^२)\{(न+१)^२-म^२\}\cdots\{(न+इ_१-१)^२-म^२\}}}$$

$$= \frac{(न^२-म^२)\{(न+१)^२-म^२\}\cdots\{(न+इ_१-१)^२-म^२\}}{न^२(न+१)^२ \cdots\cdots (न+इ_१-१)^२}$$

$$= \left\{१-\frac{म^२}{न^२}\right\}\left\{१-\frac{म^२}{(न+१)^२}\right\}\left\{१-\frac{म^२}{(न+२)^२}\right\}\cdots\cdots (४)$$

२०५ । ऊपर के प्रक्रम के (४) समीकरण में यदि न=१ तो

$$\frac{१}{गा(१-म)गा(१+म)} = \left(१-\frac{म^२}{१^२}\right)\left(१-\frac{म^२}{२^२}\right)\left(१-\frac{म^२}{३^२}\right)\cdots\cdots$$

$= \frac{ज्याम\pi}{म\pi}$ (चलनकलन के २०वें प्रक्रम के (८)वें उदाहरण से)

इस लिये $गा(१-म)\ गा(१+म) = \frac{म\pi}{ज्याम\pi}$

परन्तु २०१ प्रक्रम के (१) समीकरण से गा(१+म)=म गा(म)

इस लिये गा(१−म) गा(म)= $\frac{\pi}{\text{ज्या}\, म\pi}$ यह सिद्ध हुआ ।

२०६ । यदि या=गा $(\frac{१}{न})$गा$(\frac{२}{न})$गा$(\frac{३}{न})$··· गा$(\frac{न+१}{न})$जहां न धन अभिन्न है

तो या = गा $(१-\frac{१}{न})$ गा $(१-\frac{२}{न})$ ··· गा$(\frac{१}{न})$ उलट के लिखने से

इस लिये या^{२}=गा$(\frac{१}{न})$गा$(१-\frac{१}{न})$गा$(\frac{२}{न})$ गा$(१-\frac{२}{न})$ ··· गा$(\frac{१}{न})$गा$(१-\frac{१}{न})$

$$=\frac{\pi^{न-१}}{\text{ज्या}\,\frac{\pi}{न}\,\text{ज्या}\,\frac{२\pi}{न}\cdots\text{ज्या}\,\frac{(न-१)\pi}{न}}$$ (ऊपर के प्रक्रम से)

परन्तु चलनकलन के ३१६ प्रक्रम के (१) समीकरण से यदि न के स्थान में २न का उत्थापन दो तो

$$\frac{य^{२न}-१}{य^{२}-१}=(१-२य\text{कोज्या}\,\frac{\pi}{न}+य^{२})(१-२य\text{कोज्या}\frac{२\pi}{न}+य^{२})\cdots$$

$(१-२य\text{कोज्या}\frac{(न-१)}{न}\pi+य^{२})$ इस में क्रम से य=१, य = − १ मान बायें पक्ष में उस का ठीक मान न रख देने से

$$न=(२\text{ज्या}\frac{\pi}{२न})^{२}(२\text{ज्या}\,\frac{२\pi}{२न})^{२}\cdots(२\text{ज्या}\frac{(न-१)\pi}{२न})^{२}$$

$$न=(२\text{कोज्या}\frac{\pi}{२न})^{२}(२\text{कोज्या}\,\frac{२\pi}{२न})^{२}\cdots(२\text{कोज्या}\frac{(न-१)\pi}{२न})^{२}$$

दोनों का घात कर मूल लेने से

$$न=२^{न-१}\text{ज्या}\,\frac{\pi}{न}\,\text{ज्या}\,\frac{२\pi}{न}\cdots\text{ज्या}\,\frac{(न-१)\pi}{न}$$

इस लिये या^{२}=$\frac{(२\pi)^{न-१}}{न}$ और या=$(२\pi)^{\frac{न-१}{२}}न^{-\frac{१}{२}}$

२०७ । यदि $फ(य)=\frac{न^{नय}गा(य)गा(य+\frac{१}{न})गा(य+\frac{२}{न})\cdots गा(य+\frac{न-१}{न})}{नगा(नय)}$ ... (१)

तो य के स्थान में य+१ का उत्थापन देने से

$$फ(य+१)=\frac{न^{नय+न}\,गा(य+१)गा(य+१+\frac{१}{न})गा(य+१+\frac{२}{न})\cdots गा(य+१+\frac{न-१}{न})}{न\,गा\,(नय+न)}$$

$$= \frac{न^{न} न^{नय} य\, गा(य)\ (य+\frac{१}{न}) गा(य+\frac{१}{न})(य+\frac{२}{न}) गा(य+\frac{२}{न}) \cdot (य+\frac{न-१}{न}) गा(य+\frac{न-१}{न})}{न\ गा\,(नय+न)}$$

$$= \frac{न^{न} य\ (य+\frac{१}{न})(य+\frac{२}{न}) \cdots (य+\frac{न-१}{न}) फ(य)}{(न\,य+न-१)\ (न\,य+न-२) \cdots न\,य} = फ(य+१)$$

$$= \frac{नय(नय+१)(नय+२) \cdots (नय+न-१)}{(नय+न-१)(नय+न-२) \cdots नय}\ फ(य) = फ(य)$$

इसी तरह $फ(य+२) = फ(य+१) = फ(य) = फ(य+म)$ जहां म चाहे जैसा बड़ा मान सक्ते हैं । इस लिये $फ(य) = फ(इ_१)$ जहां $इ_१ = \infty$ । इस लिये फ(य), य से स्वतन्त्र है अर्थात् फ(य) का मान सर्वदा एक ही होगा चाहे य का कोई मान हो । इस लिये जब $य = \frac{१}{न}$ तो (१) में उत्थापन देने से ।

तो $फ(य) = गा(\frac{१}{न})\, गा(\frac{२}{न})\, गा(\frac{३}{न})\, गा(\frac{न-१}{न}) = (२\pi)^{\frac{न-१}{२}}\, न^{-\frac{१}{२}}$ (२०६ प्रक्रम से)

और जब

$$\frac{न^{नय}\ गा(य)\, गा(य+\frac{१}{न})\, गा(य+\frac{२}{न}) \cdots गा(य+\frac{न-१}{न})}{न\ गा(नय)} = (२\pi)^{\frac{न-१}{२}}\, न^{-\frac{१}{२}}$$

इस लिये ।

$$गा(य)\, गा(य+\frac{१}{न})\, गा(य+\frac{२}{न}) \cdots गा(य+\frac{न-१}{न}) = गा(नय)\,(२\pi)^{\frac{न-१}{२}}\, न^{\frac{१}{२}-नय} \quad \cdots \ (२)$$

यह एक साधारण सिद्धान्त उत्पन्न हुआ । इस में यदि $य = \frac{१}{न}$ तो २०६ प्रक्रम का सिद्धान्त उत्पन्न हो जायगा ।

इस (२) समीकरण के सिद्धान्त को गास (Gauss) ने वर्णन किया है ।

२०८ । ऊपर के प्रक्रम में (२) का लघुरिक्थ ले कर य के वश तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से ।

$$\frac{न गा'(नय)}{गा(नय)} = \frac{गा'(य)}{गा(य)} + \frac{गा'(य+\frac{१}{न})}{गा(य+\frac{१}{न})} + \cdots + \frac{गा'(य+\frac{न-१}{न})}{गा(य+\frac{न-१}{न})} + नलान \cdots (१)$$

जहां गा'(नय) इत्यादि $\frac{ता}{ताय}\{गा(नय)\}$ इत्यादि के बोधक हैं ।

(१) का फिर तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से और नय के स्थान में ल को रखने से।

$$\frac{\text{ता}^2\text{लागा}(\text{ल})}{\text{ताल}^2}$$

$$=\frac{१}{\text{न}^2}\left\{\frac{\text{ता}^2\text{लागा}(\text{य})}{\text{ताय}^2}+\frac{\text{ता}^2\text{लागा}(\text{य}+\frac{१}{\text{न}})}{\text{ताय}^2}+\cdots+\frac{\text{ता}^2\text{लागा}(\text{य}+\frac{\text{न}-१}{\text{न}})}{\text{ताय}^2}\right\}$$

यदि न का मान अनन्त कल्पना करें तो दहने पक्ष का मान ४० प्रक्रम के अनुसार

$$\frac{१}{\text{न}}\int_{\text{य}}^{\text{य}+१}\frac{\text{ता}^2\text{लागा}(\text{य})}{\text{ताय}^2}\text{ताय}=\frac{१}{\text{न}}\left\{\frac{\text{तालागा}(\text{य}+१)}{\text{ताय}}-\frac{\text{तालागा}(\text{य})}{\text{ताय}}\right\}$$

$$=\frac{१}{\text{न}}\left\{\frac{\text{तालाय}+\text{ताला गा}(\text{य})}{\text{ताय}}-\frac{\text{ताला गा}(\text{य})}{\text{ताल}}\right\}=\frac{१}{\text{न}}\left\{\frac{१}{\text{य}}\right\}=\frac{१}{\text{नय}}=०$$

इस लिये यदि नय अर्थात् ल अनन्त हो तो $\frac{\text{ता}^2\text{ला गा}(\text{ल})}{\text{ता}^2\text{ल}}$ यह शून्य के तुल्य होगा।

अब २०१ प्रक्रम के (१) समीकरण से।

$$\text{गा}(\text{य})=\frac{\text{गा}(\text{य}+१)}{\text{य}}=\frac{\text{गा}(\text{य}+२)}{\text{य}(\text{य}+१)}=\frac{\text{गा}(\text{य}+३)}{\text{य}(\text{य}+१)(\text{य}+२)}=\frac{\text{गा}(\text{य}+\text{न})}{\text{य}(\text{य}+१)\cdots(\text{य}+\text{न}-१)},\text{जहां न}=\infty$$

इस के लघुरिक्थ का तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से।

$$\frac{\text{तालागा}(\text{य})}{\text{ताय}}=\frac{\text{तालागा}(\text{य}+\text{न})}{\text{ताय}}-\left(\frac{१}{\text{य}}+\frac{१}{(\text{य}+१)}+\cdots+\frac{१}{(\text{य}+\text{न}-१)}\right)$$

इस का फिर तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से और ऊपर की युक्ति से $\frac{\text{ता}^2\text{लागा}(\text{य}+\text{न})}{\text{ताय}^2}=०$ करने से।

$$\frac{\text{ता}^2\text{लागा}(\text{य})}{\text{ताय}^2}=\frac{१}{\text{य}^2}+\frac{१}{(\text{य}+१)^2}+\frac{१}{(\text{य}+२)^2}+\cdots\text{अनन्त}\cdots(२)$$

इस का य के १ और य के मान में सान्तचलानयन करने से।

$$\frac{\text{तालागा}(\text{य})}{\text{ताय}}+\text{स्थि}=\left(१-\frac{१}{\text{य}}\right)+\left(\frac{१}{२}-\frac{१}{\text{य}+१}\right)+\left(\frac{१}{३}-\frac{१}{\text{य}+२}\right)+\cdots\cdots\quad(३)$$

इस में यदि य=१ तो दहना पक्ष शून्य हो जायगा इस लिये।

$$\frac{\text{तालागा(य)}}{\text{ताय}} = -\text{स्थि} = \frac{\text{गा}'(१)}{\text{गा}(१)} = \text{गा}'(१)$$

अर्थात् स्थि= $-$गा$'$(१)। इस को यूलर का स्थिराङ्क कहते हैं। और (३) में जो श्रेढी उत्पन्न हुई है वह य के प्रत्येक धन मान में सान्त होगी अर्थात् उस का प्रत्येक धन य के मान में मान एक निश्चित संख्या के भीतर ही रहेगा।

गा(न)= $\int_0^{\infty}$ इ$^{-\text{य}}$य$^{\text{न}-१}$ताय इस का १९४ प्रक्रम के (१) समीकरण से न के वश तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से गा$'$(न)= $\int_0^{\infty}$ इ$^{-\text{य}}$ य$^{\text{न}-१}$लाय ताय

इस लिये गा$'$(१)= $\int_0^{\infty}$ इ$^{-\text{य}}$ लाय ताय

(१) समीकरण में मानो कि य=१ तो

$$\frac{\text{गा}'(\text{न})}{\text{गा}(\text{न})} - \text{लान} = \frac{१}{\text{न}}\left\{\frac{\text{गा}'(१)}{\text{गा}(१)} + \frac{\text{गा}'(१+\frac{१}{\text{न}})}{\text{गा}(१+\frac{१}{\text{न}})} + \cdots + \frac{\text{गा}'(१+\frac{\text{न}-१}{\text{न}})}{\text{गा}(१+\frac{\text{न}-१}{\text{न}})}\right\}$$

इस में यदि न=∞ तो ४० प्रक्रम के श्रेढी द्वारा दहना पक्ष $\int_1^2 \frac{\text{तालागा(य)}}{\text{ताय}}$ =लागा(२)-लागा(१)=० क्योंकि २०१ प्रक्रम के (१) समीकरण से गा(२)=गा(१)

इस लिये यदि न=∞ तो $\frac{\text{गा}'(\text{न})}{\text{गा}(\text{न})}$ $-$ लान=० ऐसा होगा।

(३) में यदि य=∞ तो ऊपर की युक्ति से $\frac{\text{तालागा(य)}}{\text{ताय}} = \frac{\text{गा}'(\text{य})}{\text{गा}(\text{य})} - \text{लान} = 0$

इस लिये स्थि= $१ + \frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \cdots + \frac{१}{\text{न}} - \text{लान}$।

परन्तु $\frac{१}{\text{न}} = \frac{१}{२}\times\frac{२}{३}\times\frac{३}{४}\cdots\frac{\text{न}-१}{\text{न}}$ इसलिये-लान=ला$\frac{१}{\text{न}}$=ला$\frac{१}{२}$+ला$\frac{२}{३}\cdots$+ला$\frac{\text{न}-१}{\text{न}}$

इस लिये स्थि= $१ + \frac{१}{२} + \text{ला}\frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \text{ला}\frac{२}{३} + \cdots$

$$= १ + \frac{१}{२} + \text{ला}\left(१-\frac{१}{२}\right) + \frac{१}{३} + \text{ला}\left(१-\frac{१}{३}\right) + \cdots$$

इस लिये साधारण रीति से पहले पद को छोड़ कर दो दो पदों को मिला कर एक पद मानने से न संख्यक पद= $\frac{१}{\text{न}} + \text{ला}\left(१-\frac{१}{\text{न}}\right)$

$$= \frac{१}{\text{न}} - \frac{१}{\text{न}} - \frac{१}{२\text{न}^२} - \frac{१}{३\text{न}^३} - \frac{१}{४\text{न}^४} - \cdots = -\frac{१}{\text{न}^२}\left(\frac{१}{२} + \frac{१}{३\text{न}} + \frac{१}{४\text{न}^२} + \cdots\right)$$

इस लिये $स्थि = १ - यो \left\{ \frac{१}{न^२}\left(\frac{१}{२} + \frac{१}{३न} + \frac{१}{४न^२} + \cdots\right) \right\}$

$= १ + यो \left\{ \frac{१}{न} + ला\left(१ - \frac{१}{न}\right) \right\} \cdots \quad (४)$

जहां न के स्थान में २,३,४, इत्यादि का उत्थापन देने से $\frac{१}{न^२}\left(\frac{१}{२} + \frac{१}{३न} + \cdots\right)$

इस के वा $\frac{१}{न} + ला\left(१ - \frac{१}{न}\right)$ इस के जितने मान होंगे उन का योग यो से अपेक्षित है ।

स्थिर का मान जानने के लिये (४) समीकरण में जितनाही अधिक दशमलव अपेक्षित हो उतनीही न की संख्या बढ़ाते जावो ।

स्थिर का मान १० दशमलव तक ·५७७२१५६६४६ यह है । सो दशमलव से भी अधिक स्थान तक इसका मान परिगणित है ।

(See Proceedings of the Royal Society, Vol. XIX. P. 514, and Vol. XX. P. 29)

२०६ । ऊपर के प्रक्रम के (२) समीकरण में यदि य के स्थान में य+१ का उत्थापन दें

तो $\frac{ता^२लागा(य+१)}{ताय^२} = \frac{१}{(य+१)^२} + \frac{१}{(य+१)^२} + \frac{१}{(य+३)^२} + \cdots\cdots$ ।

न-२ वार तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{ता^नलागा(य+१)}{ताय^न} = (-१)^न \lfloor न-१ \left\{ \frac{१}{(य+१)^न} + \frac{१}{(य+२)^न} + \frac{१}{(य+३)^न} + \cdots \right\}$$

कल्पना करो कि $सा_न = १ + \frac{१}{२^न} + \frac{१}{३^न} + \cdots + अनन्त$

तो ऊपर के समीकरण में यदि य=० और न > २ तो

$$\frac{ता^नलागा(य+१)}{ताय^न} = सा_न(-१)^न \lfloor न-१$$

परन्तु जब य=० तो $\frac{तालागा(य+१)}{ताय} = \frac{गा'(१)}{गा(१)} = -स्थि$ (२०८ प्रक्रम

के (३) समीकरण से) और लागा (१+य) = लागा (१) = ला (१) = ०, इस लिये म्याक्लरिन (maclaurin) के सिद्धान्त से

$$\text{लागा}(१+\text{य}) = -\text{स्थिय} + \frac{\text{सा}_२\text{य}^२}{२} - \frac{\text{सा}_३\text{य}^३}{३} + \frac{\text{सा}_४\text{य}^४}{४} - \frac{\text{सा}_५\text{य}^५}{५} + \cdots \quad (१)$$

यदि य का मान १ से अल्प हो तो यह श्रेढी सान्त होगी ।

२०१ प्रक्रम का (१) समीकरण और २०५ प्रक्रम का अन्तिम समीकरण दोनों पर से सिद्ध है कि यदि य के ०, और $\frac{१}{२}$ के भीतर सब मानों में गा(य) इस का मान विदित हो तो, $\frac{१}{२}$, १ इन मानों में वा १, १$\frac{१}{२}$ इन मानों में अर्थात् वार वार क्रिया करने से य के सब धन मानों में गा(य) का मान जान सक्ते हैं ।

परन्तु (१) समीकरण की श्रेढी य के ० से लेकर $\frac{१}{२}$ तक सब मानों में लागा(१+य) इस का मान बनाती है फिर इन लघुरिक्थ पर से १, से ले १$\frac{१}{२}$ तक सब मानों में गा(य) का मान निकल आवेगा, इस तरह सब य के धन मानों में गा(य) का मान जान सक्ते हैं ।

२१० । $\text{लागा}(१+\text{य}) = -\text{स्थिय} + \frac{\text{सा}_२\text{य}^२}{२} - \frac{\text{सा}_३\text{य}^३}{३} + \cdots$

इस लिये $\text{लागा}(१-\text{य}) = \text{स्थिय} + \frac{\text{सा}_२\text{य}^२}{२} + \frac{\text{सा}_३\text{य}^३}{३} + \cdots$

$\therefore$ $\text{लागा}(१+\text{य}) + \text{लागा}(१-\text{य}) = \text{ला}\{\text{गा}(१+\text{य})\ \text{गा}(१-\text{य})\}$
$= \text{ला}\{\text{यगा}(\text{य})\text{गा}(१-\text{य})\} = \text{लाय} + \text{ला}\{\text{गा}(\text{य})\text{गा}(१-\text{य})\}$

$= \text{ला}\left(\frac{\pi\text{य}}{\text{ज्याय}\pi}\right)$, ⋯⋯ (२०५ प्रक्रम से)

$= २\left(\frac{\text{सा}_२\text{य}^२}{२} + \frac{\text{सा}_४\text{य}^४}{४} + \cdots\right) = \text{ला}\{\text{गा}(१+\text{य})\text{गा}(१-\text{य})\} = \text{ला}\frac{\text{य}\pi}{\text{ज्याय}\pi}$

इसी तरह $-२\left(\text{स्थिय} + \frac{\text{सा}_३\text{य}^३}{३} + \cdots\right) = \text{ला}\left\{\frac{\text{गा}(१+\text{य})}{\text{गा}(१-\text{य})}\right\}$

दोनों को जोड़ देने से $\text{ला}\frac{\text{य}\pi}{\text{ज्याय}\pi} - २\left(\text{स्थिय} + \frac{\text{सा}_३\text{य}^३}{३}\ \frac{\text{सा}_५\text{य}^५}{५} + \cdots\right)$

$=\text{ला}\{\text{गा}\ (१+\text{य})\}^{२}$

इस लिये $\text{ला}(१+\text{य})=\frac{१}{२}\ \text{ला}\frac{\text{य}\pi}{\text{ज्या}\ \text{य}\pi}-(\text{स्थि}\,\text{य}+\frac{\text{सा}_{३}\text{य}^{३}}{३}+\frac{\text{सा}_{५}\text{य}^{५}}{५}+\cdots)$

$=\frac{१}{२}\ \text{ला}\frac{\text{य}\pi}{\text{ज्या}\ \text{य}\pi}-\text{ला}\frac{१+\text{य}}{१-\text{य}}+(१-\text{स्थि})\text{य}-\frac{१}{३}(\text{सा}_{३}-१)\text{य}^{३}-\frac{१}{५}(\text{सा}_{५}-१)\text{य}^{५}-\cdots$

य का मान $\frac{१}{२}$ से अल्प हो तो यह श्रेढी बहुत शीघ्र सान्त हो जायगी ।

२११ । गा (१+य) इस का न्यूनतम मान निकालना हो तो पीछे जो लागा(१+य) का मान निकला है उसका तात्कालिक सम्बन्ध निकाल उसको शून्य के तुल्य करो । इस तरह से यदि मान निकालो तो असकृद्विधि से

गा (१+य) के न्यूनतम मान में, १+य=१ · ४६१६३२१४५११०५ ।

लेजेण्ड्र (Legendre) साहब ने लागा (य+१) के मान के लिये एक सारणी बना डाली है जिस में से संक्षेप कर के य के १,२ मानों के भीतर लागा (य) के मान हम इस अध्याय के अन्त में लिखेंगे ।

२१२ । बहुत से सान्तचलों का मान गाढ फल के रूप में आजाता है जैसे $\int_{0}^{\infty}\text{इ}^{-\text{अ}^{२}\text{य}^{२}}\text{ताय}$ इस में यदि $\text{अ}^{२}\text{य}^{२}=\text{र}$ तो

$$\int_{0}^{\infty}\text{इ}^{-\text{अ}^{२}\text{य}^{२}}\text{ताय}=\int_{0}^{\infty}\frac{\text{इ}^{-\text{र}}\text{तार}}{२\text{अ}\sqrt{\text{र}}}=\int_{0}^{\infty}\frac{\text{इ}^{-\text{र}}\text{र}^{\frac{१}{२}-१}\text{तार}}{२\text{अ}}=\frac{१}{२\text{अ}}\ \text{गा}\ (\tfrac{१}{२})$$

(गाढ़ फल के लक्षण से) $=\frac{\sqrt{\pi}}{२\text{अ}}$ (२०५वें प्रक्रम से)·

और $\int_{0}^{१}\frac{\text{य}^{\text{द}-१}(१-\text{य})^{\text{म}-१}}{(\text{य}+\text{अ})^{\text{द}+\text{म}}}\text{ताय}$

इस में यदि $\frac{\text{य}}{\text{य}+\text{अ}}=\frac{\text{र}}{१+\text{अ}}$ तो $\text{य}=\text{र}\text{अ}\div१+\text{अ}-\text{र}$

$$\int_{0}^{१}\frac{\text{य}^{\text{द}-१}(१-\text{य})^{\text{म}-१}}{(\text{य}+\text{अ})^{\text{द}+\text{म}}}\text{ताय}=\frac{१}{\text{अ}^{\text{म}}(१+\text{अ})^{\text{द}}}\int_{0}^{१}\text{र}^{\text{द}-१}(१-\text{र})^{\text{म}-१}\ \text{तार}$$

$$=\frac{१}{\text{अ}^{\text{म}}(१+\text{अ})^{\text{द}}}\text{बी}\ (\text{द},\text{म})\frac{१}{\text{अ}^{\text{म}}(१+\text{अ})^{\text{द}}}\ \frac{\text{गा}(\text{द})\ \text{गा}(\text{म})}{\text{गा}\ (\text{द}+\text{म})}$$ (२०३ प्रक्रम से)

फिर $\int_०^१ य^{द-१}(१-य^२)^{म-१}ताय$ इस में मानो कि $य^२=र$ तो

$$\int_०^१ य^{द-१}(१-य^२)^{म-१}ताय=\frac{१}{२}\int_०^१ र^{\frac{द}{२}-१}(१-र)^{म-१}तार=\frac{गा(\frac{द}{२})गा(म)}{२गा(\frac{द}{२}+म)}$$

इस तरह से $\int_०^{\frac{\pi}{२}} ज्या^पष कोज्या^बष ताष$ इस में यदि ज्याष=य तो

$$\int_०^{\frac{\pi}{२}} ज्या^पष कोज्या^बष ताष=\int_०^१ य^{प+१-१}(१-य^२)^{\frac{ब+१}{२}-१}ताय$$

$$=\frac{गा(\frac{प+१}{२})गा(\frac{ब+१}{२})}{२गा(\frac{प+ब}{२}+१)}$$

फिर $\int_०^१ \frac{य^{द-१}(१-य)^{म-१}ताय}{\{अय+क(१-य)\}^{द+म}}$ इस में मानो कि $य=\frac{कर}{अ(१-र)+कर}$ तो इसका

रूप$=\frac{१}{अ^दक^म}\int_०^१ र^{द-१}(१-र)^{म-१}तार=\frac{गा(द)गा(म)}{अ^दक^मगा(द+म)}$

फिर $\int_०^अ य^{द-१}(अ-य)^{म-१}ताय$ इस में मान लो कि य=अर तो इस का

रूप$=अ^{द+म-१}\int_०^१ र^{द-१}(१-र)^{म-१}तार=अ^{द+म-१}\frac{गा(द)गा(म)}{गा(द+म)}\cdots(१)$

२१३। $\int\int\int\cdots य^{द-१}र^{म-१}ल^{न-१}\cdots\cdots$ ताल तार ताय ....

इस अनेक गुण चल का मान गाढ़ फल के रूप में ले आवो। जहां जानते हैं कि $य+र+ल+\cdots\angle १$ और सब चल संख्याओं का मान ऐसा माना गया है जिस में अनेक गुण चल का मान धन हो।

यहां पहले ल के वश से चलानयन करने से और ०, १-य-र सीमा मानने से $\int ल^{न-१}ताल=\frac{(१-य-र)^न}{न}=\frac{गा(न)}{गा(न+१)}(१-य-र)^न$ फिर र के वश से चलानयन करने से र के ०, १-य के मान के भीतर

$$\int र^{म-१}(१-य-र)^न तार=\frac{(१-य)^{म+न}(गाम)गा)न+१)}{गा(म+न+१)}$$, २१२ प्रक्रम के (१) समीकरण से

अन्त में य के वश चलानयन से और ०, १ सीमा मानने से ।

$\int य^{द-१}(१-य)^{म+न} ताय = \frac{गा(द)गा(म+न+१)}{गा(द+म+न+१)}$ इस लिये अभीष्ट अनेक गुण चल का मान $\frac{गा(न)}{गा(न+१)}\ \frac{गा(म)गा(न+१)}{गा(म+न+१)}\ \frac{गा(द)गा(म+न+१)}{गा(द+म+न+१)}$

२१४ । $\int\int\int\cdots अ_१^{द-१} क_१^{म-१} ख_१^{न-१} \cdots\cdots ताख_१ ताक_१ ताअ_१$ इस का मान गाऊ फल के रूप में जानना है

जहां $\left[\frac{अ_१}{अ}\right]^{प} + \left[\frac{क_१}{क}\right]^{ब} + \left[\frac{ख_१}{ख}\right]^{भ} + \cdots\cdots \angle १$ और चल संख्याओं का मान ऐसा है जिस में सब धन मान हैं ।

मान लो कि $य = \left[\frac{अ_१}{अ}\right]^{प},\ र = \left[\frac{क_१}{क}\right]^{ब},\ ल = \left[\frac{ख_१}{ख}\right]^{भ}, \cdots\cdots$

तो ऊपर के प्रक्रम से चल का रूप

$$= \frac{अ^{द} क^{म} ख^{न} \cdots\cdots}{प ब भ \cdots\cdots}\ \frac{गा(\frac{द}{प})गा(\frac{म}{ब})गा(\frac{न}{भ})}{गा(\frac{द}{प}+\frac{म}{ब}+\frac{न}{भ}+\cdots+१)}$$

यह सिद्धान्त लेज्यून डिरिचलेट् (Lejeune Dirichlet.) का निकाला है ।

इस में यदि $प = ब = \cdots\cdots = १$ और $च = अ = क = ख$ तो

$$\int\int\int\cdots अ_१^{द-१} क_१^{म-१} ख_१^{न-१} \cdots ताख_१ ताक_१ ताअ_१ \cdots\cdots \quad (अ_१ + क_१ + ख_१ + \cdots \angle च)$$

$$= \frac{च^{द+म+न} गा(द)गा(म)गा(न)}{गा(द+म+न+\cdots\cdots+१)} = ना\ च^{द+म+न+\cdots}$$

जहां $ना = \frac{गा(द)गा(म)गा(न)}{गा(द+म+न+\cdots+१)}$

इसी प्रकार यदि चलानयन ऐसा किया जाय जिस में $अ_१ + क_१ + ख_१ + \cdots \angle च + \triangle च$

तो ऊपर की युक्ति से उस का मान $ना(च+\triangle च)^{द+म+न}$ ऐसा होगा ।

इस लिये दोनों का अन्तर $ना\{(च+\triangle च)^{द+म+न+\cdots} - च^{द+म+न+\cdots}\}$

$= ना(द+म+न+\cdots)च^{द+म+न+\cdots-१} \triangle च$ यदि $\triangle च$ अत्यन्त अल्प हो

$= \frac{गा(द)गा(म)गा(न)\cdots\cdots}{गा(द+म+न+\cdots\cdots)} च^{द+म+न+\cdots\cdots-१} \triangle च$

२१५। $\iiint\cdots$ य$^{द-१}$र$^{म-१}$ल$^{न-१}\cdots$ फ(य+र+ल+⋯)तालतारताय इस का मान एक चलानयन के रूप में ले आना है, जहां चलानयन ऐसा किया गया है जिस में सब चलों के धन मान लिये गये हैं जहां य+र+ल+⋯∠ग।

लाघव के लिये मान लो कि तीन चलराशि हैं।

यहां ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से यदि फ(य+र+ल) के स्थान में १ मान लें तो उस भाग का चल जो कि योग के च, च+△च के भीतर है $\frac{\text{गा(द)गा(म)गा(न)}}{\text{गा(द+म+न)}}$ च$^{द+म+न+\cdots-१}$ △च यह होगा

परन्तु फ(य+र+ल) = फ(च) के स्थान में १ रख कर ऊपर का मान दिखलाया है इस लिये उस को फ(च) से गुण देने से $\frac{\text{गा(द)गा(म)गा(न)}}{\text{गा(द+म+न)}}$ फ(च) च$^{द+म+न+\cdots-१}$ △च यह एक खण्ड की गति हुई इस लिये सम्पूर्ण चल = $\frac{\text{गा(द)गा(म)गा(न)}}{\text{गा(द+म+न)}}\int_0^{ग}$फ(च) च$^{द+म+न+\cdots-१}$ ताच यही रीति चाहे जितनी चलराशि हों सर्वत्र दिखलाई जा सक्ती है।

२१६। इसी प्रकार त्रिगुण चल

$$\iiint अ_१^{द-१}\, क_१^{म-१}\, ख_१^{न-१}\, फ\left\{\left(\frac{अ_१}{अ}\right)^{प}+\left(\frac{क_१}{क}\right)^{ब}+\left(\frac{ख_१}{ख}\right)^{भ}\right\} ताख_१ ताक_१ ताअ_१$$

यह जहां चलराशियों के सब धन मान में

$$\left(\frac{अ_१}{अ}\right)^{प}+\left(\frac{क_१}{क}\right)^{ब}+\left(\frac{ख_१}{ख}\right)^{भ} \text{ यह ग से अधिक नहीं है}$$

$$\frac{अ^{द}क^{म}ख^{न}}{पबभ}\,\frac{\text{गा}\left(\frac{द}{प}\right)\text{गा}\left(\frac{म}{ब}\right)\text{गा}\left(\frac{न}{भ}\right)}{\text{गा}\left(\frac{द}{प}+\frac{म}{ब}+\frac{न}{भ}\right)}\int_0^{ग}फ(च)च^{\frac{द}{प}+\frac{म}{ब}+\frac{न}{भ}-१}\,ताच$$

इस के तुल्य होगा।

यह रीति चाहे जितनी चलराशि हों सर्वत्र दिखलाई जा सक्ती है।

२१७। $\iint\frac{य^{प-१}र^{ब-१}\,तायतार}{(त+अय+कर)^{प+ब}}$ इस का रूप साधारण चलानयन के अर्थात् एक चलानयन के स्वरूप में ले आना है जहां य,र के सब मान

घन हैं और य+र यह ज से अधिक नहीं है। और प, ब, त, अ, और क सब घन स्थिराङ्क हैं। मान लो कि अ > क तो

$$त + अय + कर = त + अ(य+र) - (अ-क)र = श - ह$$

जहां $श = त + अ(य+र)$, $ह = (अ-क)र$

इस लिये $(त + अय + कर)^{-प-ब}$

$$= श^{-प-ब}\left\{१ + (प+ब)\frac{ह}{श} + \frac{(प+ब)(प+ब+१)}{\lfloor २}\frac{ह^२}{श^२} + \cdots\right\}$$

यह श्रेढ़ी सान्त होगी।

अब ऊपर का द्विगुण चल २१५वें प्रक्रम से एक चलानयन के रूप में आ सक्ता है अर्थात् $\iint \frac{य^{प-१}र^{ब-१}तायतार}{(त+अय+कर)^{प+ब}}$

$$= \iint\left[\frac{य^{प-१}र^{ब-१}}{श^{प+ब}} + \frac{(प+ब)(अ-क)य^{प-१}र^{ब}}{श^{प+ब+१}}\right.$$

$$\left. + \frac{(प+ब)(प+ब+१)(अ-क)^२य^{प-१}र^{ब+१}}{\lfloor २\; श^{प+ब+२}} + \cdots\right]तायतार$$

$$= \int_0^ज\left\{\frac{गा(प)गा(ब)}{गा(प+ब)}\frac{ट^{प+ब-१}}{(त+अट)^{प+ब}} + \frac{गा(प)गा(ब+१)}{गा(प+ब+१)}(प+ब)(अ-क)\frac{ट^{प+ब}}{(त+अट)^{प+ब+१}}\right.$$

$$\left. + \frac{गा(प)गा(ब+२)}{गा(प+ब+२)}\cdot\frac{(प+ब)(प+ब+१)}{\lfloor २}\frac{(अ-क)^२ट^{प+ब+१}}{(त+अट)^{प+ब+२}} + \cdots\right\}ताट$$

$$= गा(प)\int_0^ज\frac{ट^{प+ब-१}}{(त+अट)^{प+ब}}\left\{\frac{गा(ब)}{गा(प+ब)} + \frac{(प+ब)\,गा(ब+१)}{गा(प+ब+१)}\frac{(अ-क)ट}{(त+अट)}\right.$$

$$\left. + \frac{(प+ब)(प+ब+१)गा(ब+२)}{गा(प+ब+२)}\frac{(अ-क)^२ट^२}{१\cdot२(त+अट)^२} + \cdots\right\}ताट$$

$$=\frac{गा(प)गा(ब)}{गा(प+ब)}\int_0^{ज}\frac{ट^{प+ब-१}}{(त+अट)^{प+ब}}\left\{१+\frac{ब(अ-क)ट}{त+अट}+\frac{ब(ब+१)}{\lfloor २}\frac{(अ-क)^२ट^२}{(त+अट)^२}+\cdots\right\}ताट$$

$$=\frac{गा(प)गाब}{गा(प+ब)}\int_0^{ज}\frac{ट^{प+ब-१}}{(त+अट)^{प+ब}}\left\{१-\frac{(अ-क)ट}{त+अट}\right\}^{-ब}ताट$$

$$=\frac{गा(प)गाब}{गा(प+ब)}\int_0^{ज}\frac{ट^{प+ब-१}ताट}{(त+अट)^{प}(त+कट)^{ब}}$$

इस तरह से अनेक सिद्धान्त बना सक्ते हो।

२१८। $\int_0^{\infty} इ^{-अ^२य^२}$ कोज्या२रयताय इस का मान जानना है जहां र और य परस्पर स्वतन्त्र हैं। मान लो कि उद्दिष्ट सान्तचल = स है तो १८४ प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$\frac{तास}{तार}=-२\int_0^{\infty} यइ^{-अ^२य^२}ज्या२रयताय$$

परन्तु $\int यइ^{-अ^२य^२}ज्या२रयताय$

$$=-\frac{इ^{-अ^२य^२}ज्या२रय}{२अ^२}+\frac{२र}{२अ^२}\int इ^{-अ^२य^२}कोज्या२रयताय$$

(खण्ड चलानयन से)

इस लिये $\int_0^{\infty} यइ^{-अ^२य^२}ज्या२रयताय=\frac{२र}{२अ^२}\int_0^{\infty}इ^{-अ^२य^२}कोज्या२रय$

$$=\frac{२रस}{२अ^२}\quad इस\ लिये\ \frac{तास}{तार}=-\frac{२रस}{अ^२}$$

स का भाग दे देने से

$$\frac{\frac{तास}{स}}{तार}=\frac{ताला(स)}{तार}=-\frac{२र}{अ^२}\therefore लास=-\frac{र^२}{अ^२}+स्थि$$

इस लिये $स=आ\ इ^{-\frac{र^२}{अ^२}}$

जहां आ कोई र के वश से स्थिराङ्क है।

मान लो कि $र=0$ तो $\int_0^\infty इ^{-अ^2 य^2} ताय = \frac{\sqrt{\pi}}{२अ}$ (२१२वें प्रक्रम से)

इस लिये $आ = \frac{\sqrt{\pi}}{२अ}$, और

$$\int_0^\infty इ^{-अ^2 य^2} \quad कोज्यारयताय = \frac{\sqrt{\pi}}{२अ} इ^{-\frac{र^2}{अ^2}}$$

यद्यपि १६४ प्रक्रम में लिख आये हैं कि यदि कोई सीमा अनन्त के तुल्य न हो तब १६४ प्रक्रम का (१) समीकरण सत्य होगा परन्तु इस स्थान में अनन्त सीमा होने पर भी ठीक होगा क्योंकि दूसरा खण्ड यहां पर $\int_0^\infty इ^{-अ^2 य^2} इ_1$ ताय शून्य ही होगा यदि $इ_1 = 0$ हो तो क्योंकि ४०वें प्रक्रम की युक्ति से मान लो कि श्रेढी में $इ_1$ का सब से बड़ा मान यदि $इ_2$ हो तो $\int_0^\infty इ^{-अ^2 य^2} इ_1$ ताय यह $इ_2 \int_0^\infty इ^{-अ^2 य^2}$ ताय इस से अर्थात् $\frac{\sqrt{\pi}}{२अ} इ_2$ इस से छोटा होगा परन्तु कल्पना जैसा किया है उस के धर्म्म से $इ_2 = 0$ होगा इस लिये दूसरे खण्ड का नाश हो जाने से १६४ प्रक्रम का (१) समीकरण यहां ठीक ही हुआ।

२१६। $\int_0^\infty इ^{-जय} \frac{ज्यारय}{य}$ ताय इस का मान जानना है जहां ज स्थिराङ्क और र, य परस्पर स्वतन्त्र हैं। यहां मान का मान स मान लो तो १६४ प्रक्रम से

$$\frac{तास}{तार} = \int_0^\infty इ^{-जय} कोज्यारयताय$$

परन्तु $\int इ^{-जय}$ कोज्यारयताय

$$= इ^{-जय} \frac{रज्यारय - जकोज्यारय}{ज^2 + र^2} \text{ खण्ड चलानयन से}$$

इस लिये $\int_0^\infty इ^{-जय}$ कोज्यारयताय $= \dfrac{ज}{ज^2 + र^2}$ .... (१)

इस तरह से $\frac{\text{तास}}{\text{तार}} = \frac{\text{ज}}{\text{ज}^2+\text{र}^2}$

इस लिये $\text{स} = \text{स्प}^{-1}\frac{\text{र}}{\text{ज}}$ .. .. (२)

यहां पर स्थिराङ्क की अपेक्षा नहीं है क्योंकि यदि $\text{र} = 0$ तो स भी शून्य हो जायगा। यहां ज के सब धन मान में स का मान ठीक होगा इस लिये यदि $\text{ज} = 0$ तो $\text{स} = \text{स्प}^{-1}\frac{\text{र}}{\text{ज}} = \frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\text{ज्याजय}}{\text{य}}$ ताय

यदि ज ऋणात्मक हो तो स का मान $-\frac{\pi}{2}$ होगा।

इस पर से $\int_0^\infty \frac{\text{ज्या कय को ज्या अय}}{\text{य}}$ ताय इस का मान जान सक्ते हैं क्योंकि सरलत्रिकोणमिति से यह

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\text{ज्या (क+अ) य}}{\text{य}}\ \text{ताय} + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\text{ज्या (क−अ) य}}{\text{य}}\ \text{ताय}$$

इस के तुल्य हुआ और (२) समीकरण में $\text{ज} = 0$ मानने से दोनों खण्डों का मान $\frac{\pi}{4}$ इस लिये।

$\int_0^\infty \frac{\text{ज्या कय को ज्या अय}}{\text{य}}\ \text{ताय} = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ परन्तु यदि $\text{अ} > \text{क}$ तो

ऊपर की युक्ति से $\int_0^\infty \frac{\text{ज्या कय को ज्या अय}}{\text{य}}\ \text{ताय} = 0$ यह होगा।

२२०। $\text{स} = \int_0^\infty \text{इ}^{-\left(\text{य}^2+\frac{\text{अ}^2}{\text{य}^2}\right)}$ ताय इस का मान जानना है।

यहां $\frac{\text{तास}}{\text{ताअ}} = -२\text{अ} \int_0^\infty \text{इ}^{-\left(\text{य}^2+\frac{\text{अ}^2}{\text{य}^2}\right)} \frac{\text{ताय}}{\text{य}^2}$ इस में यदि $\text{य} = \frac{\text{अ}}{\text{ल}}$

तो $\text{य}^2+\frac{\text{अ}^2}{\text{य}^2} = \frac{\text{अ}^2}{\text{ल}^2}+\text{ल}^2, \frac{\text{ताय}}{\text{य}^2} = -\frac{\text{अ ताल}}{\text{ल}^2}\ \frac{\times\text{ल}^2}{\text{अ}} = -\text{ताल}$

इस लिये $\frac{\text{तास}}{\text{ताअ}} = -२\,\text{अ}\int_0^{\infty} \text{इ}^{-\left(\text{य}^२+\frac{\text{अ}^२}{\text{य}^२}\right)} \frac{\text{ताय}}{\text{य}^२}$

$$= २\,\text{अ}\int_{\infty}^{0} \text{इ}^{-\left(\text{ल}^२+\frac{\text{अ}^२}{\text{ल}^२}\right)} \text{ताल}$$

$$= -२\,\text{अ}\int_0^{\infty} \text{इ}^{-\left(\text{ल}^२+\frac{\text{अ}^२}{\text{ल}^२}\right)} \text{ताल} = -२\,\text{अ}\,\text{स}$$

इस लिये $\quad \text{तालास} = -२\,\text{ताअ}$

$\therefore \quad \text{लास} = -२\,\text{अ} + \text{स्थि}$

इस लिये $\quad \text{स} = \text{आ}\,\text{इ}^{-२\text{अ}}$

ऊपर के स मान में यदि $\text{अ} = 0$, $\text{स} = \int_0^{\infty} \text{इ}^{-\text{य}^२} \text{ताय} = \frac{\sqrt{\pi}}{२}$ (२१२ वें प्रक्रम से)

इस लिये $\text{आ} = \frac{\sqrt{\pi}}{२}$ और $\text{स} = \frac{\sqrt{\pi}}{२}\text{इ}^{-२\text{अ}} = \int_0^{\infty} \text{इ}^{-\left(\text{य}^२+\frac{\text{अ}^२}{\text{य}^२}\right)} \text{ताय}$

२२१ । $\int_0^{१} \text{य}^{\text{म}} (\text{लाय})^{\text{न}}\, \text{ताय} = \text{स}$, इस का मान जानना है ।

यहां यदि $\text{य} = \text{इ}^{-\text{ल}}$ तो

$$\text{स} = \int_0^{१} \text{य}^{\text{म}} (\text{लाय})^{\text{न}}\, \text{ताय} = (-१)^{\text{न}} \int_0^{\infty} \text{इ}^{-(\text{म}+१)\text{ल}}\, \text{ल}^{\text{न}}\, \text{ताल}$$

$$= \frac{(-१)^{\text{न}}}{(\text{म}+१)^{\text{न}+१}} \int_0^{\infty} \text{इ}^{-(\text{म}+१)\text{ल}} \{\text{ल}(\text{म}+१)\}^{\text{न}} (\text{म}+१)\, \text{ताल}$$

$$= \frac{(-१)^{\text{न}}}{(\text{म}+१)^{\text{न}+१}} \int_0^{\infty} \text{इ}^{-\text{ल}'} \text{ल}'^{\text{न}}\, \text{ताल}' \text{।} \left(\text{यदि } (\text{म}+१)\,\text{ल} = \text{ल}'\right)$$

$$= \frac{(-१)^{\text{न}}\, \text{गा}\,(\text{न}+१)}{(\text{म}+१)^{\text{न}+१}}$$

यदि लाय के स्थान में $-\text{ला}\left(\frac{१}{\text{य}}\right) = (-१)\,\text{ला}\,\frac{१}{\text{य}}$ रखलें तो

$$\int_0^{१} \text{य}^{\text{म}} (\text{लाय})^{\text{न}}\, \text{ताय} = \int_0^{१} \text{य}^{\text{म}} (-१)^{\text{न}} \left(\text{ला}\frac{१}{\text{य}}\right)^{\text{न}} \text{ताय}$$

$$= (-१)^{\text{न}} \int_0^{१} \text{य}^{\text{म}} \left(\text{ला}\frac{१}{\text{य}}\right)^{\text{न}} \text{ताय} = \frac{\{(-१)^{\text{न}}\}^{२}}{(\text{म}+१)^{\text{न}+१}}\, \text{गा}\,(\text{न}+१) = \frac{\text{गा}\,(\text{न}+१)}{(\text{म}+१)^{\text{न}+१}}$$

२२२ । $\int_0^1 \frac{\text{लाय ताय}}{1-\text{य}} = \int_0^1 \text{लाय ताय}\,(1+\text{य}+\text{य}^2+\cdots)$

$= -\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)$ । (ऊपर के उदाहरण से)

$= -\frac{\pi^2}{6}$ । (चलनकलन के २० वें प्रक्रम का (६) उदाहरण दे०)

इस तरह से अनेक उदाहरण कर सक्ते हो ।

२२३ । कल्पना करो कि

$$\text{स} = \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ(य,ग) ताय}$$

तो $\quad \text{स ताग} = \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ(य,ग) ताय ताग}$

इस लिये

$$\int_{\text{अ}_1}^{\text{क}_1} \text{स ताग} = \int_{\text{अ}_1}^{\text{क}_1} \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ(य,ग) ताय ताग}$$

$$= \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \int_{\text{अ}_1}^{\text{क}_1} \text{फ(य,ग) ताग ताय} \text{ । ६३वें प्रक्रम से}$$

इस पर से भी अनेक सान्तचलों के मान बड़े लाघव से सिद्ध हो जाते हैं ।

२२४ । जानते हैं कि $\int_0^\infty \text{इ}^{-\text{जय}} \text{ ताय} = \frac{1}{\text{ज}}$ । १६० प्रक्रम का (४) उदाहरण देखो

इस लिये ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से यदि ज=ग, क=∞, अ=0 तो

$$\int_{\text{अ}_1}^{\text{क}_1} \text{स ताग} = \int_{\text{अ}_1}^{\text{क}_1} \frac{\text{ताज}}{\text{ज}} = \text{ला}\frac{\text{क}_1}{\text{अ}_1} = \int_0^\infty \int_{\text{अ}_1}^{\text{क}_1} \text{फ(य,ग) ताग ताय}$$

परन्तु $\int \text{फ(य,ग) ताग} = \int \text{फ(य,ज)ताज} = \int \text{इ}^{-\text{जय}} \text{ ताज}$

$= -\frac{\text{इ}^{-\text{जय}}}{\text{य}}$, इस लिये

$$\int_{\text{अ}_1}^{\text{क}_1} \text{इ}^{-\text{जय}} \text{ताज} = \frac{\text{इ}^{-\text{अ}_1\text{य}} - \text{इ}^{-\text{क}_1\text{य}}}{\text{य}}$$

इस लिये

$$\int_0^\infty \int_{\text{अ}_1}^{\text{क}_1} \text{फ(य,ज) ताज ताय} = \int_0^\infty \frac{\text{इ}^{-\text{अ}_1\text{य}} - \text{इ}^{-\text{क}_1\text{य}}}{\text{य}} \text{ताय} = \text{ला}\frac{\text{क}_1}{\text{अ}_1}$$

२२५ । खण्डचलानयन से जानते हैं कि

$$\int_0^\infty इ^{-गय} कोज्या अ_१ य \; ताय = \frac{ग}{ग^२ + अ_१^२}$$

दोनों पक्षों का ग के वश चलानयन करने से और ग की सीमा, अ, क मानने से ।

$$\int_0^\infty \frac{इ^{-अय} - इ^{-कय}}{य} कोज्या अ_१ य \; ताय = \frac{१}{२} ला \frac{क^२ + अ_१^२}{अ^२ + अ_१^२}$$

२२६ । यदि आ $= \int_0^\infty \frac{ज्या अ_१ य}{य}$ ताय और का $= \int_0^\infty \frac{कोज्या अ_१ य}{१ + य^२}$ ताय

आ में यदि $अ_१ य = र$

तो आ $= \int_0^\infty \frac{ज्या र}{र}$ तार । इस लिये $अ_१$ से आ का कुछ भी सम्बन्ध नहीं है और २१६ वें प्रक्रम की युक्ति से आ $= \frac{\pi}{२}$

$$अब \quad का = \int_0^\infty \frac{कोज्या अ_१ य}{१ + य^२} ताय$$

$$इस लिये \quad \frac{ताका}{ताअ_१} = \int_0^\infty - \frac{य ज्या. अ_१ य}{१ + य^२} ताय$$

$$और \int_0^{अ_१} का \; ताअ_१ = \int_0^\infty \frac{ज्या अ_१ य}{य(१ + य^२)} ताय$$

$$इस लिये \int_0^{अ_१} का \; ताअ_१ - \int \frac{ताका}{ताअ_१} = \int_0^\infty \frac{(१ + य^२) ज्या अ_१ य}{य(१ + य^२)} ताय = आ$$

समशोधन करने से

$$\int_0^{अ_१} का \; ताअ_१ - \frac{ताका}{ताग_१} - आ = 0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (१)$$

(१) को $इ^{-अ_१} ताअ_१$ से गुण कर $अ_१$ के वश से चलानयन करने से $इ^{-अ_१} \left(\int_0^{अ_१} का \; ताअ_१ + का - आ \right) =$ स्थिराङ्क

इस लिये $अ_1$ का चाहे जो मान हो (१) का चल कोई नियत संख्या के तुल्य होगा इस लिये यदि $अ_1$ अनन्त के तुल्य हो तो पिछले समीकरण में स्थिराङ्क शून्य के तुल्य होगा क्योंकि उस का बायां पक्ष शून्य के तुल्य होता है इस लिये $अ_1$ के अनन्त मान में

$इ^{-अ_1}(\int_0^{अ_1} का\, ताअ_1 + का - आ) = 0 = \int_0^{अ_1} का\, ताअ_1 + का - आ, \cdots$ (२)

इस लिये (१) और (२) के अन्तर से

$$\frac{ताका}{ताअ_1} = -का$$

इस लिये $का = आ_1 इ^{-अ_1}$ जहां $आ_1$ कोई स्थिराङ्क है

और $\int का\, ताअ_1 = \int आ_1 इ^{-अ_1} ताअ_1 = -आ_1 इ^{-अ_1}$

इस लिये $\int_0^{अ_1} का\, ताअ_1 = आ_1 - आ_1 इ^{-अ_1}$

(२) में इन का उत्थापन देने से

$\int_0^{अ_1} काताअ_1 + का - आ = आ_1 - आ_1 इ^{-अ_1} + आ_1 इ^{-अ_1} - आ = आ_1 - आ = 0 \therefore अ_1 = आ$

इस लिये $का = आ\, इ^{-अ_1}$ $\cdots\cdots\cdots$ (३)

यदि $अ_1$ को अत्यल्प मानें अर्थात् $अ_1 = 0$ तो

$$का = \int_0^{\infty} \frac{कोज्याअ_1 य}{1+य^2} ताय = \int_0^{\infty} \frac{ताय}{1+य^2} = \frac{\pi}{2} = आ$$

इस लिये (३) से $का = \frac{\pi}{2} इ^{-अ_1}$

यदि $अ_1$ ऋण हो तो (३) से $का = \frac{\pi}{2} इ^{अ_1}$ ऐसा होगा और २१६ वें प्रक्रम की युक्ति से $आ = -\frac{\pi}{2}$

२२०। २२६ प्रक्रम से सिद्ध हुआ जो है कि

$\int_0^{\infty} \frac{कोज्याअ_1 यताय}{1+य^2} = \frac{\pi}{2} इ^{-अ_1}$ इसका $अ_1$ के वश तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$\int_0^{\infty} \frac{यज्याअ_1 य\, ताय}{1+य^2} = \frac{\pi}{2} इ^{-अ_1}$ और चलानयन कर मान $अ_1$ के 0, ग

के मान के भीतर ले आवें तो

$$\int_0^\infty \frac{\text{ज्यागय}}{\text{य}(1+\text{य}^2)} \text{ताय} = \frac{\pi}{2}(1 - \text{इ}^{-\text{अ}_1})$$

२२८। खण्ड चलानयन से सिद्ध है कि

$$\int \text{इ}^{-\text{अय}} \text{ज्याअ}_1\text{य ताय} = -\text{इ}^{-\text{अय}} . \frac{\text{अज्याअ}_1\text{य} + \text{अ}_1\text{कोज्याअ}_1\text{य}}{\text{अ}^2 + \text{अ}_1^2}$$

और $\int \text{इ}^{-\text{अय}} \text{कोज्याअ}_1\text{य ताय} = \text{इ}^{-\text{अय}} \frac{\text{अ}_1\text{ज्याअ}_1\text{य} - \text{अकोज्याअ}_1\text{य}}{\text{अ}^2 + \text{अ}_1^2}$

इन पर से $\int_0^\infty \text{इ}^{-\text{अय}} \text{ज्या अ}_1\text{य ताय} = \frac{\text{अ}_1}{\text{अ}^2 + \text{अ}_1^2}$

और $\int_0^\infty \text{इ}^{-\text{अय}} \text{कोज्या अ}_1 \text{ य ताय} = \frac{\text{अ}}{\text{अ}^2 + \text{अ}_1^2}$ । यदि अ धनात्मक हो।

इन में यदि अ=0 तो

$$\int_0^\infty \text{ज्याअ}_1\text{य ताय} = \frac{\text{अ}_1}{\text{अ}_1^2} = \frac{1}{\text{अ}_1}$$

और $\int_0^\infty \text{कोज्याअ}_1\text{य ताय} = 0$

परन्तु $\int \text{ज्याअ}_1\text{य ताय} = -\frac{\text{कोज्याअ}_1\text{य}}{\text{अ}_1}$

और $\int \text{कोज्याअ}_1\text{य ताय} = \frac{\text{ज्याअ}_1\text{य}}{\text{अ}_1}$

इसलिये

$$\int_0^\infty \text{ज्याअ}_1\text{य} = -\text{कोज्या }(\infty) + \frac{1}{\text{अ}_1} = \frac{1}{\text{अ}_1}$$

$$\therefore \quad \text{कोज्या }(\infty) = 0$$

और $\int_0^\infty \text{कोज्याअ}_1\text{य ताय} = \text{ज्या }(\infty) + 0 = 0$

$$\therefore \quad \text{ज्या }(\infty) = 0$$

इन पर से यह सिद्ध होता है कि यदि कोण का मान अनन्त हो तो उस की ज्या और कोटिज्या दोनों शून्य के समान होती है यह अत्यन्त चमत्कार है। इस पर गणितज्ञों ने बहुत ही विचार किया है जिस का वर्णन इस चलराशिकलन की पुस्तक में विद्यार्थियों के लिये दुर्बोध कारक है। मेरी समझ में जिस अनन्त कोण के मान में ज्या शून्य होती है उसी अनन्त कोण के मान में कोटि ज्या शून्य के तुल्य नहीं होती है किन्तु दोनों अनन्त कोणों के मानों का अन्तर अवश्य $२म\pi \pm \frac{\pi}{२}$ इस के तुल्य होगा जहां म कोई अभिन्न संख्या है।

२२६। फल का विस्तर रूप बना कर भी कहीं कहीं सान्तचल का मान निकल आता है। जैसा कि २२२ प्रक्रम में दिखलाया है उसी चाल के कुछ और उदाहरण दिखलाते हैं।

$$\text{यदि ला}\left\{१ - \text{अ}\;\text{इ}^{\text{य}\sqrt{-१}}\right\}\text{ और ला}\left\{१ + \text{अइ}^{-\text{य}\sqrt{-१}}\right\}$$

इन दोनों का विस्तृत मान ले आकर जोड़ डालो तो

$$\text{ला}\,(१-२\,\text{अकोज्याय}+\text{अ}^२)$$

$$= -२\left(\text{अकोज्याय}+\frac{\text{अ}^२}{२}\text{कोज्या}२\text{य}+\frac{\text{अ}^३}{३}\text{कोज्या}३\text{य}+\cdots\right)$$

यहां यदि $\text{अ} \angle १$ तो श्रेढी का मान सान्त होगा

$$\text{इस लिये }\int\text{ला}\,(१-२\,\text{अकोज्याय}+\text{अ}^२)\,\text{ताय}$$

$$= -२\left(\text{अज्याय}+\frac{\text{अ}^२}{४}\text{ज्या}२\text{य}+\frac{\text{अ}^३}{९}\text{ज्या}३\text{य}+\cdots\cdots\right)$$

$$\text{और }\int_0^{\pi}\text{ला}\,(१-२\,\text{अकोज्याय}+\text{अ}^२)\,\text{ताय}=0\text{।}$$

$$\text{यदि अ} > १\text{ तो ला}\,(१-२\text{अकोज्याय}+\text{अ}^२)$$

$$=\text{लाअ}^२+\text{ला}\left(१-\frac{२}{\text{अ}}\text{कोज्याय}+\frac{१}{\text{अ}^२}\right)$$

इस लिये अब ऊपर की युक्ति से $\frac{१}{अ} \angle १$ इस लिये दूसरे खण्ड का मान शून्य निकलेगा और पहले का π लाअ^{२} = २ π ला अ यह जो कि अभीष्ट मान होगा ।

यदि अ=१ तो $\int$ ला (१—२अकोज्याय+अ^{२})ताय

$= \int$ ला $\{$ २(१—अकोज्याय) $\}$ ताय $= \int$ ला ज्या^{२} $\frac{य}{२}$ ताय + ला४ $\int$ ताय

$= \int$ २ लाज्या $\frac{य}{२}$ ताय + २ ला २ $\int$ ताय

$=$ ४ $\int$ लाज्याय$'$ ताय$'$ + २ला२ $\int$ ताय यदि य$'$ $= \frac{य}{२}$

$=$ ४ $\int$ लाज्याय$'$ ताय$'$ + २ य ला २

इसलिये $\int_{0}^{\pi}$ला (१-२अकोज्याय+अ^{२}) ताय=४ $\int_{0}^{\frac{\pi}{२}}$ लाज्याय$'$ ताय$'$+२πला२

२πला $\frac{\pi}{२}$ + २πला२ =०, ५० प्रक्रम के (३) उदाहरण से ।

तीनों स्वरूप को यदि एक ही समीकरण से दिखलाया चाहो तो पहले को ला(अ^{२}—२अगकोज्याय+ग^{२}) ताय

= लाअ^{२}+ला(१—$\frac{२ग}{अ}$कोज्याय+$\frac{ग^{२}}{अ^{२}}$) ताय ऐसे लिखो

यदि अ $>$ ग

और यदि ग $>$ अ तो लाग^{२}+ला (१—$\frac{२अ}{ग}$ कोज्याय + $\frac{अ^{२}}{ग^{२}}$) ताय ऐसे लिखो

तब $\int_{0}^{\pi}$ला(अ^{२}—२अगकोज्याय+ग^{२}) ताय=२ π लाज

जहां दोनों अ और ग में से जो अधिक है उस का द्योतक ज है।

२३० । खण्डचलानयन से $\int$ला(१-२ अकोज्याय+अ^{२}) ताय

$= य \cdot$ला(१—२अकोज्याय+अ^{२})—२ अ $\int \frac{यज्याय \; ताय}{१-२अकोज्याय+अ^{२}}$

इस लिये यदि अ $\angle$ १ तो

$\int_{0}^{\pi} \frac{ज्याय \; ताय}{१-२ अकोज्याय+अ^{२}} = \frac{\pi}{२अ}$ ला (१+अ)^{२} = $\frac{\pi}{अ}$ ला (१+अ)

और यदि अ $>$ १ तो ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से

इस का मान $= \frac{\pi}{अ}$ ला (१+अ) — $\frac{\pi}{अ}$ ला (अ) $= \frac{\pi}{अ}$ ला $(१ + \frac{१}{अ})$

२३१। $\int_0$ कोज्याअ$_१$य ला (१–२अकोज्याय+अ^२) ताय इस का मान २२६ प्रक्रम के ऐसा यदि श्रेढी में लाकर चलानयन करो (जहां सरल-त्रिकोणमिति से दो कोटिज्याओं के घात को दो कोटिज्या के योग में स्वरूप बना लेना) तो 0, π सीमा के भीतर सब चलों का मान उड़ जायगा एक खण्ड केवल $\int_0^\pi \frac{अ^{अ_१}}{अ_१}$ ताय यह रह जायगा यदि अ $<$ १ और यदि अ $>$ १ तो उसी प्रक्रम की युक्ति से $\int_0^\pi \frac{अ^{-अ_१}}{अ_१}$ यह रह जायगा। इसलिये

$\int_0^\pi$ कोज्याअ$_१$य ला (१—२ अकोज्याय+अ^२) ताय

$= -\frac{\pi अ^{अ_१}}{अ_१}$, वा— $\frac{\pi अ^{-अ_१}}{अ_१}$

यदि अ $<$ १ वा अ $>$ १।

२३२। खण्डचलानयन से ऊपर के फल का मान ले आओ तो २३० प्रक्रम की युक्ति से $\int_0^\pi \frac{ज्याय\ ज्याअ_१य\ ताय}{१-२अकोज्याय+अ^२} = \frac{\pi}{२} अ^{अ_१-१}$ वा $\frac{\pi}{२} अ^{-(अ_१+१)}$

यदि अ $<$ १ वा अ $>$ १।

२३३। चलनकलन के ३१४वें प्रक्रम के अन्त में जो समीकरण उत्पन्न हुआ है उसे २अ से गुण कर १ में जोड़ देने से

$$\frac{१—अ^२}{१—२अकोज्याय+अ^२} = १+२अकोज्याय+२अ^२कोज्या२य$$
$$+२अ^३ कोज्या ३य+ \cdots$$

इस में यदि अ $<$ १ तो इस पर से भी बहुत सान्तचलों का ज्ञान हो सक्ता है जैसे यदि अ$_१$ अभिन्न हो तो

$$\int_0^\pi \frac{\text{कोज्या}\,\text{अ}_1\text{य ताय}}{1-2\text{अ कोज्याय}+\text{अ}^2} = \frac{\pi\,\text{अ}^{\text{अ}_1}}{1-\text{अ}^2}$$

क्योंकि श्रेढियों के सीमा के भीतर प्रत्येक पद के सान्तचल शून्य हो जायंगे केवल $\frac{2\text{अ}^{\text{अ}_1}}{1-\text{अ}^2}\int \text{कोज्या}^2\text{अ}_1\text{य ताय}$ यह रह जायगा जिस का मान सीमा के भीतर $\frac{\pi\,\text{अ}^{\text{अ}_1}}{1-\text{अ}^2}$ यह होगा ।

२३४। $\int_0^\infty \frac{1}{1+\text{य}^2}\;\frac{\text{ताय}}{1-2\text{अकोज्यागय}+\text{अ}^2}$ इस में भी यदि श्रेढी में $\frac{1}{1-2\text{अकोज्यागय}+\text{अ}^2}$ इस का मान ले आवो तो

$$\frac{1}{1-\text{अ}^2}\left(\frac{1}{1+\text{य}^2}+\frac{2\text{अकोज्यागय}}{1+\text{य}^2}+\frac{2\text{अ}^2\text{कोज्या}2\text{गय}}{2+\text{य}^2}+\cdots\right)$$ ऐसा होगा

इस लिये सीमा के भीतर प्रत्येक पद सम्बन्धि चलों का मान २२६ प्रक्रम के (३) समीकरण से ले आकर योग करने से अभीष्ट सान्तचल का मान

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1-\text{अ}^2}\cdot\frac{1+\text{अइ}^{-\text{ग}}}{1-\text{अइ}^{-\text{ग}}}$$ यह होगा ।

२३५ । इसी तरह $\int_0^\infty \text{ला}(1-2\ \text{अकोज्यागय}+\text{अ}^2)\,\frac{\text{ताय}}{1+\text{य}^2}$

$$=\pi\text{ला}(1-\text{अइ}^{-\text{ग}})$$

२२६ और २२८ प्रक्रम की युक्ति से ।

२३६ । चलनकलन के ३१४वें प्रक्रम में उपान्तिम समीकरण जो उत्पन्न हुआ है उस में य=र तुल्य मान पीछे से य के स्थान में गय का उत्थापन दे देने से

$$\frac{\text{ज्यागय}}{1-2\text{अकोज्यागय}+\text{य}^2} = \text{ज्यागय}+\text{अज्या}2\text{गय}+\text{अ}^2\text{ज्या}3\text{गय}+\cdots$$

जहां अ ∠ १। इस श्रेढी और २२७ प्रक्रम से

$$\int_0^\infty \frac{\text{यज्यागयताय}}{१-२\text{अकोज्यागय}+\text{य}^२} = \frac{\pi}{२(\text{इ}^\text{ग}-\text{अ})}$$

यदि ग के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालो तो २३५ प्रक्रम से भी यह सिद्ध होता है।

२३७। यदि स=कोज्या य+ $\sqrt{-१}$ ज्याय तो फ(अ+स) यह यदि ऐसा हो कि इस में यदि टेलर का सिद्धान्त लगाया जाय तो व्यभिचार न हो तो टेलर के सिद्धान्त से फ(अ+स) +फ(अ+स$^{-१}$)

$$= २\left\{ \text{फ(अ)} + \text{फ}'\text{(अ)}\ \text{कोज्याय} + \frac{\text{फ}''\text{(अ)}}{\lfloor २}\text{कोज्या २य} + \cdots \right\}$$

और $\frac{१-\text{ग}^२}{१-२\text{गकोज्याय}+\text{ग}^२}$

$$= १+२\text{गकोज्याय}+२\text{ग}^२\text{कोज्या२य}+२\text{ग}^३\text{कोज्या३य}+\cdots$$

इस लिये $\int_0^\pi \frac{\text{फ(अ+स)}+\text{फ(अ+स}^{-१})}{१-२\text{गकोज्याय}+\text{ग}^२}$ ताय

$$= \frac{२\pi}{१-\text{ग}^२}\left\{ \text{फ(अ)}+\text{गफ}'\text{(अ)}+\frac{\text{ग}^२}{\lfloor २}\text{फ}''\text{(अ)}+\cdots \right\} = \frac{२\pi}{१-\text{ग}^२}\ \text{फ(अ+ग)}$$

जहां ग ∠ १

इसी तरह दोनों फलों का अन्तर करने से

$$\int_0^\pi \frac{\text{फ(अ+स)}-\text{फ(अ+स}^{-१})}{१-२\text{गकोज्याय}+\text{ग}^२)}\ \text{ताय}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{-१}}{\text{ग}}\left\{ \text{फ(अ+ग)}-\text{फ(अ)} \right\}$$

और $\int_0^\pi \frac{१-\text{गकोज्याय}}{१-२\text{गकोज्याय}+\text{अ}^२}\left\{ \text{फ(अ+स)}+\text{फ(अ+स}^{-१}) \right\}$ ताय

$$=\left\{ \text{फ}(\text{अ}+\text{ग})+\text{फ}(\text{अ}) \right\}\pi$$

२३८। इस तरह असम्भाव्य संख्या का भी उत्थापन देने से बहुत सान्तचलों का मान आ जाता है। जैसे

$\int_0^\infty \text{इ}^{-\text{अ}^2\text{य}^2}\,\text{ताय}=\frac{\sqrt{\pi}}{2\text{अ}}$ यह जो २१२ प्रक्रम से सिद्ध है इस में

यदि अ के स्थान में $\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ ग इस का उत्थापन दें तो

$$\int_0^\infty \text{इ}^{-\text{ग}^2\text{य}^2\sqrt{-1}}\,\text{ताय}=\int_0^\infty \{\text{कोज्या}\,\text{ग}^2\text{य}^2-\sqrt{-1}\,\text{ज्या}\,\text{ग}^2\text{य}^2\}\,\text{ताय}$$

$$=\int_0^\infty \text{कोज्या}\,\text{ग}^2\text{य}^2\,\text{ताय}-\sqrt{-1}\int_0^\infty \text{ज्या}\,\text{ग}^2\text{य}^2\,\text{ताय}=\frac{1}{\text{ग}}\,\frac{1}{1+\sqrt{-1}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1-\sqrt{-1}}{2\,\text{ग}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$

यहां पर सम्भाव्य असम्भाव्य को अलग अलग समान करने से

$$\int_0^\infty \text{कोज्या}\,\text{ग}^2\text{य}^2\,\text{ताय}=\frac{\sqrt{\pi}}{2\text{ग}\sqrt{2}}$$

और $\int_0^\infty \text{ज्या}\,\text{ग}^2\text{य}^2\,\text{ताय}=\frac{\sqrt{\pi}}{2\text{ग}\sqrt{2}}$

इसी में यदि $\text{ग}^2\text{य}^2$ के स्थान में र रख लें तो $\text{ताय}=\frac{\text{तार}}{2\text{ग}^2\text{य}}=\frac{\text{तार}}{2\text{ग}\sqrt{\text{र}}}$

इस लिये

$$\int_0^\infty \frac{\text{कोज्या}\,\text{र}\,\text{तार}}{\sqrt{\text{र}}}=\int_0^\infty \frac{\text{ज्या}\,\text{र}\,\text{तार}}{\sqrt{\text{र}}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

इस तरह से हज़ारहों सान्तचल बुद्धिमानों के बुद्धिबल से निकले हुए हैं और निकलते जाते हैं कहां तक लिख कर दिखलावें बुद्धिमानों के लिये इतनाही बहुत है। इस पुस्तक के लिखने से मेरा यही तात्पर्य

है कि चलराशि सम्बन्धि प्राय: सब विषयों से थोड़ा बहुत विद्यार्थियों का परिचय हो जाय।

२३६। $\int \frac{\text{ताष}}{\sqrt{(१-\text{ग}^२\text{ज्या}^२\text{ष})}} = \text{दै}_१(\text{ग},\text{ष})$ । $\int\sqrt{(१-\text{ग}^२\text{ज्या}^२\text{ष})}\ \text{ताष}$ $=\text{दै}_२(\text{ग},\text{ष})$ और

$\int \frac{\text{ताष}}{(१+\text{अज्या}^२\text{ष})\sqrt{(१-\text{ग}^२\text{ज्या}^२\text{ष})}} = \text{दै}_३(\text{ग},\text{अ},\text{ष})$ ऐसा मान लो जहां ग $\angle$ १ तो यदि

$\text{दै}_१(\text{ग},\text{ष})+\text{दै}_१(\text{ग},\text{ष}_१)=\text{दै}_१(\text{ग},\text{इ}_१)$ जहां $\text{इ}_१$ एक स्थिराङ्क है तो

$\text{कोज्याष}\,\text{कोज्याष}_१-\text{ज्याष}\,\text{ज्याष}_१\sqrt{(१-\text{ग}^२\text{ज्या}^२\text{इ}_१)}=\text{कोज्याइ}_१$ ऐसा होगा। इस को सिद्ध करने के लिये मान लो कि ष और $\text{ष}_१$ ये दोनों नये चलराशि ट के फल हैं तो दिये हुये समीकरण का नये चलराशि के वश तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{१}{\sqrt{(१-\text{ग}^२\text{ज्या}^२\text{ष})}}\cdot\frac{\text{ताष}}{\text{ताट}}+\frac{१}{\sqrt{(१-\text{ग}^२\text{ज्या}^२\text{ष}_१)}}\cdot\frac{\text{ताष}_१}{\text{ताट}}=0\cdots\cdots(१)$$

कल्पना करो कि ट ऐसा है जिस से $\frac{\text{ताष}}{\text{ताट}}=\sqrt{(१-\text{ग}^२\text{ज्या}^२\text{ष})}$

तो (१) समीकरण से

$$\frac{\text{ताष}_१}{\text{ताट}}=-\sqrt{(१-\text{ग}^२\text{ज्या}^२\text{ष}_१)}$$

दोनों का वर्ग कर तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{\text{ता}^२\text{ष}}{\text{ताट}^२}=-\text{ग}^२\text{ज्याष}\,\text{कोज्याष},\quad \frac{\text{ता}^२\text{ष}_१}{\text{ताट}^२}=-\text{ग}^२\text{ज्याष}_१\text{कोज्याष}_१$$

इन के योगान्तर से

$$\frac{\text{ता}^२(\text{ष}\pm\text{ष}_१)}{\text{ताट}^२}=-\frac{\text{ग}^२}{२}(\text{ज्या}२\text{ष}\pm\text{ज्या}२\text{ष}_१)$$

यदि $\text{ष}+\text{ष}_१=\text{फि}$, $\text{ष}-\text{ष}_१=\text{फी}$ तो

$$\frac{\text{ता}^2\text{फि}}{\text{ताट}^2} = -\text{ग}^2\text{ज्याफिकोज्याफी}, \quad \frac{\text{ता}^2\text{फी}}{\text{ताट}^2} = -\text{ग}^2\text{ज्याफीकोज्याफि}$$

और $$\frac{\text{ताफि}}{\text{ताट}}\,\frac{\text{ताफी}}{\text{ताट}} = \left(\frac{\text{ताष}}{\text{ताट}}\right)^2 - \left(\frac{\text{ताष}_1}{\text{ताट}}\right)^2 = -\text{ग}^2\text{ज्याफिज्याफी}$$

इस लिये $$\frac{\dfrac{\text{ता}^2\text{फि}}{\text{ताट}^2}}{\dfrac{\text{ताफि}}{\text{ताट}}\,\dfrac{\text{ताफी}}{\text{ताट}}} = \text{कोस्पफी}, \quad \frac{\dfrac{\text{ता}^2\text{फी}}{\text{ताट}^2}}{\dfrac{\text{ताफि}}{\text{ताट}}\,\dfrac{\text{ताफी}}{\text{ताट}}} = \text{कोस्पफि}$$

इस लिये

$$\frac{\text{ता}}{\text{ताट}}\left(\text{ला}\,\frac{\text{ताफि}}{\text{ताट}}\right) = \frac{\text{ता}}{\text{ताट}}\,\text{लाज्याफी}, \quad \frac{\text{ता}}{\text{ताट}}\left(\text{ला}\,\frac{\text{ताफी}}{\text{ताट}}\right) = \frac{\text{ता}}{\text{ताट}}\,\text{लाज्याफि}$$

इस लिये $$\text{ला}\,\frac{\text{ताफि}}{\text{ताट}} = \text{लाज्याफी} + \text{स्थिराङ्क}$$

इस लिये $$\frac{\text{ताफि}}{\text{ताट}} = \text{आज्याफी}$$

और इसी तरह $$\frac{\text{ताफी}}{\text{ताट}} = \text{काज्याफि}$$ .... (२)

जहां आ और का स्थिराङ्क हैं ।

इस कारण से $$\text{आज्याफी}\,\frac{\text{ताफी}}{\text{ताट}} = \text{काज्याफि}\,\frac{\text{ताफि}}{\text{ताट}}$$

चलानयन से, आकोज्याफी = का कोज्याफी + स्थिराङ्क ...... (३)

और प्रथम मूल समीकरण से स्पष्ट देख पड़ता है कि यदि $\text{ष}_1 = 0$ तो

$$\text{दै}_1(\text{ग}, \text{ष}) = \text{दै}_1(\text{ग}, \text{इ}_1)$$

इस लिये तब $\text{ष} = \text{इ}_1$ और $\text{फि} = \text{फी} = \text{इ}_1$

(३) से $(\text{आ} - \text{का})\,\text{कोज्या}\,\text{इ}_1 = \text{स्थि}$

इस लिये $\text{आकोज्या}(\text{ष} - \text{ष}_1) = \text{काकोज्या}(\text{ष} + \text{ष}_1) + (\text{आ} - \text{का})\text{कोज्याइ}_1$

और $(\text{आ}-\text{का})\,\text{कोज्या}\,\text{ष}\,\text{कोज्या}\,\text{ष}_1 + (\text{आ}+\text{का})\,\text{ज्या}\,\text{ष}\,\text{ज्या}\,\text{ष}_1$
$$= (\text{आ}-\text{का})\,\text{कोज्या}\,\text{इ}_1 \cdots\cdots\cdots (4)$$

(२) में $\dfrac{\text{ताफि}}{\text{ताट}} = \sqrt{(1-\text{ग}^2\text{ज्या}^2\text{ष})} - \sqrt{(1-\text{ग}^2\text{ज्या}^2\text{ष}_1)}$ इस का

और $\dfrac{\text{ताफी}}{\text{ताट}} = \sqrt{(1-\text{ग}^2\text{ज्या}^2\text{ष})} + \sqrt{(1-\text{ग}^2\text{ज्या}^2\text{ष}_1)}$ इस का

उत्थापन देने से और $\text{ष}_1 = 0$ मानने से

$$\sqrt{(1-\text{ग}^2\text{ज्या}^2\text{इ}_1)} - 1 = \text{आज्या}\,\text{इ}_1$$

और $\sqrt{(1-\text{ग}^2\text{ज्या}^2\text{इ}_1)} + 1 = \text{काज्या}\,\text{इ}_1$

$$\therefore \quad \frac{2\sqrt{(1-\text{ग}^2\text{ज्या}^2\text{इ}_1)}}{\text{ज्या}\,\text{इ}_1} = \text{आ}+\text{का}, \mid -\frac{2}{\text{ज्या}\,\text{इ}_1} = \text{आ}-\text{का}$$

इस का उत्थापन (४) में देने से

$$\text{कोज्या}\,\text{ष}\,\text{कोज्या}\,\text{ष}_1 - \text{ज्या}\,\text{ष}\,\text{ज्या}\,\text{ष}_1\sqrt{(1-\text{ग}^2\text{ज्या}^2\text{इ}_1)}$$
$$= \text{कोज्या}\,\text{इ}_1$$ यह सिद्ध हुआ ।

२५० । २३९ प्रक्रम में जो सिद्धान्त उत्पन्न हुआ है उस में यदि समशोधन कर वर्ग कर डालो तो

$$(\text{कोज्या}\,\text{ष}\,\text{कोज्या}\,\text{ष}_1 - \text{कोज्या}\,\text{इ}_1)^2 = (1-\text{ग}^2\text{ज्या}^2\text{इ}_1)\text{ज्या}^2\text{ष}\,\text{ज्या}^2\text{ष}_1$$

इस लिये

$$\text{कोज्या}^2\text{ष}\,\text{कोज्या}^2\text{ष}_1 - 2\text{कोज्या}\,\text{इ}_1\text{कोज्या}\,\text{ष}\,\text{कोज्या}\,\text{ष}_1 + \text{कोज्या}^2\text{इ}_1$$
$= \text{ज्या}^2\text{ष}\,\text{ज्या}^2\text{ष}_1 - \text{ग}^2\text{ज्या}^2\text{इ}_1\text{ज्या}^2\text{ष}\,\text{ज्या}^2\text{ष}_1$ और $\text{ज्या}^2\text{ष}+\text{कोज्या}^2\text{ष}=1$

इस लिये

$$\text{ज्या}^2\text{ष} - \text{ज्या}^2\text{ष}\,\text{ज्या}^2\text{ष}_1 + \text{कोज्या}^2\text{ष} + \text{कोज्या}^2\text{ष}\,\text{कोज्या}^2\text{ष}_1$$
$$- 2\text{कोज्या}\,\text{इ}_1\text{कोज्या}\,\text{ष}\,\text{कोज्या}\,\text{ष}_1 + \text{कोज्या}^2\text{इ}_1$$
$$= \text{ज्या}^2\text{ष}\,\text{कोज्या}^2\text{ष}_1 + \text{कोज्या}^2\text{ष}\,\text{कोज्या}^2\text{ष}_1 + \text{कोज्या}^2\text{ष}$$
$$- 2\text{कोज्या}\,\text{इ}_1\text{कोज्या}\,\text{ष}\,\text{कोज्या}\,\text{ष}_1 + \text{कोज्या}^2\text{इ}_1$$
$$= \text{कोज्या}^2\text{ष} + \text{कोज्या}^2\text{ष}_1 + \text{कोज्या}^2\text{इ}_1 - 2\text{कोज्या}\,\text{इ}_1\text{कोज्या}\,\text{ष}\,\text{कोज्या}\,\text{ष}_1$$
$$= 1 - \text{ग}^2\text{ज्या}^2\text{इ}_1\text{ज्या}^2\text{ष}\,\text{ज्या}^2\text{ष}_1$$

$\text{कोज्या}^{२}\text{प}_{१}\text{कोज्या}^{२}\text{इ}_{१}$ जोड़ कर पक्षान्तरानयन करने से

$$(\text{कोज्याष} - \text{कोज्याष}_{१}\text{कोज्याइ}_{१})^{२}$$

$$= १ - \text{कोज्या}^{२}\text{प}_{१} - \text{कोज्या}^{२}\text{इ}_{१} + \text{कोज्या}^{२}\text{प}_{१}\text{कोज्या}^{२}\text{इ}_{१} - \text{ग}^{२}\text{ज्या}^{२}\text{इ}_{१}\text{ज्या}^{२}\text{ष}\,\text{ज्या}^{२}\text{ष}_{१}$$

$$= \text{ज्या}^{२}\text{ष}_{१}\text{ज्या}^{२}\text{इ}_{१}(१ - \text{ग}^{२}\text{ज्या}^{२}\text{ष})$$

इस लिये $\text{कोज्याष} = \text{कोज्याष}_{१}\text{कोज्याइ}_{१} + \text{ज्याष}_{१}\text{ज्याइ}_{१}\sqrt{(१ - \text{ग}^{२}\text{ज्या}^{२}\text{ष})}$
यहां पर धनात्मक मूल लिया है क्योंकि जब $\text{ष} = ०$ तो यहां $\text{ष}_{१} = \text{इ}_{१}$

२४१ । $\text{दै}_{१}(\text{ग},\text{ष})$ इस का रूप ग ष के बदलने से इसी चाल का हो जाता है केवल स्थिराङ्क गुणक अधिक हो जाता है जैसे यदि

$\text{स्पष} = \dfrac{\text{ज्या२ष}_{१}}{\text{ग} + \text{कोज्या२ष}_{१}}$ तो $\text{ष}_{१}$ के वश तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{१}{\text{कोज्या}^{२}\text{ष}}\,\frac{\text{ताष}}{\text{ताष}_{१}} = \frac{२(१ + \text{गकोज्या२ष}_{१})}{(\text{ग} + \text{कोज्या२ष}_{१})^{२}}$$

इस लिये $$\frac{\text{ताष}}{\text{ताष}_{१}} = \frac{२(१ + \text{गकोज्या२ष}_{१})}{१ + २\text{गकोज्या२ष}_{१} + \text{ग}^{२}}$$

और $$१ - \text{ग}^{२}\text{ज्या}^{२}\text{ष} = १ - \frac{\text{ग}^{२}\text{ज्या}^{२}\text{२ष}_{१}}{१ + २\text{गकोज्या२ष}_{१} + \text{ग}^{२}}$$

$$= \frac{१ + २\text{गकोज्या२ष}_{१} + \text{ग}^{२}\text{कोज्या}^{२}\text{२ष}_{१}}{१ + २\text{गकोज्या२ष}_{१} + \text{ग}^{२}}$$

इस लिये $$\int \frac{\text{ताष}}{\sqrt{(१ - \text{ग}^{२}\text{ज्या}^{२}\text{ष})}}$$

$$= \int \frac{२(१ + \text{गकोज्या२ष}_{१})}{१ + २\text{गकोज्या२ष}_{१} + \text{ग}^{२}} \cdot \frac{\sqrt{(१ + २\text{गकोज्या२ष}_{१} + \text{ग}^{२})}}{१ + \text{गकोज्या२ष}_{१}}\,\text{ताष}_{१}$$

$$= २\int \frac{\text{ताष}_{१}}{\sqrt{(१ + २\text{गकोज्या२ष}_{१} + \text{ग}^{२})}} = २\int \frac{\text{ताष}_{१}}{\sqrt{(१ + २\text{ग} - ४\text{गज्या}^{२}\text{ष}_{१} + \text{ग}^{२})}}$$

$$= \frac{२}{१+ग} \int \frac{ताष_१}{\sqrt{\left\{१ - \frac{४ग}{(१+ग)^२} ज्या^२ष_१\right\}}}$$

यहां पर कोई स्थिराङ्क जोड़ने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि यदि $ष = 0$ तो $ष_१ = 0$ होता है।

अब ऊपर के चल में यदि $ग_१^२ = \frac{४ग}{(१+ग)^२}$ तो

$$दै_१ (ग, ष) = \frac{२}{१+ग} दै_१ (ग_१, ष_१)$$

पहले जो $स्पष = \frac{ज्या२ष_१}{ग+कोज्या२ष_१}$ ऐसा माना है इस पर से सिद्ध कर सक्ते हो कि $ग\ ज्याष = ज्या\ (२ष_१ - ष)$

और जब $ग_१^२ = \frac{४ग}{(१+ग)^२} \cdot \frac{ग_१^२}{ग^२} = \frac{४}{ग(१+ग^२)}$

परन्तु $ग \angle १$ इस लिये $४ > ग(१+ग)^२$ और $ग_१^२ > ग^२ \therefore ग_१ > ग$ इस लिये ग से $ग_१$ बड़ा ठहरा।

इस में यदि $ष_१ = \frac{\pi}{२}$ तो $ष = \pi$ इस लिये

$$दै_१(ग, \pi) = \frac{२}{१+ग} दै_१\left(ग_१, \frac{\pi}{२}\right) = २\ दै_१\left(ग, \frac{\pi}{२}\right) \cdots$$

$दै_१ (ग, ष)$ इस में ग को मध्यस्थ, और ष को अग्रांश कहते हैं और $दै_१ (ग, ष) = 0$ यदि $ष = 0$ और यदि $ष = \frac{\pi}{२}$ तो पूर्णचल का मान $= दै_१ \left(ग, \frac{\pi}{२}\right)$ यह है। इस लिये $\frac{\pi}{२}$ को पूर्ण अग्रांश कहते हैं।

यदि ९०वें प्रक्रम के साथ तुलना करो तो जान पड़ेगा कि $दै_२ (ग, ष)$ यह लघुव्यामाग्र से चाप की गणना करें तो दीर्घवृत्त के चाप को प्रकाश करता है और आगे के प्रक्रमों से जान पड़ेगा कि $दै_१ (ग, ष)$, $दै_२ (ग, ष)$ और $दै_३ (अ, ग, ष)$ इन तीनों में परस्पर सम्बन्ध है इस लिये इन तीनों को क्रम से प्रथम, द्वितीय और तृतीय दैर्घवृत्तीय चल कहते हैं।

यद्यपि इन तीनों के ठीक ठीक मान नहीं निकलते तथापि इन के अव्यक्त मानों के सम्बन्ध से अनेक सिद्धान्त उत्पन्न होते हैं इन के सिद्धान्तों पर बुद्धिमानों ने अलग एक स्वतन्त्र दैर्घवृत्तीयचल के नाम से पुस्तक ही बना डाली है। अभी सन् १८७३ ई० में ब्रिअट (Briot) और बौक्वेट (Bouquet) ने इसी विषय के पुस्तक का एक बड़ा भारी प्रथम खण्ड प्रकाश किया है।

तीसरे दैर्घवृत्तीयचल में जो अ, एक और स्थिराङ्क है उसे परिमिति कहते हैं और सर्वत्र ग सर्वदा १ से कम माना गया है।

२४२। इस प्रक्रम में एक सिद्धान्त दिखलाते हैं जो प्रथम और द्वितीय दैर्घवृत्तीयचल के सम्बन्ध से उत्पन्न होता है।

२३९ प्रक्रम मे सिद्ध हुआ है कि यदि $दै_१ (ग, ष) + दै_१ (ग, ष_१) = दै (ग, इ_१)$ तो

$कोज्याषकोज्याष_१ - ज्याषज्याष_१ \sqrt{(१ - ग^२ ज्या^२ इ_१)} = कोज्याइ_१$

अब दिखलाते हैं कि

यदि $कोज्याषकोज्याष_१ - ज्याषज्याष_१ \sqrt{(१ - ग^२ ज्या^२ इ_१)} = कोज्याइ_१$

तो $दै_२ (ग, ष) + दै_२ (ग, ष_१) - दै_२ (ग, इ_१)$

$= ग^२ ज्याष ज्याष_१ ज्याइ_१$ ऐसा होगा।

यहां दिये हुये समीकरण के धर्म से स्पष्ट है कि $ष_१$ यह ष का कोई फल होगा

इस लिये मानो कि, $दै_२ (ग, ष) + दै_२ (ग, ष_१) - दै_२ (ग, इ_१) = फ(ष)$

इस का तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$फ'(ष) = \sqrt{(१ - ग^२ ज्या^२ ष)} + \sqrt{(१ - ग^२ ज्या^२ ष_१)} \frac{ताष_१}{ताष}$$

$$= \frac{कोज्याष - कोज्याष_१ कोज्याइ_१}{ज्याष_१ ज्याइ_१}$$

$$+ \frac{कोज्याष_१ - कोज्याषकोज्याइ_१}{ज्याषज्याइ_१} \frac{ताष_१}{ताष} \quad \text{(२४० प्रक्रम से)}$$

$$= \frac{\text{ता}}{\text{ताष}}\{\text{ज्या}^{2}\text{ष}+\text{ज्या}^{2}\text{ष}_{1}+\text{२कोज्याषकोज्याष}_{1}\text{कोज्याइ}_{1}\}$$

$$\times \frac{\text{१}}{\text{२ज्याषज्याष}_{1}\text{ज्याइ}_{1}}$$

परन्तु $\text{ज्या}^{2}\text{ष}+\text{ज्या}^{2}\text{ष}_{1}+\text{२कोज्याषकोज्याष}_{1}\text{कोज्याइ}_{1}$

$=\text{१}+\text{कोज्या}^{2}\text{इ}_{1}+\text{ग}^{2}\text{ज्या}^{2}\text{षज्या}^{2}\text{ष}_{1}\text{ज्या}^{2}\text{इ}_{1}$

(२४० ही प्रक्रम से)

इसलिये $\quad \text{फं}'(\text{ष}) = \text{ग}^{2}\text{ज्याइ}_{1}\dfrac{\text{ता}\,(\text{ज्याषज्याष}_{1})}{\text{ताष}}$

इस लिये चलानयन से

$\text{फ}(\text{ष}) = \text{ग}^{2}\text{ज्याइ}_{1}\text{ज्याषज्याष}_{1}$

स्थिराङ्क जोड़ने की कुछ आवश्यकता नहीं है क्योंकि जब $\text{ष}=0$ तो $\text{फ}(\text{ष})=0$ इस लिये

$\text{दै}_{2}(\text{ग},\text{ष})+\text{दै}_{2}(\text{ग},\text{ष}_{1})-\text{दै}(\text{ग},\text{इ}_{1})=\text{फ}(\text{ष})=\text{ग}^{2}\text{ज्याषज्याष}_{1}\text{ज्याइ}_{1}$.

इस में यदि $\text{इ}_{1}=\frac{\pi}{2}$ तो $\text{फ}(\text{ष})=\text{ग}^{2}\text{ज्याषज्याष}_{1}$,

और दिये हुये समीकरण का रूप

$\text{कोज्याषकोज्याष}_{1}-\text{ज्याषज्याष}_{1}\sqrt{(\text{१}-\text{ग}^{2}\text{ज्या}^{2}\text{इ}_{1})}$

$=\text{कोज्याषकोज्याष}_{1}-\text{ज्याषज्याष}_{1}\sqrt{(\text{१}-\text{ग}^{2})}=\text{कोज्याइ}_{1}=0$

यह ठीक फ्यागनेनी (Fagnani) के सिद्धान्त के समान फल को दिखलाता है क्योंकि ८५ प्रक्रम के (१) उदाहरण के अन्त में जो

$\text{इ}^{2}\text{य}^{2}\text{य}'^{2}-\text{अ}^{2}(\text{य}^{2}+\text{य}'^{2})+\text{अ}^{4}=0$ यह समीकरण उत्पन्न हुआ है

इस में य,य' का जो क्रम से $\dfrac{\text{अकोज्याष}}{\sqrt{(\text{१}-\text{इ}^{2}\text{ज्या}^{2}\text{ष})}}, \dfrac{\text{अकोज्याष}'}{\sqrt{(\text{१}-\text{इ}^{2}\text{ज्या}^{2}\text{ष}')}}$

मान मान लो तो

$$\text{इ}^{2}\text{कोज्या}^{2}\text{षकोज्या}^{2}\text{ष}'-\text{कोज्या}^{2}\text{ष}(\text{१}-\text{इ}^{2}\text{ज्या}^{2}\text{ष}')-\text{कोज्या}^{2}\text{ष}'(\text{१}-\text{इ}^{2}\text{ज्या}^{2}\text{ष})$$
$$+(\text{१}-\text{इ}^{2}\text{ज्या}^{2}\text{ष})(\text{१}-\text{इ}^{2}\text{ज्या}^{2}\text{ष}')=0,$$

अर्थात् $\text{इ}^{4}\text{ज्या}^{2}\text{षज्या}^{2}\text{ष}'+\text{इ}^{2}(\text{१}-\text{ज्या}^{2}\text{ष}-\text{ज्या}^{2}\text{ष}'-\text{ज्या}^{2}\text{ष}\,\text{ज्या}^{2}\text{ष}')$
$+\text{ज्या}^{2}\text{ष}+\text{ज्या}^{2}\text{ष}'=0$ अर्थात्

$$इ^2(इ^2-१)\ ज्या^2 ष\ ज्या^2 ष' + (इ^2-१)(१-ज्या^2 ष - ज्या^2 ष') = 0$$

$(इ^2-१)$ का भाग दे देने से

$$इ^2 ज्या^2 ष\ ज्या^2 ष' + १ - ज्या^2 ष - ज्या^2 ष' = 0$$

इस पर से रूपान्तर करने से

$$कोज्याष कोज्याष_1 = ज्याष ज्याष' \sqrt{१-इ^2}$$

अथवा, $$ज्या^2 ष = \frac{कोज्या^2 ष'}{१-इ^2 ज्या^2 ष'}$$

और $$ज्या^2 ष' = \frac{कोज्या^2 ष}{१-इ^2 ज्या^2 ष}$$

इस प्रकार से प्रथम और द्वितीय दैर्घवृत्तीयचल के सम्बन्ध से सकड़ों सिद्धान्त बन जाते हैं।

२४३। $$दै_3(अ, ग, ष) = \int \frac{ताष}{(१+अज्या^2 ष)\sqrt{(१-ग^2 ज्या^2 ष)}}$$

$$= \frac{दै_1(ग,ष)}{१+अज्या^2 ष} - \int दै_1(ग,ष)\ ता\left(\frac{१}{१+अज्या^2 ष}\right)$$

इस प्रकार से खण्डचलानयन की रीति से जो $दै_3$ (अ ग, ष) का स्वरूप सिद्ध होता है इस से जान पड़ता है कि $दै_1$ (ग, ष) और $दै_3$ (अग,ष) में भी परस्पर सम्बन्ध है।

लेजण्ड्र (Legendre.) ने पहले दो दैर्घवृत्तीय चलों के मान जानने के लिये एक सारणी बनाई है और उसमें स्वल्पान्तर से तीसरे का मान जानने के लिये भी विधि लिखा है। सारणी बनाने का मूल प्रकार ३० प्रक्रम का (५) वां उदाहरण है।

२४४। यदि फ(य) किसी खेत में एक तरफ़ के डांड़े का मान हो तो य के स्थान में अ, अ+च, अ+२च, अ+३च, ... अ+ (न—१) च इन का उत्थापन देने से उस खेत के भीतर उसी तरफ़ के फ(अ), फ(अ+च), फ(अ+२च), ... इत्यादि न डांड़ों के प्रमाण होंगे इस लिये, इन डांड़ों का मध्यम मान जिसे उर्दू में औसत बोलते हैं।

साधारण रीति से वा लीलावती में लिखे हुये भास्कराचार्य के "गण-यित्वा विस्तारं बहुषु स्थानेषु फलद्युतिर्भाज्या स्थानकमित्या। सम्मिति" इस प्रकार से।

$$\frac{\text{फ}(\text{अ}) + \text{फ}(\text{अ}+\text{च}) + \text{फ}(\text{अ}+२\text{च}) + \cdots + \text{फ}\{\text{अ}+(\text{न}-१)\,\text{च}\}}{\text{न}}$$

कल्पना करो कि क—अ=नच

इस लिये डाड़ों का मध्यम मान

$$\frac{\text{च}[\,\text{फ}(\text{अ}) + \text{फ}(\text{अ}+\text{च}) + \text{फ}(\text{अ}+२\text{च}) + \cdots + \text{फ}\{\text{अ} + (\text{न}-१)\text{च}\}\,]}{\text{क}-\text{अ}}$$

कल्पना करो कि क—अ स्थिर संख्या के भीतर अनन्त स्थानों के डाड़ों का मध्यम मान जानना है तो न का प्रमाण अनन्त और च का मान शून्य हो जायगा ऐसी दशा में २ वा ४०वें प्रक्रम से डाड़ों का यथार्थ मध्यम मान $\frac{\int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ}(\text{य})\text{ताय}}{\text{क}-\text{अ}}$ यह होगा क्योंकि औसत में जितने ही स्थानों को बढ़ाते जाते हैं उतना ही औसत सूक्ष्म होता चला जाता है।

इस लिये य के अ, क के भीतर के मानों में यदि फ(य) का मध्यम मान निकालना हो तो $\int \frac{\text{फ}(\text{य})\text{ताय}}{\text{क}-\text{अ}}$ इस का अ, क सीमा के भीतर सान्तचल ले आवो।

जैसे किसी ने प्रश्न किया कि जिस वृत्त का व्यासार्द्ध ग है उस के परिधि पर एक स्थिर विन्दु मान कर वहां से वृत्तान्तर्गत प्रत्येक विन्दुओं की दूरी जो होंगी उन का मध्यम मान क्या होगा।

यहां यदि वृत्त के फल का न तुल्य विभाग कर डालें जहां न $=\infty$ तो स्पष्ट है कि हर एक विभाग विन्दु रूप होंगे इस लिये प्रति विभागों की दूरी स्थिर विन्दु से क्रम से $\text{सु}_१, \text{सु}_२, \text{सु}_३, \cdots \text{सु}_\text{न}$ ये हों तो इन का मध्यम मान $\frac{१}{\text{न}}(\text{सु}_१ + \text{सु}_२ + \cdots + \text{सु}_\text{न})$ यह होगा।

इस में अंश हर को श्रु△ष△श्रु से गुण देने से

$$\frac{\{श्रु_1 + श्रु_2 + \cdots + श्रु_न\} श्रु ष श्रु}{न श्रु △ष△श्रु}$$

यहां १२५वें प्रक्रम से श्रु△ष△श्रु यह क्षेत्रफल के अत्यल्प विभाग का मान होगा यदि, △ष,△श्रु ताष, ताश्रु अर्थात् शून्य के तुल्य हो जांय।

परन्तु ऐसी दशा में न श्रु△ष△श्रु यह वृत्त का फल हो जायगा इस लिये दूरियों का मध्यम मान $= \frac{\{श्रु_1 + श्रु_2 + \cdots + श्रु_न\} श्रु ताष ताश्रु}{\pi ग^2}$

$$\iint \frac{श्रु^2 ताश्रु ताष}{ग^2}$$ (द्विगुण चलानयन की रीति से उचित सीमाओं के भीतर जो मान होगा)

स्थिर विन्दु से एक व्यास नियत खींच कर उस से और श्रुति से उत्पन्न कोण को ष कहो तो यहां द्विगुण चलानयन की रीति से सीमाओं को लेने से

$$मध्यम\ मान = \frac{1}{\pi ग^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{2ग कोज्याष} श्रु^2 ताश्रु ताष$$

$$= \frac{1}{\pi ग^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8\ ग^3 कोज्या^3 ष\ ताष}{3}$$

$$= \frac{8\ ग^3}{3\pi ग^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} कोज्या^3 ष\ ताष$$

$$परन्तु \int कोज्या^3 ष ताष = \int (1 - ज्या^2 ष)\ कोज्याषताष$$

$$= ज्याष - \frac{ज्या^3 ष}{3}$$

$$इस\ लिये \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} कोज्या^3 षताष = (1 - \tfrac{1}{3})2 = \tfrac{4}{3}$$

इस लिये मध्यम मान $= \frac{८ ग^{३}}{३^{π} ग^{२}} \times \frac{४}{३} = \frac{३२ग}{९ π}$

इस प्रकार से सैकड़ों उदाहरण के उत्तर सहज में निकलते हैं।

२४५। लागा-(१+य) का मान जानने के लिये सारणी।

नीचे दी हुई सारणी को हमने प्रोफ़ेसर डिमार्गन के चलनकलन, और चलराशिकलन से लिया है। प्रोफ़ेसर डिमार्गन ने इसको दैर्घवृत्तीय और यूलर के चल सम्बन्धि पुस्तक और चलराशिकलन के अभ्यासार्थ पुस्तक (जो क्रम से प्यारिस में सन् १८२६, और सन् १८१७ में फ़रासीसी भाषा में छपी है) से लिया है (Fraité des Fonctions Elliptiques et des Intégrales Eulériennes, Paris, 1826 Also Exercices de Calcul Intégral, Paris 1817)

य	ला$_{१०}$गा(१+य)	Δ (—)	Δ^2(+)	Δ^3(-)	इस्यानेांतकΔ^3जानने के लिये अङ्क
·००	००० ००० ००० ०००	२५० ३२४ ५५९	७१३ ३४३	१०३९	८४१ ०४५ ०८४
·०१	९९७ ५२८ ७३० ६५९	२४३ २३७ ५८७	७०३ ०७०	१०१४	८८४ २८८ २२९
·०२	९९५ १२७ ८७१ ९८९	२३६ २५२ १२९	६९३ ०६५	९८५	३२७ ५४१ ७६२
·०३	९९२ ७९९ ४२० ८८९	२२९ ३६५ ५२८	६८३ ३२३	९६१	७६४ ८०५ ३९८
·०४	९९० ५३३ ४०० ४०९	२२२ ५७५ २२०	६७३ ८३०	९३५	४०९ ७३२ ८८४
·०५	९८८ ३३७ ८५८ ७९०	२१५ ८७८ ७३८	६६४ ५८०	९११	१८४ २२८ ६३३
·०६	९८६ २०८ ८६८ ५५६	२०९ २७३ ७०२	६५५ ५६२	८८७	८६० २८६ ३११
·०७	९८४ १४५ ५२५ ६३५	२०२ ७५७ ८१८	६४६ ७७०	८६६	५३१ ९५५ २१६
·०८	९८२ १४६ ९४८ ५३४	१९६ ३२८ ८७४	६३८ १९७	८४८	३२८ ९६३ ०१८
·०९	९८० २१२ २७७ ५४०	१८९ ९८४ ७३१	६२९ ८२९	८२४	२४९ ६५४ २९७
·१०	९७८ ३४० ६७३ ९६२	१८३ ७२३ ३३०	६२१ ६६७	८०६	४१९ ६५४ २१७
·११	९७६ ५३१ ३१९ ४०९	१७७ ५४२ ६७९	६१३ ६९९	७८७	४३० ९८५ २२०
·१२	९७४ ७८३ ४१५ ०९२	१७१ ४४० ८५३	६०५ ९१९	७६८	६३४ ९९८ ५३२
·१३	९७३ ०९६ १८१ १६५	१६५ ४१५ ९९६	५९८ ३२२	७४९	९७३ ४१९ ८६५
·१४	९७१ ४६८ ८५६ ०८९	१५९ ४६६ ३०९	५९० ९०१	७३२	०१६ ६४४ ०८८
·१५	९६९ ९०० ६९६ ०१२	१५३ ५९०.०५६	५८३ ६५२	७१७	२५१ ७८८ ३३१
·१६	९६८ ३९० ९७४ २१९	१४७ ७८५ ५५६	५७६ ५६७	७००	८७४ ३३९ ९८४
·१७	९६६ ९३८ ९८० ५३९	१४२ ०५१ १८३	५६९ ६४२	६८४	४९० ८७३ ५११
·१८	९६५ ५४४ ०२० ८२८	१३६ ३८५ ३९२	५६२ ८७०	६६६	०५५ २१० ९७६
·१९	९६४ २०५ ४१६ ४५७	१३० ७८६ ५७०	५५६ २४९	६५२	४२८ ९७५ ५२०
·२०	९६२ ९२२ ५०३ ८१४	१२५ २५३ ३३२	५४९ ७७५	६४२	७७७ २५० ००६
·२१	९६१ ६९४ ६३३ ८३९	११९ ७८४ २१७	५४३ ४३९	६२७	५१४ ००६ ८६२
·२२	९६० ५२१ १७१ ५६५	११४ ३७७ ८४१	५३७ २४०	६१३	२०९ ६७५ २४०
·२३	९५९ ४०१ ४९५ ६८७	१०९ ०३८ ८५९	५३१ १७२	६००	८७६ ५२३ १९९
·२४	९५८ ३३४ ९९८ १४४	१०३ ७४७ ९७	५२५ २३२	५८६	९५३ २२७ १७६
·२५	९५७ ३२१ ०८३ ७१९	९८ ५२१ ९१४	५१९ ४१७	५७५	५२२ १०५ ८६३

य	ला$_{१०}$गा(१+य)	Δ(∓)	Δ²(+)	९ स्थानों तक Δ³ Δ³(-)	जानने के लिये अङ्क
·२६	९५६ ३५६ १६६ ६४०	९३ ३५३ ४६३	५१३ ७२३	५६३	१११ ७७८ ३३३
·२७	९५५ ४४८ ६८५ २३४	८८ २४१ ४२७	५०८ १४६	५५४	९८८ ६५५ २३३
·२८	९५४ ५८९ ०७१ ५५३	८३ १८४ ६५६	५०२ ६८०	५३९	९८८ ६५२ ४२९
·२९	९५३ ७७९ ७८१ ०२९	७८ १८२ ०२९	४९७ ३२८	५३१	८६८ ५३५ ०३८
·३०	९५३ ०२० २७७ १५०	७३ २३२ ४५७	४९२ ०८१	५१९	९८३ ७२४ १२९
·३१	९५२ ३१० ०३४ १४१	६८ ३३४ ८८३	४८६ ९३७	५०८	९६४ ५६२ ३९८
·३२	९५१ ६४८ ५३६ ६५५	६३ ४८८ २८३	४८१ ८९७	५०१	७७५ ७३२ १४९
·३३	९५१ ०३५ २७९ ४८१	५८ ६९१ ६५६	४७६ ९५१	४८७	०८३ ८४४ ३०४
·३४	९५० ४६९ ७६७ २५४	५३ ९४४ ०३३	४७२ १०२	४८०	६८९ ५४५ ३४९
·३५	९४९ ९५१ ५१४ १९१	४९ २४४ ४७७	४६७ ३४९	४७२	०६० ८४६ ५४०
·३६	९४९ ४८० ०४३ ८११	४४ ५९२ ०६५	४६२ ६८४	४६२	२९९ ८९६ ५४४
·३७	९४९ ०५४ ८८८ ६९२	३९ ९८५ ९०४	४५८ १०६	४५४	२०१ ०९७ ९४५
·३८	९४८ ६७५ ५९० २२३	३५ ४२५ १३१	४५३ ६१५	४४७	३२२ २०९ ०८७
·३९	९४८ ३४१ ६९८ ३६३	३० ९०८ ८९९	४४९ २०५	४३६	६५२ ५२२ ०१८
·४०	९४८ ०५२ ७७१ ४११	२६ ४३६ ३८८	४४४ ८७८	४२९	६८७ ५४३ ४३९
·४१	९४७ ८०८ ३७५ ७८९	२२ ००६ ७९६	४४० ६३०	४२१	२८७ ८८६ ५४४
·४२	९४७ ६०८ ०८५ ८२३	१७ ९१९ ३४३	४३६ ४५७	४१४	०४० ९१८ ८६७
·४३	९४७ ४५१ ४८३ ५४२	१३ २७३ २७२	४३२ ३६०	४०७	४४३ ४२१ ००९
·४४	९४७ ३३८ १५८ ४७४	८ ९६७ ८४४	४२८ ३३६	४००	८५८ ४७२ ५३२
·४५	९४७ २६७ ७०७ ४५२	४ ७०२ ३३८	४२४ ३८२	३९२	००० ८८९ ५७५
·४६	९४७ २३९ ७३४ ४३०	— ४७६ ०५२	४२० ४९८	३८५	३४३ २०१ २८८
·४७	९४७ २५३ ८५० ३०२	+३ ७११ ९९८	४१६ ६८२	३७८	८८४ ६५४ ४२१
·४८	९४७ ३०९ ६७२ ७२६	७ ८६१ ५८०	४१२ ९३२	३७४	००० ८८० ६६६
·४९	९४७ ४०६ ८२५ ९५८	११ ९७४ २४४	४०९ २४४	३६५	५४३ ३१४ ८२९
·५०	९४७ ५४४ ९४० ६८३	१६ ०५० ३२४	४०५ ६२	३५९	९७८ ६६६ ४५३

९ स्थानों तक Δ^3 का

य	ला$_{१०}$गा(१+य)	$\Delta(+)$	$\Delta^2(+)$	$\Delta^3(-)$	नवे के लिये अंक
·५१	९४७ ७२३ ६५३ ८६२	२० ०९० ४३९	४०२ ०५७	३५३	२४९ १०० ९८७
·५२	९४७ ९४२ ६०८ ५७५	२४ ०९५ १९३	३९८ ५५४	३४८	७५६ ४४४ ५११
·५३	९४८ २०१ ४५३ ८७५	२८ ०६५ १७५	३९५ १०९	३४२	२०९ ९९८ ७७६
·५४	९४८ ४९९ ८४४ ६४२	३२ ००० ९६१	३९१ ७२०	३३७	४६४ २५१ २२१
·५५	९४८ ८३७ ४४१ ४४७	३५ ९०३ १११	३८८ ३८६	३३१	७२८ ९५९ ६७४
·५६	९४९ २१३ ९१० ४१०	३९ ७७२ १७३	३८५ १०८	३२७	३३६ १३१ २२९
·५७	९४९ ६२८ ९२३ ०७८	४३ ६०८ ६८३	३८१ ८८१	३१९	००७ ७८७ ६५७
·५८	९५० ०८२ १५६ २८९	४७ ४१३ १६५	३७८ ७०५	३१३	४४५ ११३ २०९
·५९	९५० ५७३ २९२ ०५८	५१ १८६ १२९	३७५ ५८३	३११	०७८ ९८५ ७६५
·६०	९५१ १०२ ०१७ ४५०	५४ ९२८ ०६८	३७२ ५०७	३०४	३५४ ३२२ ११०
·६१	९५१ ६६८ ०२४ ४६७	५८ ९३९ ४७८	३६९ ४८१	३०२	९८१ ६८७ ८७४
·६२	९५२ २७१ ००९ ९३८	६२ ३२० ८३०	३६६ ५०१	२९९	५४६ ३१४ ३२०
·६३	९५२ ९१० ६७५ ४०२	६५ ९७२ ५९३	३६३ ५६७	२९१	१०९ १६१ ७५८
·६४	९५३ ५८६ ७२७ ०१८	६९ ५९५ २२१	३६० ६७८	२८७	६६५ ४५३ ४३२
·६५	९५४ २९८ ८७५ ४२८	७३ १८९ १५८	३५७ ८३३	२८३	२९२ ३७८ २९७
·६६	९५५ ०४६ ८३५ ७१२	७६ ७५४ ८४०	३५५ ०३१	२७९	६७८ ५६७ ३५४
·६७	९५५ ८३० ३२७ २३८	८० २९२ ९९३	३५२ २७१	२७४	३३३ १३० ३९९
·६८	९५६ ६४९ ०७३ ५९६	८३ ८०३ १३२	३४९ ५५३	२६९	१९९ ८६८ ७५८
·६९	९५७ ५०२ ८०२ ४९८	८७ २८६ ५९९	३४६ ८७३	२६६	५४६ १५५ ३०४
·७०	९५८ ३९१ २४५ ६९२	९० ७४३ ३९६	३४४ २३४	२६१	०२० १०८ ०९७
·७१	९५९ ३१४ १३८ ८७८	९४ १७४ ००७	३४१ ६३५	२६१	६४० ७५६ ५५६
·७२	९६० २७१ २२१ ५९९	९७ ५७८ ७[illegible]४	३३९ ०७०	२५२	६१४ ५०२ ३११
·७३	९६१ २६२ २३७ २०६	१०० ९५८ ०९९	३३६ ५४५	२५०	०१८ ००७ ८७८
·७४	९६२ २८६ ९३२ ७४१	१०४ ३१८ ३२०	३३४ ०५[illegible]	२४९	४५० ६३४ ६३४
·७५	९६३ ३४५ ०५८ ८७४	१०७ ६४१ ८०३	३३१ ६०२	२४५	२३३ १३१ १०१

य	$ला_{१०}गा(१+य)$	$\Delta(+)$	$\Delta^2(+)$	$\Delta^3(-)$	६ स्थानांतक Δ^3 जानने के लिये अङ्क
·७६	६६४ ४३६ ३६६ ८१८	११० ६४६ ६०१	३२६ १८२	२४१	६६० ८८६ ९८७
·७७	६६५ ५६० ६२३ २६६	११४ २२७ ६५६	३२६ ९६६	२३७	५७६ ४७४ ४४५
·७८	६६६ ७१७ ५८० ३२२	११७ ४८५ ३०६	३२४ ४४३	२३२	३४२ १४० १११
·७९	६६७ ६०७ ००५ ४१२	१२० ७१६ २८०	३२२ १२४	२३०	००८ ०८८ ६७८
·८०	६६६ १२८ ६६६ २४१	१२३ ६३० २०१	३१६ ८३६	२२६	८५७ ५७५ ३६४
·८१	६७० ३८२ ३३३ ७११	१२७ ११८ ३८६	३१७ ५८०	२२४	३४३ ३२२ २१२
·८२	६७१ ६६७ ७८१ ८६४	१३० २८४ १४६	३१५ ३५४	२२१	०१६ ००६ ६७०
·८३	६७२ ६८४ ७८७ ८१६	१३३ ४२७ ७८४	३१३ १५८	२१७	८८६ ६६४ ७५६
·८४	६७४ ३३३ १३१ ६६६	१३६ ५४६ ५६८	३१० ६६२	२१४	५५४ ४३३ ४३१
·८५	६७५ ७१२ ५६६ ५६६	१३६ ६४६ ८८१	३०८ ८५६	२१४	०२२ ११६ ११८
·८६	६७७ १२२ ६६८ ४६६	१४२ ७२८ ६२०	३०६ ७४७	२१०	६६६ ७८६ ८६५
·८७	६७८ ५६४ ०३६ २२५	१४५ ७८६ ६६५	३०४ ६६७	२०६	५७६ ५५६ ३६३
·८८	६८० ०३५ ५६१ ३८८	१४८ ८२४ ३८४	३०२ ६१२	२०५	३३४ २३३ १२१
·८९	६८१ ५३७ ४२८ ३३३	१५१ ८४१ ३५५	३०० ५८५	२०३	६२० ००१ ७२६
·९०	६८३ ०६६ ३४४ ०८६	१५४ ८३८ १७३	२६८ ५८५	२०१	७६७ ६६८ ५६६
·९१	६८४ ६३१ १३८ ३००	१५७ ८१५ १०१	२६६ ६०८	१६५	७५५ ६४५ ४५३
·९२	६८६ २२२ ६१३ २११	१६० ७७२ ३६१	२६४ ६५६	१६४	३३४ १४१ २२२
·९३	६८७ ८४३ ५७३ ५८६	१६३ ७१० २६६	२६२ ७३३	१८६	४८१ १०८ २७१
·९४	६८६ ४६३ ८२६ ६७६	१६६ ६२६ ०६१	२६० ८३२	१८७	६८६ ८६८ ७८५
·९५	६६१ १७३ १८२ १७२	१६६ ५२८ ६२६	२८८ ६५७	१८७	५७७ ५५४ ३४५
·९६	६६२ ८८१ ४५२ १५६	१७२ ४१० १३१	२८७ १०३	१८४	४३४ ३३३ २२२
·९७	६६४ ६१८ ४५१ ०६३	१७५ २७२ ६०६	२८५ २७३	१८२	२०३ ६२१ ८११
·९८	६६६ १८३ ६६५ ६३२	१७८ ११७ ४८१	२८३ ४६४	१७७	२७१ ६१६ ०६६
·९९	६६८ ३७७ ६०४ ८६८	१८० ६४४ ०७६	२८१ ६७६	१७७	६६४ ६५६ ६६५
१·००	००० ००० ००० ०००	१८३ ७५२ ६२०	२७६ ६१६	१७५	... ...

इस सारणी में (१) ऊर्ध्वाधर कोष्ठ में ·०१ वृद्धि से य के मान १·००तक लिखे हैं। दूसरे में उनके वश से लागा (१+य) का मान १० आधार में १२ दशमलव स्थानों तक लिखा है गा(१+य) का मान य के ०,१ के भीतर रूप से अल्प होता है इस लिये इस कोष्ठ में लघुरिक्थ के मान मे पूर्णाङ्क को छोड दिया है पूर्णाङ्क सर्वत्र अपने मन से—१ वा इस में १० जोड़ कर ६ समझ लेना चाहिये। प्रायः ६ पूर्णाङ्क ही ग्रहण करना उत्तम है जैसा कि त्रिकोणमिति फलों के लघुरिक्थ में किया जाता है।

तीसरे कोष्ठ में एक दशमलव स्थान वर्द्धित संख्याओं के लघुरिक्थों के अन्तर के अन्तिम अङ्क हैं। जैसे य= ·२२ के सामने इस में जो संख्या —११४ ३०० ८४१ है इस से समझना चाहिये कि

लागा(१·२२१)—लागा(१·२२०) = — ·००० ११४ ३०० ८४१।

चौथे और पांचवें कोष्ठ में जहां तीन दशमलव स्थान से अधिक स्थान य मे हों वहां का लागा(१+य) सूक्ष्म ले आने के लिये दूसरा और तीसरा अन्तर लिखा है (चलनकलन का ८५—८६ प्रक्रम देखो) इस में भी आदि के दशमलव जो कि ० हैं छोड़ दिये गये हैं। सर्वत्र बाईं ओर इतने शून्य रख दशमलव का चिन्ह रक्खो जिस में १२ दशमलव स्थान हों। छठवें कोष्ठ में तीसरे दशमलव स्थान के १ से लेकर ६ तक के मान में लघुरिक्थ जानने के लिये क्रम से तीसरे अन्तर का अन्तिम अङ्क हैं। जो तीसरे अन्तर के अन्तिम स्थानीय अङ्क के स्थान में उत्थापन देने से सभों का तीसरा अन्तर बनाते हैं परन्तु यदि तीसरे अन्तर के अन्तिम अङ्क का मान उसके किसी अङ्क से न्यून हो तो उपान्तिम अङ्क में एक न्यून कर तब उसके आगे इसके उस अङ्क को रख कर तीसरा अन्तर बनाना जैसा कि ·४६८, और ·४६६ में है जैसे लागा(१·४६०), लागा(१·४६१), लागा(१·४६२) ····· लागा(१·४६६) इन का मान जानना हो तो ·४६ के सामने का अङ्क लेने से

३,४,३,२,०,१,२,८,८ ये हुये इन का उत्थापन तीसरे अन्तर (–३८५) के

Δ^3 के लिये अङ्क	Δ^3	Δ^2	Δ	लागा(१+य)	य
०	–३८५	४२०४६८	–४७६०५२	६४७ २३६ ७३४ ४३०	·४६०
३	३८३	४२०११३	–५५५५४	६४७ २३६ २५८ ३७८	·४६१
४	३८४	४१६७३०	+३६४५५६	६४७ २३६ २०२ ८२४	·४६२
३	३८३	४१६३४६	७८४२८६	६४७ २३६ ५६७ ३८३	·४६३
२	३८२	४१८६६३	१२०३६३५	६४७ २४० ३५१ ६७२	·४६४
०	३८०	४१८५८१	१६२२५६८	६४७ २४१ ५५५ ३०७	·४६५
१	३८१	४१८२०१	२०४११७६	६४७ २४३ १७७ ६०५	·४६६
२	३८२	४१७८२०	२४५६३८०	६४७ २४५ २१६ ०८४	·४६७
८	३७८	४१७४३८	२८७७२००	६४७ २४७ ६७८ ४६४	·४६८
८	३७८	४१७०६०	३२६४६३८	६४७ २५० ५५५ ६६४	·४६६
		४१६६८२	३७११६६८	६४७ २५३ ५५० ३०२	·४७०

अन्तिम अङ्क के स्थान में देने से और अन्त के दो अङ्कों ८,८ के तीसरे अन्तर के अन्तिम अङ्क, ५ से बड़ा होने के कारण तीसरे अन्तर के उपान्तिम अङ्क ८ में एक कम कर देने से ·४६१, ·४६२, ... ·४६६ का तीसरा अन्तर बना फिर इन का संस्कार बीजगणित की रीति से धन ऋण के वश ·४६० के दूसरे अन्तर में करने से नवों का दूसरा अन्तर बन गया फिर इन का संस्कार ·४६० के प्रथम अन्तर में करने से सभों का प्रथम अन्तर बन गया और अन्त में य के ·४६० मान में जो लागा(१+य) है इस में प्रथम अन्तर का संस्कार करने से सभों का लघुरिक्थ बन गया है। इन सभों का क्रम पूर्वक न्यास ऊपर के चक्र में लिख दिया है। इस पर से सब अन्तरों को लेकर चलनकलन के ८५–८६ प्रक्रम से यदि गा(१+य) के न्यूनतम मान का (जो कि २११ प्रक्रम से य के

·४६१६ · · · · मान में सिद्ध होता है) सूक्ष्म लघुरिक्थ ले आवो तो ६· ६४७२३६१७४३६३४० इतना आता है ।

२४६ । $\int$ इ$^{-य}$ य$^{न-१}$ताय इस यूलर के दूसरे चल में यदि बड़ी सीमा ∞ के तुल्य न हो किन्तु अ के तुल्य हो तो खण्डचलानयन से

$$\int_0^{अ} इ^{-य}\, य^{न-१} ताय$$

$$= \frac{अ^न इ^{-अ}}{न}\left\{१+\frac{अ}{न+१}+\frac{अ^२}{(न+१)(न+२)}+\frac{अ^३}{(न+१)(न+२)(न+३)}+\cdots\right\}$$

वा, $\int_{अ}^{\infty} इ^{-य} य^{न-१} ताय$

$$= अ^{न-१} इ^{-अ}\left\{१+\frac{न-१}{अ}+\frac{(न-१)(न-२)}{अ^२}+\frac{(न-१)(न-२)(न-३)}{अ^३}+\cdots\right\}$$

यदि अ$<$१ और न बड़ी भारी संख्या हो तो पहली श्रेढी का और यदि न $<$ १ से और अ बड़ा हो तो दूसरी श्रेढ़ी का आसन्न मान जान सक्ते हो । १ से न के छोटे होने में दूसरी श्रेढी के सम पद ऋण और विषम पद सब धन होंगे ।

$$अब \int_0^{\infty} इ^{-य} य^{न-१} ताय = \int_{य}^{\infty} इ^{-य} य^{न-१} ताय + \int_0^{य} इ^{-य} य^{न-१} = गा\,(न)$$

इस लिये $\int_0^{य} इ^{-य} य^{न-१}$ ताय$=$गा(न) $-\int_{य}^{\infty}$ इ$^{-य}$य$^{न-१}$ ताय

$$= गा(न) - इ^{-य} य^{न-१}\, या \cdots \qquad (१)$$

यदि $\int_{य}^{\infty}$ इ$^{-य}$य$^{न-१}$ ताय$=$इ$^{-य}$य$^{न-१}$या ऊपर की दूसरी श्रेढी के मान पर से मान लो तो इस का तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

इ$^{-य}$य$^{न-१}$ $= -($न$-$१) इ$^{-य}$य$^{न-२}$या$+$इ$^{-य}$य$^{न-१}$या$-$इ$^{-य}$य$^{न-१}$ यां इ$^{-य}$य$^{न-१}$ का भाग दे देने से और पक्षान्तरनयन से

$$यया\!ं = \{य-(न-१)\}\ या - य \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (२)$$

समझो कि ययां$=$(य$-$अ$_१$) या$-$य$+$क$_१$या^{२} यह एक (३) समीकरण है । इस में यदि या^{२} का भाग दे दो और $\frac{१}{या} = १ + \frac{ग_१ या_१}{य}$

$$-य\, ग_{१} \frac{ययां_{१} - या_{१}}{य^{२}} = (य - अ_{१})\left(१ + ग_{१}\frac{या_{१}}{य}\right) - य\left(१ + ग_{१}\frac{या_{१}}{य}\right)^{२} + क_{१}$$

वा $$ययां_{१} = (य + अ_{१} + १)\, या_{१} - \frac{क_{१} - अ_{१}}{ग_{१}}\, य + ग_{१}\, या_{१}^{२}$$

कल्पना करो कि $ग_{१} = क_{१} - अ_{१}$, $क_{२} = ग_{१}$, $अ_{२} = -(अ_{१} + १)$ तो

$ययां_{१} = (य - अ_{२})\, या_{१} - य + क_{२}\, या_{१}^{२}$ यह ठीक पिछले ही समीकरण के ऐसा उत्पन्न हुआ, इसमें फिर $\frac{१}{या_{१}} = १ + \frac{ग_{२}\, या_{२}}{य}$ ऐसा मान पूर्ववत् क्रिया करें और $ग_{२} = क_{२} - अ_{२}$, $क_{३} = ग_{२}$, $अ_{३} = -(अ_{२} + १)$ तो फिर।

$ययां_{२} = (य - अ_{३})\, या_{२} - य + क_{३}\, या_{२}^{२}$ ऐसा समीकरण बनेगा। यों बार बार क्रिया करने से

$$या = \frac{१}{१ + ग_{१}य^{-१}या_{१}} = \frac{१}{१ + ग_{१}य^{-१}\dfrac{१}{१ + ग_{२}य^{-१}या_{२}}} = \frac{१}{१ + \dfrac{ग_{१}य^{-१}}{१ + ग_{२}य^{-१}या_{२}}}$$

$$= \frac{१}{१ + \dfrac{ग_{१}य^{-१}}{१ + \dfrac{ग_{२}य^{-१}}{१ + ग_{३}य^{-१}या_{३}}}} = \frac{१}{१ + \dfrac{ग_{१}य^{-१}}{१ + \dfrac{ग_{२}य^{-१}}{१ + \dfrac{ग_{३}य^{-१}}{१ + ग_{४}य^{-१}या_{४}}}}}$$

इस रीति से या का मान एक वितत भिन्न रूप में आता है जिस का मान जगह बचाने के लिये लाघव से।

$$या = \frac{१}{१ +}\,\frac{ग_{१}य^{-१}}{१ +}\,\frac{ग_{३}य^{-१}}{१ +}\,\frac{ग_{३}य^{-१}}{१ + इत्या॰} \cdots$$ ऐसा लिखते हैं

अब (३) में यदि $अ_१ = न-१ = न_१$ और $क_१ = ०$ तो यह ठीक (२) समीकरण हो जायगा इस लिये अब जो $ग_१, ग_२$, इत्यादि पर से या का विततभिन्न के रूप में मान आवेगा इस का उत्थापन (१) में देने से $\int_0^{य} इ^{-य} य^{न-१}$ इस का मान आ जायगा। यदि अ, क, ग को $अ_१, क_१, ग_१$ इत्यादि के मान जानने के लिये सांचा मानो तो $ग_१ = क_१ - अ_१$, $क_२ = ग_१$, $अ_२ = -(अ_१+१)$ इन पर से

	१	२	३	४	५	६	७	८	इत्या॰
अ	$न_१$	$-(न_१+१)$	$न_१$	$-(न_१+१)$	$न_१$	$-(न_१+१)$	$न_१$	$-(न_१+१)$	इत्या॰
क	०	$-न_१$	१	$१-न_१$	२	$२-न_१$	३	$३-न_१$	इत्या॰
ग	$-न_१$	१	$१-न_१$	२	$२-न_१$	३	$३-न_१$	४	इत्या॰

फिर ग के मान पर से

$$\int_{य}^{\infty} इ^{-य} य^{न_१} ताय = इ^{-य} य^{न_१} \cfrac{१}{१ - \cfrac{न_१ य^{-१}}{१ + \cfrac{य^{-१}}{१ + इत्या॰}}}$$

$$= इ^{-य} य^{न_१} \frac{१}{१-} \; \frac{न_१ य^{-१}}{१+} \; \frac{य^{-१}}{१+} \; \frac{(१-न_१) य^{-१}}{१+ इत्या॰}$$

इस में यदि य = अ और अ एक बड़ी संख्या हो तो बहुत जल्द आसन्नमान सूक्ष्म आ जायगा फिर $\int_{अ}^{\infty} इ^{-य} य^{न_१}$ ताय इस के मान से (१) समीकरण से $\int_0^{अ} इ^{-य} य^{न_१}$ ताय इस का भी आसन्नमान आ जायगा।

अब इतना ही कह कर इस अध्याय को समाप्त करते हैं कि इस सान्त चलानयन से अनेक चमत्कार प्रकार उत्पन्न होते हैं इसी लिये गणितज्ञ लोग आज तक कुछ न कुछ बिचार करते ही चले जाते हैं। इस में प्रवेश होने के लिये जितना हम ने दिखलाया है उतना ही बहुत है।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

सिद्ध करो कि

१ । $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\text{ज्याषताष}}{\text{कोज्या}^{२}\text{ष}} = \sqrt{२} - १$

२ । $\int_{0}^{\text{अ}} \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}} + \sqrt{(\text{अ}+\text{य})}} = \frac{४}{३}\,\text{अ}^{\frac{१}{२}} \sqrt{(\sqrt{२} - १)}$

३ । $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{ताय}}{\text{अ}+२\text{कय}+\text{गय}^{२}} = \frac{\pi}{\sqrt{(\text{अग}-\text{क}^{२})}}$ यदि $\text{अग} > \text{क}^{२}$

४ । $\int_{0}^{१} \text{य}^{३} (१-\text{य})^{\frac{५}{२}}\, \text{ताय} = \frac{२^{५}}{३.७.११.१३}$

५ । $\int_{0}^{१} \text{य}^{४} (१-\text{य})^{\frac{१}{४}}\, \text{ताय} = \frac{२^{१३}}{५.७.९.१३.१७}$

६ । $\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{२\text{म}-१}\text{य}\,\text{कोज्या}^{२\text{न}-१}\text{य}\,\text{ताय} = \frac{\lfloor\!\underline{\text{म}-१}}{\text{न}(\text{न}+१)\cdots(\text{न}+\text{म}+१)}$

७ । $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{य}^{\text{न}}\text{ताय}}{(\text{अ}+\text{कय}^{२})^{१+\frac{\text{न}}{२}}} = \frac{२\cdot४\cdot६\cdots(२\text{न}-१)}{३\cdot५\cdot७\cdots\text{न}} \cdot \frac{१}{\sqrt{(\text{अक}^{१+\text{न}})}}$

८ । $\int_{0}^{१} \left\{\text{ला}\,\frac{१}{\text{य}}\right\}^{\text{न}} \text{ताय} = \lfloor\!\underline{\text{न}}$

९ । $\int_{0}^{\text{अ}} \frac{\text{ताय}}{(\text{अ}^{\text{न}}-\text{य}^{\text{न}})^{\frac{१}{\text{न}}}} = \frac{\pi}{\text{न}\,\text{ज्या}\frac{\pi}{\text{न}}}$

१० । $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{ताय}}{(\text{य}^{२}+\text{अ}^{२})(\text{य}^{२}+\text{क}^{२})} = \frac{\pi}{२\text{अक}(\text{अ}+\text{क})}$

११ । $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{ताय}}{१-\text{य}^{४}} = \frac{\pi}{४}$

१२ । $\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{स्प}^{\text{न}}\text{ष}\,\text{ताष} = \frac{\pi}{२\text{कोज्या}\frac{\text{न}\pi}{२}}$ यदि $\text{न} < १$

१३ । $\int_0^1 \frac{य^म + य^{-म}}{य^न + य^{-न}} \frac{ताय}{य} = \frac{\pi}{२न कोज्या \frac{म\pi}{२न}}$ यदि न $>$ म

१४ । $\int_0^\infty \frac{(इ^{अय}+इ^{-अय})(इ^{कय}+इ^{-कय})}{इ^{\pi य}+इ^{-\pi य}} ताय = \frac{कोज्या\frac{अ}{२} कोज्या\frac{क}{२}}{कोज्याअ + कोज्याक}$

यदि अ + क $<\pi$

१५ । $\int_0^\infty \frac{(इ^{अय}+इ^{-अय})(इ^{कय}+इ^{-कय})}{इ^{\pi य}+इ^{-\pi य}} ताय = \frac{ज्याक}{कोज्याअ + कोज्याक}$

यदि अ+क $<\pi$

१६ । $\int_0^\infty \frac{इ^{कय}+इ^{-कय}}{इ^{\pi य}+इ^{-\pi य}}$ कोज्याअय ताय $= \frac{(इ^{\frac{अ}{२}}+इ^{-\frac{अ}{२}}) कोज्या\frac{क}{२}}{इ^{अ}+२कोज्याक+इ^{-अ}}$ ।

यदि क $<\pi$

१७ । $\int_0^\infty \frac{इ^{कय}-इ^{-कय}}{इ^{\pi य}-इ^{-\pi य}}$ कोज्याअयताय $= \frac{ज्याक}{इ^{अ}+२कोज्याक+इ^{-अ}}$

यदि क $<\pi$

१८ । $\int_0^\infty \frac{इ^{कय}+इ^{-कय}}{इ^{\pi य}-इ^{-\pi य}}$ ज्याअयताय $= \frac{१}{२} \frac{इ^{अ}-इ^{-अ}}{इ^{अ}+२कोज्याक+इ^{-अ}}$

१९ । $\int_0^1 \frac{य^{अ}-य^{-अ}}{१-य}$ ताय $= \pi$ कोस्पअ$\pi - \frac{१}{अ}$, यदि अ $<$ १

२० । $\int_0^\pi \frac{ला(१+ज्याअ कोज्याय)}{कोज्याय}$ इस का मान क्या होगा

उ० πअ (अ के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालो)

२१ । $\int_0^\infty \frac{इ^{-अय} कोज्यामय}{य}$ ताय इस का मान बताओ उ० स्प$^{-१}\left(\frac{म}{अ}\right)$

२२ । $\int_0^\infty \frac{ला(१+अ^२य^२)}{१+क^२य^२}$ ताय इस का मान क्या होगा ।

$$\text{उ०}\cdot\frac{\pi}{\text{क}}\ \text{ला}\ \left(\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{क}}\right)$$

(अ के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालो)

२३। $\int_0^\infty \frac{\text{इ}^{\text{अय}}+\text{इ}^{-\text{अय}}}{\text{इ}^{\pi\text{य}}-\text{इ}^{-\pi\text{य}}}\ \text{य ताय} = \frac{1}{4}\ \text{छ}^2\ \frac{\text{अ}}{2}$

सिद्ध करो कि

२४। $\int_0^1 \frac{\text{य}^{\text{अ}-1}+\text{य}^{-\text{अ}}}{1+\text{य}}\ \frac{\text{ताय}}{\text{य}} = \text{ला}\ (\text{स्प}\ \frac{\text{अ}\pi}{2})$

२५। $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ला}\ (1+\text{कोज्याअ कोज्याय})\ \frac{\text{ताय}}{\text{कोज्याय}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4}-\text{अ}^2\right)$

२६। $\int_0^\infty \frac{\text{य}^{\text{अ}}\ \text{लाय ताय}}{1+\text{य}^2} = \frac{\pi^2}{4}\ \frac{\text{ज्या}\ \frac{\text{अ}\pi}{2}}{\text{कोज्या}^2\frac{\text{अ}\pi}{2}}$

२७। $\int_0^\infty \frac{(\text{य}^2+\text{अ}^2)\sqrt{2}}{\text{य}^4+\text{क}^2\text{य}^2+\text{क}^4}\ \text{ताय} = \frac{\pi}{2}\ \frac{\text{अ}^2+\text{क}^2}{\text{क}^3}$

२८। $\int_0^1 \text{नय}^{2\text{न}-1}\text{इ}^{\text{य}^{\text{न}}}\text{ताय} = 1$

२९। $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\text{कोज्या}\ (\text{अस्पय})\ \text{ताय} = \pi\text{इ}^{-\text{अ}}$

३०। सिद्ध करो कि $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{छे}^4\text{यताय}}{(\text{अ}^2+\text{क}^2\text{स्प}^2\text{य})^2} = \frac{\pi}{4}\left\{\frac{1}{\text{अक}^3}+\frac{1}{\text{अ}^3\text{क}}\right\}$

३१। सिद्ध करो कि $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(2\text{स्पष})}\text{ताष}$

$= \frac{\pi}{2}+\text{ला}\{\sqrt{2}-1\}$, मान लो कि $\text{स्पष} = \text{य}^2$

३२। सिद्ध करो कि $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(\text{कोस्पष})}\text{ताष} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\pi}{2}+\text{ला}\{\sqrt{2}+1\}\right]$

३३। सिद्ध करो कि $\text{कय इ}^{-\text{अ}^2\text{य}^2}\int_0^{\text{य}} \text{इ}^{\text{अ}^2\text{य}^2}\text{ताय} = \frac{\text{क}}{2\text{अ}^2}$, यदि $\text{य}=\infty$

३४। यदि $\text{फ}(\text{य}, \frac{1}{\text{य}}) = \text{फ}(\frac{1}{\text{य}}, \text{य})$ तो सिद्ध करो कि

$$\int_0^\infty \frac{\text{ताय}}{\text{यफ}(\text{य}, \frac{1}{\text{य}})} = 2\int_1^\infty \frac{\text{ताय}}{\text{यफ}(\text{य}, \frac{1}{\text{य}})}$$

३५। सिद्ध करो कि $\int_0^{२\pi} \text{इ}^{\text{कोज्याष}} \text{कोज्याष}(\text{ज्याताष})\text{ष} = २\pi$
(डेमाइवर के सिद्धान्त से कोज्याष, कोज्या२ष, इत्यादि के रूप में इस के मान तुल्य एक श्रेढी बना कर चलानयन करो)

३६। सिद्ध करो कि $\int_0^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{\text{न}}\text{षताष} = \frac{\sqrt{\pi}}{२} \frac{\text{गा}\left(\frac{\text{न}+१}{२}\right)}{\text{गा}\left(\frac{\text{न}+२}{२}\right)}$

३७। सिद्ध करो कि $\text{गा}\left(\frac{\text{न}}{२}\right)\text{गा}\left(\frac{\text{न}+१}{२}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{२^{\text{न}-१}} \text{गा}(\text{न})$

३८। सिद्ध करो कि $\int_0^{\frac{\pi}{२}} \frac{\text{ज्या}^{२\text{म}-१}\text{पकोज्या}^{२\text{न}-१}\text{षताष}}{(\text{अज्या}^२\text{ष}+\text{ककोज्या}^२\text{ष})^{\text{म}+\text{न}}} = \frac{\text{गा}(\text{म})\text{गा}(\text{न})}{२\text{अ}^{\text{म}}\text{क}^{\text{न}}\text{गा}(\text{म}+\text{न})}$

३९। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \text{इ}^{-\text{अय}}\text{कोज्याकय}^{\text{म}-१}\text{ताय}$

$$= \frac{\text{गा}(\text{म})}{(\text{अ}^२+\text{क}^२)^{\frac{\text{म}}{२}}} \text{कोज्याम}\left\{\text{स्प}^{-१}\frac{\text{क}}{\text{अ}}\right\}$$

और $\int_0^{\infty} \text{इ}^{-\text{अय}}\text{ज्याकय य}^{\text{म}-१}\text{ताय} = \frac{\text{गा}(\text{म})}{(\text{अ}^२+\text{क}^२)^{\frac{\text{म}}{२}}} \text{ज्याम}\left\{\text{स्प}^{-१}\frac{\text{क}}{\text{अ}}\right\}$

($\int_0^{\infty} \text{इ}^{-\text{अ}'\text{य}}\text{य}^{\text{म}-१}\text{ताय} = \frac{\text{गा}(\text{म})}{\text{अ}'^{\text{म}}}$,
इस में $\text{अ}' = \text{अ} - \text{क}\sqrt{-१}$ मान सम्भाव्य, असम्भाव्य को बराबर करो)

४०। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \frac{\text{ज्याय}}{\text{य}} = \int_0^{\infty} \frac{\text{ज्या}^२\text{य}}{\text{य}^२}$

४१। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \text{कोज्याकय य}^{\text{न}-१}\text{ताय} = \frac{\text{गा}(\text{न})}{\text{क}^{\text{न}}} \text{कोज्या} \frac{\text{न}\pi}{२}$

$$\int_0^{\infty} \text{ज्याकय य}^{\text{न}-१}\text{ताय} = \frac{\text{गा}(\text{न})}{\text{क}^{\text{न}}} \text{ज्या} \frac{\text{न}\pi}{२}$$

४२। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \frac{\text{कोज्याकलताल}}{\text{ल}^{\text{न}}}$

$$= \frac{१}{\text{गा}(\text{न})} \int_0^\infty \frac{\text{य}^{\text{न}}\text{ताय}}{\text{क}^२+\text{य}^२} = \frac{\text{क}^{\text{न}-१}}{\text{गा}(\text{न})} \frac{\pi}{२\text{कोज्या}\frac{\text{न}\pi}{२}}$$

$$\int_0^\infty \frac{\text{ज्याकलताल}}{\text{ल}^{\text{न}}} = \frac{\text{क}^{\text{न}-१}}{\text{गा}(\text{न})} \frac{\pi}{२\text{ज्या}\frac{\text{न}\pi}{२}}$$

४३ । सिद्ध करो कि $\int_0^\infty \text{इ}^{-\text{र}^२}\text{र}^{-२}\text{तार} = -\sqrt{\pi}$

४४ । सिद्ध करो कि $\int_0^\infty \left(\text{इ}^{-\frac{\text{अ}^२}{\text{य}^२}} - \text{इ}^{-\frac{\text{क}^२}{\text{य}^२}}\right)\text{ताय} = (\text{क}-\text{अ})\sqrt{\pi}$

४५ । सिद्ध करो कि $\int_0^\infty \frac{\text{ला}(१-२\text{नकोज्याकय}+\text{न}^२)\text{ताय}}{\text{य}} = ०$

यदि न∠१

४६ । सिद्ध करो कि $\int_0^\infty \text{ला} \frac{१+२\text{नकोज्याअय}+\text{न}^२}{१+२\text{नकोज्याकय}+\text{न}^२} \frac{\text{ताय}}{\text{य}}$ यह क्रम से $२\text{ला}(१+\text{न})\text{ला}\frac{\text{क}}{\text{अ}}$, $२\text{ला}(१+\frac{१}{\text{न}})\text{ला}\frac{\text{क}}{\text{अ}}$ इस के तुल्य होगा

यदि न∠१, न7१

(फ़्रयुलानी का सिद्धान्त देखो)

४७ । सिद्ध करो कि $\int_0^\infty \frac{\text{ताय}}{१+\text{य}^२} \text{ला}(\text{य}+\frac{१}{\text{य}}) = \pi\,\text{ला}(२)$

(य = स्पप ऐसा मान कर आगे क्रिया करो)

४८। सिद्ध करो कि $\int_0^\infty \left\{\frac{\text{इ}^{-\text{अय}}-\text{इ}^{-\text{कय}}}{\text{य}}\right\}^२ \text{ताय} = \text{ला}\frac{(२\text{अ})^{२\text{अ}}(२\text{क})^{२\text{क}}}{(\text{अ}+\text{क})^{२(\text{अ}+\text{क})}}$

४९ । सिद्ध करो कि $\int_0^१ \frac{\text{य}^{\text{म}}-\text{य}^{\text{न}}}{\text{लाय}} \frac{\text{ताय}}{\text{य}} = \text{ला}\frac{\text{म}}{\text{न}}$

(लाय = र मान दूसरा रूप बना कर फ़्रयुलानी का सिद्धान्त लगावो) वा द्विगुण चलानयन $\int_{\text{न}}^{\text{म}}\int_0^१ \text{य}^{\text{अ}-१}\text{ताय ताअ}$ इस का करो)

५० । सिद्ध करो कि $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \{\sqrt{(\text{स्पष})}+\sqrt{(\text{को स्पष})}\}$ ताष $= \frac{\pi}{२\sqrt{२}}$

५१ । सिद्ध करो कि $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{स्प}^{न}\text{ष}}{\text{अ}\,\text{कोज्या}^{२}\text{ष}+\text{क}\,\text{ज्या}^{२}\text{ष}}$

$$= \frac{\pi}{२\,\text{कोज्या}\frac{१}{२}\,\text{न}\pi} \cdot \frac{१}{\text{अ}^{\frac{१-\text{न}}{२}}\,\text{क}^{\frac{१+\text{न}}{२}}}$$

यदि $\text{न} \angle १$

५२ । सिद्ध करो कि $\text{ला}\int \left\{\frac{\text{इ}^{\text{य}}+१}{\text{इ}^{\text{य}}-१}\right\}$ ताय$= \frac{\pi^{२}}{४}$,

(इ$^{\text{य}}$ का अंश हर में भाग दे कर लघुरिक्थ की श्रेढी से क्रिया करो)

५३ । सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\text{य}}\ \text{लाय}}{(१+\text{य})^{२}}$ ताय$= \pi$

५४ । सिद्ध करो कि $\int_0^{१} \frac{\text{य}^{\text{द}-१}(१-\text{य})^{\text{म}-१}}{(\text{क}+\text{गय})^{\text{द}-\text{म}}}$ ताय

$$= \frac{\text{गा}(\text{द})\text{गा}(\text{म})}{\text{गा}(\text{द}+\text{म})} \cdot \frac{१}{\text{क}^{\text{म}}(\text{क}+\text{ग})^{\text{द}}}$$

५५ । सिद्ध करो कि $\int_0^{\pi} \frac{\text{ज्या}^{\text{न}-१}\text{ष ताष}}{(\text{अ}_{१}+\text{क}_{१}\text{कोज्याष})^{\text{न}}}$

$$= \frac{\{\text{गा}(\frac{\text{न}}{२})\}^{२}}{\text{गा}(\text{न})} \cdot \frac{२^{\text{न}-१}}{(\text{अ}_{१}^{२}-\text{क}_{१}^{२})^{\frac{\text{न}}{२}}}$$

५६ । सिद्ध करो कि $\text{न}\int_0^{१} \frac{\text{य}^{\text{म}-१}\text{ताय}}{(१-\text{य}^{\text{न}})^{\frac{\text{म}}{\text{न}}}} = \frac{\pi}{\text{ज्या}\,\frac{\text{म}\pi}{\text{न}}}$

५७ । सिद्ध करो कि

$$(१-\text{ग})^{\frac{\text{म}}{\text{न}}}\int_0^{१} \frac{\text{य}^{\frac{\text{म}}{\text{न}}-१}\ \text{ताय}}{(१+\text{गय})(१-\text{य})^{\frac{\text{म}}{\text{न}}}} = \text{न}\int_0^{१} \frac{\text{य}^{\text{म}-१}\text{ताय}}{(१-\text{य}^{\text{न}})^{\frac{\text{म}}{\text{न}}}}$$

५८ । सिद्ध करो कि $\int_0^\infty \frac{\text{ज्या अ य ज्या}^2 \text{ग य}}{\text{य}}$ ताय इस का मान अ, और π के वश से 0 वा $\pm\frac{\pi}{8}$ अथवा $\pm\frac{\pi}{\text{८}}$ होगा ।

५९ । सिद्ध करो कि $\int_0^\infty \text{इ}^{-\left(\text{य}^2+\frac{\text{अ}^2}{\text{य}^2}\right)\text{क}}$ ताय $= \frac{1}{\sqrt{\text{क}}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\text{इ}^{-2\text{अक}}$

६० । सिद्ध करो कि

$$\int_0^\infty \text{इ}^{-\left(\text{य}^2+\frac{\text{अ}^2}{\text{य}^2}\right)\text{कोज्याष}} \text{कोज्या}\left\{\left(\text{य}^2+\frac{\text{अ}^2}{\text{य}^2}\right)\text{ज्याष}\right\} \text{ ताय}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\text{इ}^{-2\text{अकोज्याष}}\text{कोज्या}\left\{2\text{अज्याष}+\frac{\text{ष}}{2}\right\}$$

और $\int_0^\infty \text{इ}^{-\left(\text{य}^2+\frac{\text{अ}^2}{\text{य}^2}\right)\text{कोज्याष}} \text{ज्या}\left\{\left(\text{य}^2+\frac{\text{अ}^2}{\text{य}^2}\right)\text{ज्याष}\right\}$ ताय

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\text{इ}^{-2\text{अकोज्याष}}\text{ज्या}\left(2\text{अज्याष}+\frac{\text{ष}}{2}\right)$$

(५९वें प्रश्न में क के स्थान में कोज्याष+ज्याष$\sqrt{-1}$ का उत्थापन दे कर सम्भाव्य और असम्भाव्य को अलग अलग बराबर करो)

६१ । सिद्ध करो कि $\int_0^\infty \frac{(1-\text{य}^2)\text{ कोज्या गय ताय}}{1+\text{य}^2} = \pi\text{इ}^{-\text{ग}}$

६२ । सिद्ध करो कि $1-\frac{\text{य}^2}{2^2}+\frac{\text{य}^4}{2^2 4^2}-\frac{\text{य}^6}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}+\cdots$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{कोज्या (यज्यार) तार}$$

६३ । सिद्ध करो कि $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्यायज्या}^{-1}(\text{ज्याय ज्यार})\text{ ताय तार} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

६४ । सिद्ध करो कि $\int_0^\infty \text{कोज्या}\left(\text{कय}^{\frac{1}{\text{न}}}\right)\text{ ताय} = \frac{\text{गा}(\text{न}+1)\text{ कोज्या}\left(\frac{\text{नग}}{2}\right)}{\text{क}^{\text{न}}}$

६५ । सिद्ध करो कि $\int_0^1 \frac{\text{लाय ताय}}{1+\text{य}} = -\frac{\pi^2}{12}$

६६ । सिद्ध करो कि $\int_0^{१} \frac{ताय\,(लाय)^{२न-१}}{१-य}$

$$= -\underline{|२न-१}\left[१+\frac{१}{२^{२न}}+\frac{१}{३^{२न}}+\cdots\right]$$

६७ । सिद्ध करो कि $\int_0^{\frac{अ}{२}} \frac{ताय}{\sqrt{(२अय-य^{२})}\sqrt{(अ^{२}-य^{२})}}$

$= \frac{२}{३अ} दै_{१}\left(ग, \frac{\pi}{२}\right)$, जहां $ग=\frac{१}{३}$

{३४ प्रक्रम का (३) और ३० प्रक्रम का (४) उदाहरण देखो}

६८ । जिस वक्र का ध्रुवीय समीकरण $श्रु=ग\,ज्याघ\,कोज्याघ$ यह है उस में $घ=0$ और $घ=\frac{\pi}{२}$ के बीच में श्रुति का मध्यम मान निकालो । उ० $\frac{ग}{\pi}$

६९ । सिद्ध करो कि

$$\int_{अ}^{\infty} इ^{-य^{२}}\, ताय = \frac{इ^{-अ^{२}}}{२अ}\,\frac{१}{१+}\,\frac{क}{१+}\,\frac{२क}{१+}\,\frac{३क}{१+}+\frac{४क}{१+\cdots}$$ जहां $क=\frac{१}{२अ^{२}}$

७० । सिद्ध करो

$$इ^{य}\int_{य}^{\infty} इ^{-य}\,लायताय = लाय + \frac{य^{-१}}{१+}\,\frac{य^{-१}}{१+}\,\frac{२य^{-१}}{१+}\,\frac{२य^{-१}}{१+}\,\frac{३य^{-१}}{१+}\,\frac{३य^{-१}}{१+}\cdots$$

७१ । पचीस अङ्गुल आधार पर जो वर्गाकार एक रूमाल थी उस के बीच में एक किनारे से दूसरे किनारे तक एक लड़के ने एक टेढ़ी लाल रोशनाई से धारी कर दी । धारी के प्रतिबिन्दु से सामने के भुज पर लम्ब डाला तो लम्ब का मान $६\sqrt{य}$ ठहरा तो लम्बों के मध्यम मान तुल्य लम्ब में य का क्या मान होगा । एक कोने से लम्ब मूल का अन्तर य है । उ० $य= ११\frac{१}{६}$ अङ्गुल

इति नवमाध्याय ।

अथ दशमाध्याय।

मिश्रितप्रकीर्णक।

२४७। ६३वें प्रक्रम के अन्त में सिद्ध हो चुका है कि यदि सीमा स्थिराङ्क हों तो $\int_{अ}^{क}\int_{ग}^{घ}$ फ(य,र) तारताय = $\int_{ग}^{घ}\int_{अ}^{क}$ फ(य,र) तायतार।

परन्तु यदि इन सीमाओं में से कोई दो चल हों जैसा कि ६४वें प्रक्रम में दिखलाया है तब कैसे क्रम को बदल कर चलानयन करना इस के लिये एक उदाहरण दिखलाते हैं।

$\int_{0}^{अ}\int_{0}^{\sqrt{(अ^2-य^2)}}$ फ(य,र) तार ताय इस में क्रम को बदलने की इच्छा है। अर्थात् जहां पहले र के वश से चलानयन किया गया है वहां पहले य के वश से किया चाहते हैं।

यहां यदि विचारो तो र की सीमा 0 और $\sqrt{(अ^2-य^2)}$ है इस लिये कह सक्ते हो कि जिस वृत्त का केन्द्र मूल स्थान और व्यासार्द्ध अ है उस के परिधि चतुर्थांश के प्रतिविन्दु तक र के मान में पहले चल निकाला गया है फिर र अक्ष और वृत्त के योग विन्दु से ले कर य के अ तुल्य मान में चल का मान लाया गया है। इस लिये यदि ल=फ(य,र) यह एक घनपृष्ठ का समीकरण कल्पना करें तो ऊपर का द्विगुण चल १७४वें प्रक्रम से एक घनक्षेत्र के उस खण्ड के घनफल के समान है जो इस वृत्त पाद के प्रतिविन्दु से लम्ब खड़ा करने से लम्बाग्रों के भीतर है। इस लिये यदि अब क्रम बदलना चाहें तो वृत्तपाद के भीतर पहले य की सीमा 0 और $\sqrt{(अ^2-र^2)}$ होगी फिर र की सीमा 0 और अ होगी इस लिये।

$$\int_{0}^{अ}\int_{0}^{\sqrt{(अ^2-य^2)}}फ(य,र)तारताय=\int_{0}^{अ}\int_{0}^{\sqrt{(अ^2-र^2)}}फ(य,र)तायतार$$

ऐसा होगा।

क्रम बदलने से क्या अभिप्राय है इस के समझने के लिये केवल ऊपर उदाहरण दिखलाया गया है इस के लिये कोई विधि नहीं है उदाहरण के वश बुद्धिमानों को चाहिये कि क्रम बदलने में सीमाओं का ज्ञान करें।

२४८ । ऊपर के विषय का एक और उदाहरण दिखलाते हैं ।

$\int_0^{अ}\int_0^{य}\int_0^{र}$ फ(य,र,ल) ताल तार ताय इस में क्रम को बदलना है।

यहां सीमाओं के देखने से बोध होता है कि एक सूची के सीमाओं के भीतर चलानयन किया गया है जिसके सीमाओं के धरातल का क्रम से ल=०, ल=र, र=य, य=अ, ये समीकरण हैं ।

इस लिये क्रम बदलने से

$$\int_0^{अ}\int_{र}^{अ}\int_0^{र} फ(य,र,ल) तालतायतार$$
$$\int_0^{अ}\int_0^{र}\int_{र}^{अ} फ(य,र,ल) तायतालतार$$
$$\int_0^{अ}\int_{ल}^{अ}\int_{र}^{अ} फ(य,र,ल) तायतारताल$$
$$\int_0^{अ}\int_0^{य}\int_{ल}^{य} फ(य,र,ल) तारतालताय$$
$$\int_0^{अ}\int_{ल}^{अ}\int_{ल}^{य} फ(य,र,ल) तारतायताल$$

ये पांच भेद होंगे । इन पांचों से वही चल आवेगा जो कि दिये हुये फल का चल होगा । यदि फ(य,र,ल) के स्थान में १ रख लो तो छओ पर से $\frac{अ^3}{६}$ यही मान प्रतीति के योग्य आ जायगा ।

२४९ । $\int\int$ शातारताय इस को व और श के रूप में बदल देना है जहां शा, य और र का फल है और

$फ_१(य,र,व,श)=०,\ फ_२(य,र,व,श)=०,\ \cdots\cdots (१)$

यहां पर इतना समझ लेना चाहिये कि $\int\int$ शातारताय इस में र के ज्ञात सीमाओं के भीतर चलानयन किया गया है जो सीमायें कि य के फल हैं और य की सीमायें भी ज्ञात हैं और यह भी जानते हैं कि स्थिर हैं ।

(१) इस के दोनों समीकरणों पर से व की उन्मिति जान उन के साम्य से स्पष्ट है कि र = फा(य,श) (२) ऐसा होगा ।

इस पर से तार=फां(य,श) ताश जहां फा(य,श) य को स्थिर मान श के वश से फां(य,श) का तात्कालिक सम्बन्ध है ।

र, और तार का यह जो मान आया है उस का उत्थापन $\int$ शातार में देने से $\int$ $शा_1$ फा(य,श) ताश ऐसा होगा जहां $शा_1$ यह शा के मान में र का उत्थापन देने से शा का रूपान्तर है। इस लिये पहले द्विगुणचलानयन का रूप $\int\int$ $शा_1$ फा(य,श)ताशताय ऐसा होगा जहां र के ज्ञात सीमाओं पर से श की भी उचित सीमा (२) समीकरण से विदित हो जायगी।

आगे अब समझो कि उदाहरण के रूप के वश से जैसा कि २४७-४८ प्रक्रमों में दिखा आये हैं $\int\int$ $शा_1$फा(य,श) ताश ताय इस में उचित सीमाओं के भीतर क्रम को बदल कर $\int\int$ $शा_1$फा(य,श) ताय ताश इस का मान जान लिया अब चाहते हैं कि य और ताय को उड़ा दें और उस के स्थान मे व और ताव आ जायं।

(१) के समीकरणों पर से र की दो उन्मिति जान कर उन के साम्य से य का मान ले आवो तो स्पष्ट है कि य = फि(श,व) ·· ·· (३) होगा फिर इस पर से ताय= फि' (श,व) ताव, जहां फि'(श,व) व के वश से फि(श,व) का तात्कालिक सम्बन्ध है।

द्विगुणचल का जो $\int\int$ $शा_1$फा(य,श) तायताश यह रूपान्तर है इस में य, और ताय के मान का उत्थापन देने से

$\int\int$ शा' फा'(य,श) फि'(श,व) ताव ताश जहां $शा_1$ के मान में य के मान का उत्थापन देने से शा' आया है और फा'(य,श) के मान में य के स्थान में फि(श,व) का उत्थापन दे देना है।

यहां य की जानी हुई सीमाओं पर से (३) समीकरण के बल से श के रूप में व की सीमा विदित हो जायगी।

(१) से और चलनकलन के

$$\frac{ताफ_1}{तार}\frac{तार}{ताश}+\frac{ताफ_1}{ताव}\frac{ताव}{ताश}+\frac{ताफ_1}{ताश}=0,$$

$$\frac{ताफ_2}{तार}\frac{तार}{ताश}+\frac{ताफ_2}{ताव}\frac{ताव}{ताश}+\frac{ताफ_2}{ताश}=0;$$

$\frac{\text{ताव}}{\text{ताश}}$ की उन्मिति से $\dfrac{\frac{\text{ताफ}_{\text{१}}}{\text{तार}}\frac{\text{तार}}{\text{ताश}}+\frac{\text{ताफ}_{\text{१}}}{\text{ताश}}}{\frac{\text{ताफ}_{\text{१}}}{\text{ताव}}}=\dfrac{\frac{\text{ताफ}_{\text{२}}}{\text{तार}}\frac{\text{तार}}{\text{ताश}}+\frac{\text{ताफ}_{\text{२}}}{\text{ताश}}}{\frac{\text{ताफ}_{\text{२}}}{\text{ताव}}}$

इस लिये $\frac{\text{तार}}{\text{ताश}}=\text{फ}'(\text{य},\text{श})=\dfrac{\frac{\text{ताफ}_{\text{१}}}{\text{ताश}}\frac{\text{ताफ}_{\text{२}}}{\text{ताव}}-\frac{\text{ताफ}_{\text{१}}}{\text{ताव}}\frac{\text{ताफ}_{\text{२}}}{\text{ताश}}}{\frac{\text{ताफ}_{\text{१}}}{\text{ताव}}\frac{\text{ताफ}_{\text{२}}}{\text{तार}}-\frac{\text{ताफ}_{\text{१}}}{\text{तार}}\frac{\text{ताफ}_{\text{२}}}{\text{ताव}}}$

तात्कालिक सम्बन्ध लेने के अनन्तर र और व के स्थान में उन का मान जो य और श के रूप में आया है रख देना चाहिये।

इसी तरह (१) से

$$\frac{\text{ताफ}_{\text{१}}}{\text{ताय}}\frac{\text{ताय}}{\text{ताव}}+\frac{\text{ताफ}_{\text{१}}}{\text{तार}}\frac{\text{तार}}{\text{ताव}}+\frac{\text{ताफ}_{\text{१}}}{\text{ताव}}=0,$$

$$\frac{\text{ताफ}_{\text{२}}}{\text{ताय}}\frac{\text{ताय}}{\text{ताव}}+\frac{\text{ताफ}_{\text{२}}}{\text{तार}}\frac{\text{तार}}{\text{ताव}}+\frac{\text{ताफ}_{\text{२}}}{\text{ताव}}=0,$$

इस पर से $\frac{\text{तार}}{\text{ताव}}$ की उन्मिति जान कर

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताव}}=\dfrac{\frac{\text{ताफ}_{\text{१}}}{\text{ताव}}\frac{\text{ताफ}_{\text{२}}}{\text{तार}}-\frac{\text{ताफ}_{\text{१}}}{\text{तार}}\frac{\text{ताफ}_{\text{२}}}{\text{ताव}}}{\frac{\text{ताफ}_{\text{१}}}{\text{तार}}\frac{\text{ताफ}_{\text{२}}}{\text{ताय}}-\frac{\text{ताफ}_{\text{१}}}{\text{ताय}}\frac{\text{ताफ}_{\text{२}}}{\text{तार}}}=\text{फि}'(\text{श},\text{व})$$

इस लिये $\text{फा}'(\text{य},\text{श})\ \text{फि}'(\text{श},\text{व})$

$$=\dfrac{\frac{\text{ताफ}_{\text{१}}}{\text{ताश}}\frac{\text{ताफ}_{\text{२}}}{\text{ताव}}-\frac{\text{ताफ}_{\text{१}}}{\text{ताव}}\frac{\text{ताफ}_{\text{२}}}{\text{ताश}}}{\frac{\text{ताफ}_{\text{१}}}{\text{तार}}\frac{\text{ताफ}_{\text{२}}}{\text{ताय}}-\frac{\text{ताफ}_{\text{१}}}{\text{ताय}}\frac{\text{ताफ}_{\text{२}}}{\text{तार}}}$$

इन सब का उत्थापन देने से।

$$\iint \text{शातारताय}=\iint \text{शा}\dfrac{\frac{\text{ताफ}_{\text{१}}}{\text{ताश}}\frac{\text{ताफ}_{\text{२}}}{\text{ताव}}-\frac{\text{ताफ}_{\text{१}}}{\text{ताव}}\frac{\text{ताफ}_{\text{२}}}{\text{ताश}}}{\frac{\text{ताफ}_{\text{१}}}{\text{तार}}\frac{\text{ताफ}_{\text{२}}}{\text{ताय}}-\frac{\text{ताफ}_{\text{१}}}{\text{ताय}}\frac{\text{ताफ}_{\text{२}}}{\text{तार}}}\text{तावताश}\ (\text{४})$$

यहां भी तात्कालिक सम्बन्ध लेने के अनन्तर य और र के मान का उत्थापन दे देना चाहिये जो कि व और श के रूप में आये हैं और शा के मान में भी य, र के इन्ही मानों का उत्थापन दे दो।

यदि (१) समीकरण का रूप

फ$_1$(य,र,व,श)=य−फी$_1$(व,श)=०,र−फी$_2$(व,श)=०,=फ$_2$(य,र,व,श)··(५)
ऐसा हो तो

$$\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताय}}=1,\ \frac{\text{ताफ}_1}{\text{तार}}=0,\ \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताय}}=0,\ \frac{\text{ताफ}_2}{\text{तार}}=1,$$

इस का उत्थापन (४) में देने से

$$\int\int \text{शातारताय}=\int\int \text{शा}\left(\frac{\text{ताफी}_1}{\text{ताव}}\frac{\text{ताफी}_2}{\text{ताश}}-\frac{\text{ताफी}_1}{\text{ताश}}\frac{\text{ताफी}_2}{\text{ताव}}\right)\text{तावताश}$$

यहां (५)वें से य, और र के मान व और श के रूप में जो निकलेंगे उन का उत्थापन शा में दे देना चाहिये।

यदि (५)वें से य, और र के रूप में फी$_1$(व,श) और फी$_2$(व,श) का मान जान कर तात्कालिक सम्बन्ध निकालो तो ऊपर का समीकरण नीचे लिखे समीकरण के समान होगा।

$$\int\int \text{शा तारताय}=\int\int \text{शा}\left(\frac{\text{ताय}}{\text{ताव}}\frac{\text{तार}}{\text{ताश}}-\frac{\text{ताय}}{\text{ताश}}\frac{\text{तार}}{\text{ताव}}\right)\text{ताश ताव}\cdots(६)$$

यदि (१) समीकरण का रूप नीचे लिखे के ऐसा हो

व−फु$_1$(य,र)=०, श−फु$_2$(य,र) = ० · · · · · · · · · (७)

तो ऊपर ही की युक्ति से

$$\int\int\text{शातारताय}\int\int\frac{\text{शा ताव ताश}}{\frac{\text{ताफु}_1}{\text{ताय}}\frac{\text{ताफु}_2}{\text{तार}}-\frac{\text{ताफु}_2}{\text{ताय}}\frac{\text{ताफु}_1}{\text{तार}}}=\int\int\frac{\text{शा ताव ताश}}{\frac{\text{ताव}}{\text{ताय}}\frac{\text{ताश}}{\text{तार}}-\frac{\text{ताव}}{\text{तार}}\frac{\text{ताश}}{\text{ताय}}}(८)$$

नये चलों के यदि सीमा प्रसिद्ध हो जायं तो (४), (६), और (८)वें से नये चल राशि के वश से द्विगुण चल का मान सहज में सिद्ध हो जायगा परन्तु ∫ शा$_1$फा(य,श) ताश ताय पर से क्रम बदलने में जहां कठिनता आ पड़ेगी वहां पर ये सब बेकाम पड़ जायंगे।

२५०। ऊपर के प्रक्रम की व्याप्ति दिखलाने के लिये कुछ उदाहरण दिखलाते हैं।

(१) $\int_0^{ग}\int_0^{ग-य}$ शाताr त य इस को व,श के वश से बदल देने की इच्छा है जहां य+र = व, र = वश ।

ऊपर के प्रक्रम में जैसा लिखा है वैसी सब क्रिया करने से

$$र = \frac{शय}{१-श} \text{ और } \frac{तार}{ताश} = \frac{य}{(१-श)^२} ।$$

जब र = ० तब श = ०, और जब र = ग—य तब श = $\frac{ग-य}{ग}$ इस लिये पहले र को बदलने से

$$\int_0^{ग}\int_0^{\frac{ग-य}{ग}} शा_१ य(१-श)^{-२} ताश ताय$$ ऐसा हुआ ।

इस द्विगुणचल का २४७ प्रक्रम के ऐसा यदि स्वरूप विचारो तो ग व्यासार्द्ध से जो वृत्त बनेगा उसके एक व्यास रेखा को य अक्ष मान और उस के एक अग्र से भुज गणना करें तो श का मान, उस कोण की कोटिज्या होगी जो वृत्त के कोट्यग्र पर केन्द्र से गई रेखा और य अक्ष से उत्पन्न होता है । इस लिये एक वृत्त पाद के भीतर श का मान ० और १ के भीतर होगा और य की सीमा ० और ग (१ - श) के भीतर होगी इस लिये यदि ऊपर के द्विगुण चल में क्रम को बदलें तो

$$\int_0^{१}\int_0^{ग(१-श)} शा_१ य(१-श)^{-२} ताय ताश$$ ऐसा होगा ।

अब इसमें दिये हुये समीकरण से

य=व(१—श) और $\frac{ताय}{ताव}$=१—श और जब य=० तब व=० और जब य=ग(१—श) तब व=ग इस लिये ऊपर के द्विगुण चल का रूप $\int_0^{१}\int_0^{ग}$ शां व ताव ताश ऐसा हुआ ।

(२) $\int\int$ शताr ताय इसको भ्रु, और प के साथ बदल देना है जहां य = भ्रुकोज्याप, र = भ्रुज्याप ।

यहां मान लो कि श=प और व=भ्रु है तो २४६ प्रक्रम के (६)वें समीकरण से

$$\frac{ताय}{ताव}\frac{तार}{ताश} - \frac{ताय}{ताश}\frac{तार}{ताव} = भ्रुकोज्या^२प + भ्रुज्या^२प = भ्रु$$

इस लिये ऊपर के द्विगुण चल का रूप $\int\int$ शां भ्रुताभ्रुताप ऐसा हुआ ।

इसे यदि विचारो तो १७८वें प्रक्रम में जो घनफल जानने के लिये अन्तीय समीकरण पर से प्रकार लिखा है उसी के समान है। सीमाओं का विचार अवश्य यहां पर कर लेना चाहिये जिसमें य और र के वश से जो अवयव आये हों वेही अवयव व और श के वश से भी आ जांय।

इसी में यदि शा=फ(अय+कर) तो ऊपर की युक्ति से बदलने पर द्विगुण चल का रूप

$$\int\int फ\{ज\ भु\ कोज्या(ष-अ_1)\}भु\ ताभुताष\ ऐसा\ होगा,$$

जहां ज कोज्याअ$_1$ = अ और जज्याअ$_1$ = क। इस में यदि ष—अ$_1$ = षं तो द्विगुण चल का रूप

$\int\int$फ(ज भु कोज्या षं)भुताभु ताषं, फिर इस में मान लो कि भुकोज्याषं = यं और भुज्याषं = रं तो इस का रूपान्तर

$\int\int$फ(ज यं) तारं तायं ऐसा होगा।

(एक एक को स्थिर मान कर तात्कालिक सम्बन्ध निकालो जैसा कि २४६वें प्रक्रम में कहा है)

स्वर चिन्ह को उड़ा देने से

$$\int\int फ\ (अय+कर) तार\ ताय=\int\int फ(जय) तार\ ताय$$

जहां ज^2=$\sqrt{(अ^2+क^2)}$ और बायें पक्ष की सीमाओं पर से उदाहरण के स्वरूप से दहने पक्ष में सीमाओं का ज्ञान प्रायः हो सक्ता है।

(३) १५२वें प्रक्रम से किसी घनक्षेत्र का पृष्ठफल सिद्ध है कि द्विगुण चल के रूप में $\int\int\sqrt{\{1+\left(\frac{ताल}{ताय}\right)^2+\left(\frac{ताल}{तार}\right)^2\}}$तार ताय ऐसा होगा इसे ताष, ताष$_1$ के वश से बदलना है जहां

ल=भुकोज्याष, य=भुज्याषकोज्याष$_1$, र=भुज्याषज्याष$_1$

पृष्ठ के समीकरण से ल, य और र के रूप में आजायगा इस लिये ल के स्थान में य, र का फल रख देने से स्पष्ट है कि ष, ष$_1$का कोई फल भु होगा इस लिये पहले तार ताय बदलने के लिये २४६वें प्रक्रम की युक्ति से पहले ष$_1$ को फिर ष को स्थिर मान लेने से

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताष}} = \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}}\, \text{ज्याष कोज्याष}_1 + \text{श्रु कोज्याषकोज्याष}_1$$

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताष}_1} = \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}_1}\, \text{ज्याष कोज्याष}_1 - \text{श्रुज्याष ज्याष}_1$$

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताष}} = \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}}\, \text{ज्याष ज्याष}_1 + \text{श्रुकोज्याष ज्याष}_1$$

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताष}_1} = \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}_1}\, \text{ज्याष ज्याष}_1 + \text{श्रुज्याषको ज्याष}_1$$

इस लिये $\frac{\text{ताय}}{\text{ताष}}\frac{\text{तार}}{\text{ताष}_1} - \frac{\text{ताय}}{\text{ताष}_1}\frac{\text{तार}}{\text{ताष}} = \text{श्रुज्याष}(\text{श्रु कोज्याष} + \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}}\text{ज्याष})$

इस लिये तार ताय को हटा कर उसके स्थान में

$$\text{श्रुज्याष}(\text{श्रु कोज्याष} + \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}}\text{ज्याष})$$ इसे रख दो।

अब $\sqrt{\{1+\left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^2+\left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^2\}}$ इसके बदलने के लिये एक एक को स्थिर मानने से चलनकलन के ६६वें प्रक्रम से

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताष}} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\frac{\text{ताय}}{\text{ताष}} + \frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\frac{\text{तार}}{\text{ताष}}$$

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताष}_1} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\frac{\text{ताय}}{\text{ताष}_1} + \frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\frac{\text{तार}}{\text{ताष}_1}$$

और $\frac{\text{ताल}}{\text{ताष}} = \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}}\text{कोज्याष} - \text{श्रुज्याष}$

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताष}_1} = \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}_1}\text{कोज्याष}$$

अब इन पर से $\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$ का मान ले आवो तो एक भिन्न होगा जिसका अंश

$$= \frac{\text{ताल}}{\text{ताष}}\frac{\text{तार}}{\text{ताष}_1} - \frac{\text{ताल}}{\text{ताष}_1}\frac{\text{तार}}{\text{ताष}}$$

$$= \left\{ \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}} \text{कोज्याष} - \text{श्रु ज्याष} \right\} \left\{ \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}_1} \text{ज्याष ज्याष}_1 + \text{श्रुज्याष कोज्याष}_1 \right\}$$

$$- \frac{\text{ताल}}{\text{ताष}_1} \frac{\text{तार}}{\text{ताष}}$$

$$= - \text{श्रुज्याष}_1 \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}_1} + \text{श्रुज्याषकोज्याषकोज्याष}_1 \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}} - \text{श्रु}^2 \text{ज्या}^2 \text{षकोज्याष}_1$$

और हर= $\frac{\text{ताय}}{\text{ताष}} \frac{\text{तार}}{\text{ताष}_1} - \frac{\text{ताय}}{\text{ताष}_1} \frac{\text{तार}}{\text{ताष}}$ जिस का मान अभी ऊपर ले आये हैं । इस तरह से

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = \frac{\text{श्रुज्याषकोज्याषकोज्याष}_1 \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}} - \text{श्रुज्याष}_1 \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}_1} - \text{श्रु}^2 \text{ज्या}^2 \text{षकोज्याष}_1}{\text{श्रुज्याष} \left(\text{श्रुकोज्याष} + \text{ज्याष} \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}} \right)}$$

इसी तरह से

$$\frac{\text{ताल}}{\text{तार}} = \frac{\text{श्रुकोज्याष}_1 \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}_1} + \text{श्रुज्याष कोज्याषज्याष}_1 \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}} - \text{श्रु}^2 \text{ज्या}^2 \text{षज्याष}_1}{\text{श्रुज्याष} \left(\text{श्रुकोज्याष} + \text{ज्याष} \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}} \right)}$$

इस लिये $1 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} \right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}} \right)^2$

$$= \frac{\text{श्रु}^4 \text{ज्या}^2 \text{ष} + \text{श्रु}^2 \left(\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}_1} \right)^2 + \text{श्रु}^2 \text{ज्या}^2 \text{ष} \left(\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}} \right)^2}{\text{श्रु}^2 \text{ज्या}^2 \text{ष} \left(\text{श्रुकोज्याष} + \text{ज्याष} \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}} \right)^2}$$

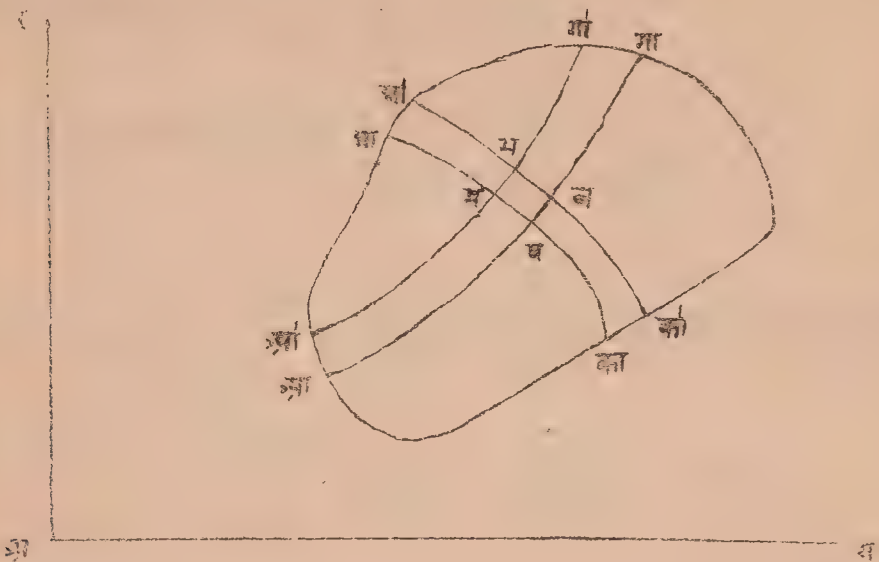
इस लिये बदले हुये द्विगुण चल का रूप

$$\int\int \sqrt{ \left\{ \text{श्रु}^2 \text{ज्या}^2 \text{ष} + \left(\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}_1} \right)^2 + \text{ज्या}^2 \text{ष} \left(\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}} \right)^2 \right\} } \text{श्रु ताष ताष}_1$$

ऐसा हुआ।

यही १५५वें प्रक्रम में भी लिख आये हैं।

२५१। इस प्रकार से द्विगुणचल का जो परिवर्तन किया है उसे क्षेत्ररीति से भी दिखा सक्ते हैं।



कल्पना करो कि $\int\int$शा तार ताय यह एक द्विगुण चल है जिस का मान आकागाघा सीमा के भीतर जितने य, और र हैं उन सब के वश से निकाला गया है। माना कि य=फ$_1$(व,श), र=फ$_2$(व,श) .... (१) जहां व और श नये चल हैं।

(१) से कल्पना करो कि

व=फा$_1$(य,र) श=फा$_2$(य,र) ...... (२)

अब इस के पहले समीकरण में यदि व के स्थान में कोई स्थिराङ्क रख दें तो कह सक्ते हैं कि यह एक कोई वक्र का समीकरण होगा इस लिये नये नये स्थिराङ्कों के रखने से इस समीकरण से एक वक्रों की श्रेढी उत्पन्न होगी। मान लो कि ब के स्थान में एक स्थिराङ्क को रख देने से आ प ब गा वक्र का समीकरण उत्पन्न हुआ। आ प ब गा यह ऐसा वक्र हुआ जिसके प्रतिविन्दु पर फा$_1$(य,र) यह एक स्थिराङ्क के तुल्य होगा। इसी प्रकार से समझो कि व के स्थान में व+Δव के रख देने से दूसरा आं म भ गां

वक्र हुआ। इसी तरह से (१) में दूसरे समीकरण से समझो कि श से एक वक्र का प म घा और श के स्थान में श+△श के रख देने से दूसरा का ब भ घा वक्र हुआ। अब माने कि प विन्दु का भु=य, और कोटि र है जिन के वश से ब भ म विन्दुओं के भुज कोटि को जानना है।

वक्र के समीकरण से स्पष्ट है कि श के स्थान में श+△श के रख देने से ब विन्दु के भुज कोटि होंगे। इस लिये यदि △श का मान बहुत ही छोटा मानें तो ब के भुज कोटि के मान (१) से क्रम से $य + \frac{ताय}{ताश} \triangle श$, और $र + \frac{तार}{ताश} \triangle श$ होंगे।

इसी तरह व के स्थान में व+△व के रख देने से म के भुज कोटि के मान (१) से और △श को बहुत ही छोटा मानने से $य + \frac{ताय}{ताव} \triangle व$ और $र + \frac{तार}{ताव} \triangle व$ होंगे, व के स्थान में व+△व और श के स्थान में श+△श को रख देने से भ के भुज कोटि क्रम से $य + \frac{ताय}{ताव} \triangle व + \frac{ताय}{ताश} \triangle श$ और $र + \frac{तार}{ताव} \triangle व + \frac{तार}{ताश} \triangle श$ के होंगे,। इन चारो विन्दुओं के भुज कोटि के मानों से स्पष्ट होता है कि ये चारो विन्दु एक समानान्तर चतुर्भुज के कोनों पर क्रम से स्थित हैं जो चतुर्भुज अत्यन्त छोटी दशा में वक्र चापीय चतुर्भुज हो जायगा और उसका फल यदि कोणीय भुज, कोटि के वश से ले आवो तो

$$\pm \left(\frac{ताय}{ताव} \frac{तार}{ताश} - \frac{ताय}{ताश} \frac{तार}{ताव} \right) \triangle श \triangle व \quad यह होगा।$$

इस लिये $\int\int$शा तार ताय इस के स्थान में

$$\pm \int\int शा \left(\frac{ताय}{ताव} \frac{तार}{ताश} - \frac{ताय}{ताश} \frac{तार}{ताव} \right) ताश ताव$$ ऐसा रख सक्ते हैं जैसा कि २४६ वें प्रक्रम के (६) वें समीकरण में है।

इस में उदाहरण के स्वरूप के वश से जहां पर कि सीमाओं को जानते हैं धन ऋण का संशय निकल जायगा।

यहां पर पहले व को स्थिर मान श के वश से जो उचित सीमाओं के भीतर चलानयन किया जायगा वह ऊपर दिखाये हुए अनेक चतुर्भुजों के येाग के वश से होगा जिन से एक आआगागा धारी बन जायगी फिर उचित सीमाओं के भीतर व के वश से जो चलानयन किया जायगा

यह सब धारियों के योग के वश से अर्थात् आकागाधा सीमाओं के वश से होगा। इस प्रकार से आकागाधा सीमाओं पर जो अनेक लम्ब खड़े किये जायंगे उनके भीतर जो घनक्षेत्र का अवयव होगा उसका घनफल आ जायगा यदि ऊपर के द्विगुण चल में श=ल मान लें।

२५२। इसी तरह से $\int\int\int$ शा ताल तार ताय इस त्रिगुणचल को तीन नये चल के वश से बदलना हो जहां नये चलों का पुराने से सम्बन्ध

$$य = फ_1(व, श, ह), र = फ_2(व, श, ह), ल = फ_3(व, श, ह) \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

इस तरह का होय तो पहले ल के स्थान में ह को रखने के लिये समझ रक्खो कि जब ताल का साधन करते हैं उस समय य और र को स्थिर मान लेते हैं इस लिये (१) के पहले दो समीकरणों से व की उन्मिति से श का मान य,र और ह के फल रूप में आवेगा फिर विलोम उत्थापन से व का मान भी य,र और ह के कोई फल के रूप में आवेगा। इस लिये ल में इन का उत्थापन देने से ल का मान भी य,र और ह का कोई फल होगा। इस लिये इस फल में य और र को स्थिर मान जो ताल का मान आवेगा उसका स्वरूप ताह के वश से सिद्ध हो जायगा इस लिये ताल के स्थान में ताह को रख सक्ते हैं। अथवा (१) से चलनकलन के ६७वें प्रक्रम से।

$$\frac{ताय}{ताह} = 0 = \frac{ताफ_1}{ताव}\,\frac{ताव}{ताह} + \frac{ताफ_1}{ताश}\,\frac{ताश}{ताह} + \frac{ताफ_1}{ताह}$$

$$\frac{तार}{ताह} = 0 = \frac{ताफ_2}{ताव}\,\frac{ताव}{ताह} + \frac{ताफ_2}{ताश}\,\frac{ताश}{ताह} + \frac{ताफ_2}{ताह}$$

$$\frac{ताल}{ताह} = \frac{ताफ_3}{ताव}\,\frac{ताव}{ताह} + \frac{ताफ_3}{ताश}\,\frac{ताश}{ताह} + \frac{ताफ_3}{ताह}$$

यहां $\frac{ताव}{ताह}$ और $\frac{ताश}{ताह}$ के उन्मितियों पर से

$$\frac{ताल}{ताह} = \frac{ना}{\frac{ताफ_1}{ताव}\,\frac{ताफ_2}{ताश} - \frac{ताफ_2}{ताव}\,\frac{ताफ_1}{ताश}}$$

$$\text{जहां ना} = \frac{\text{ताफ}_3}{\text{ताह}}\left(\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}}\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}}\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}}\right)$$

$$+\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताह}}\left(\frac{\text{ताफ}_3}{\text{ताव}}\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}}\frac{\text{ताफ}_3}{\text{ताश}}\right)$$

$$+\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताह}}\left(\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}}\frac{\text{ताफ}_3}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफ}_3}{\text{ताव}}\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}}\right)$$

इस लिये ऊपर के त्रिगुण चल का रूप

$$\int\int\int \text{शा}_1 \frac{\text{ना}}{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}}\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}}\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}}} \text{ताह तार ताय ऐसा होगा।}$$

जहां शा$_1$ ल के स्थान में ल का मान जो य,र और ह के फल रूप में आया है उस का उत्थापन दे देने से शा का मान है। और ल के सीमाओं पर से ह की सीमायें भी मालूम हो जायंगी।

अब ऊपर के त्रिगुणचल में मान लो कि दो बार क्रम बदलने से

$$\int\int\int \text{शा}_1 \frac{\text{ना}}{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}}\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}}\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}}} \text{तार ताय ताह} \quad \text{इस का मान}$$

आ न लिया तो २४६वें प्रक्रम की युक्ति से ऊपर (१) के प्रथम दो समीकरणों से तार ताय के स्थान में

$$\left(\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}}\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}}\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}}\right) \text{ताव ताश} \quad \text{इस को रख सक्ते हैं।}$$

इस लिये त्रिगुण चल का रूप बदलने से

$$\int\int\int \text{शा ताव ताश ताह} \quad \text{होगा}$$

जहां य,र और ल के मान जो व,श और ह के फल रूप में आवेंगे उनका शा में उत्थापन देने से शां है।

२५३। इस प्रक्रम में ऊपर के प्रक्रमों का विशेष बोध होने के लिये दो उदाहरण दिखलाते हैं।

(१) $\int\int\int\ldots$फ(अ$_1$य$_1$+अ$_2$य$_2$+⋯+अ$_न$य$_न$) ताय$_न$ताय$_{न-१}$ ⋯ ताय$_1$

इस अनेक गुणचल को एक गुणचल में बदलना है जहां चलों के प्रतिमानों के वश से

(जो कि य$_1^2$+य$_2^2$+य$_3^2$+⋯ +य$_न^2$∠१ इस नियम से आवेंगे) चलानयन किया गया है।

यहां २५० वें प्रक्रम के (२) उदाहरण के ऐसा बार बार क्रिया करने से अन्त में अनेक गुणचल का रूप

$\int\int\int\ldots$फ(ज य$_1$⋯) ताय$_न$ ताय$_{न-१}$ ⋯ ताय$_1$ ऐसा होगा।

जहां ज=$\sqrt{}$(अ$_1^2$+अ$_2^2$+अ$_3^2$+ ⋯ +अ$_न^2$)

यहां पर यह जो परिवर्त्तन किया गया है वह सब चलराशियों का वर्गयोग १ से अधिक नहीं है इस नियम को न तोड़ेगा अर्थात् इस में भी सब की वही सीमा रहेंगी जो कि पहले में थीं।

इस लिये य$_1$ को छोड़ और चलराशियों के वश से चलानयन करने में और य$_2^2$+य$_3^2$+ ⋯ +य$_न^2$∠१—य$_1^2$ मान लेने से २१४वें प्रक्रम में यदि द, म, न, इत्यादि को १, प, ब, भ इत्यादि को २ और अ, क, ख इत्यादि को $\sqrt{}$(१—य$_1^2$) मानलें तो चलराशियों के सब धन मान में मान

$$\frac{\{\text{गा}(\frac{1}{2})\}^{न-1}}{2^{न-1}\text{गा}(\frac{न-1}{2}+1)}\ (1-य_1^2)^{\frac{न-1}{2}}$$ यह होगा

परन्तु यदि जैसे चलराशियों के मान सब धन लिये गये वैसे ही ऋण लिये जाते तो सब मान ऊपर के मान का २$^{न-१}$ गुणित होता। इस

लिये सब मान= $\dfrac{\pi^{\frac{न-1}{2}}(1-य_1^2)^{\frac{न-1}{2}}}{\text{गा}(\frac{न-1}{2}+1)}$ इस लिये ऊपर के अनेक गुणचल

का मान साधारण घन के रूप में य$_1$ के —१ और +१ मान के भीतर

$$\frac{\pi^{\frac{न-१}{२}}}{गा\left(\frac{न-१}{२}+१\right)}\int_{-१}^{१} फ(जय_१)(१-य_१^२)^{\frac{न-१}{२}}\, ताय_१$$ यह होगा ।

(२) $$\iiint\cdots\frac{फ(अ_१य_१+अ_२य_२+\cdots+अ_नय_न)}{\sqrt{(१-य_१^२-य_२^२-\cdots-य_न^२)}}\, ताय_नताय_{न-१}\cdots ताय_१$$

इस को साधारण चल के रूप में ले आना है। जहां $य_१^२+य_२^२+\cdots+य_न^२ \angle १$

यहां भी २५० वें प्रक्रम के (२) उदाहरण के ऐसा बार बार क्रिया करने से

$$\iiint\cdots\frac{फ(जय_१)}{\sqrt{(१-य_१^२-य_२^२-\cdots-य_न^२)}}\, ताय_नताय_{न-१}\cdots ताय_१$$ ऐसा होगा।

अब यहां $य_१$ को छोड़ और चलराशियों के वश से चलानयन करने से और $य_२^२+य_३^२+\cdots+य_न^२ \angle १-य_१^२$ इस नियम से चलराशियों के सब धन मान में २१६वें प्रक्रम से (जैसा कि द, म, न इत्यादि का मान ऊपर (१) उदाहरण में माना है वैसा ही यहां भी मान लेने से)

$$\frac{१}{२^{न-१}}\frac{\left\{गा\left(\frac{१}{२}\right)\right\}^{न-१}}{गा\left(\frac{२}{न-१}\right)}\int_0^{१-य_१^२}(१-य_१^२-च)^{-\frac{१}{२}}\, च^{\frac{न-१}{२}-१}\, ताय$$

$$=\frac{१}{२^{न-१}}\frac{\left\{गा\left(\frac{१}{२}\right)\right\}^{न-१}}{गा\left(\frac{न-१}{२}\right)}\frac{गा\left(\frac{१}{२}\right)गा\left(\frac{न-१}{२}\right)}{गा\left(\frac{न}{२}\right)}(१-य_१^२)^{\frac{न}{२}-१}$$ (२१२वें प्रक्रम से)

$$=\frac{१}{२^{न-१}}\frac{\left\{गा\left(\frac{१}{२}\right)\right\}^{न}}{गा\left(\frac{न}{२}\right)}(१-य_१^२)^{\frac{न}{२}-१}$$

परन्तु यदि चलराशियों के मान ऋण भी लिये जायं तो स्पष्ट है कि ऊपर का मान $२^{न-१}$ गुणित होगा ।

इस लिये ऊपर के अनेक गुण चल का मान $य_१$ के -१ और $+१$ मान के भीतर साधारण चल के रूप में

$$\frac{\pi^{\frac{न}{२}}}{गा\left(\frac{न}{२}\right)}\int_{-१}^{+१} फ(जय_१)\,(१-य_१^२)^{\frac{न}{२}-१}\, ताय_१$$ ऐसा होगा ।

२५४ । बहुत से त्रिकोणमिति फलों के रूप चल राशिकलन के बल से श्रेढी में ला सक्ते हैं । जैसे यह चाहना है कि

$$फ(य)=आ_१ ज्याय+आ_२ ज्या२य+आ_३ ज्या३य+\cdots+आ_म ज्यामय \cdots (१)$$

यह समीकरण य के स्थान में ष, २ष, ३ष, $\cdots\cdots$ मष तक उत्थापन देने तक ठीक रहे जहां $ष=\frac{\pi}{म+१}$ और $आ_१$, $आ_२$ $\cdots$ $आ_म$ स्थिराङ्क हैं । तो यहां सब स्थिराङ्कों के मान जानने के लिये नीचे लिखे हुये म समीकरण उत्पन्न होंगे

$$फ(ष) = आ_१ ज्याष + आ_२ ज्या२ष + आ_३ ज्या३ष + \cdots + आ_म ज्यामष ।$$
$$फ(२ष)=आ_१ ज्या२ष+ आ_२ ज्या४ष+आ_३ ज्या६ष+\cdots+आ_म ज्या२मष ।$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$फ(मष)=आ_१ ज्यामष+आ_२ ज्या२मष+आ_३ ज्यामष+\cdots+आ_म ज्याममष ।$$

इन में पहले को ज्यासष, दूसरे को ज्या२सष, $\cdots\cdots$ अन्त को ज्यामसष से गुण कर जोड़ देने से दहने पक्ष में $आ_न$ का गुणक

$$ज्यासष\ ज्यानष + ज्या२सष\ ज्या२नष + \cdots + ज्यामसष\ ज्यामनष$$

यह होगा । इस गुणक का दूना त्रिकोणमिति से

$$कोज्या(स-न)ष + कोज्या२(स-न)ष+ \cdots + कोज्याम(स-न)ष$$
$$-\{कोज्या(स+न)ष+कोज्या२(स+न)ष+ \cdots + कोज्याम(स+न)ष\}$$

यह होगा

इस ने ऊपर के श्रेढी का योग त्रिकोणमिति से

$$\frac{ज्या(२म+१)\frac{(स-न)}{२}ष - ज्या\frac{(स-न)ष}{२}}{२ज्या\frac{(स-न)ष}{२}}$$

$$=\frac{ज्या\left\{(स-न) - \frac{(स-न)ष}{२}\right\}-ज्या\frac{(स-न)ष}{२}}{२\ ज्या\frac{(स-न)ष}{२}}$$ यह होगा और इसी में

न के स्थान में $-न$ का उत्थापन दे देने से

नीचे के श्रेढी का योग

$$\frac{\text{ज्या}\left\{(\text{स}+\text{न})\,\text{॰} - \frac{(\text{स}-\text{न})\text{ष}}{२}\right\} - \text{ज्या}\,\frac{(\text{स}+\text{न})\text{ष}}{२}}{२\,\text{ज्या}\,\frac{(\text{स}+\text{न})\text{ष}}{२}}$$

यहां स्पष्ट है कि यदि स—न यह विषम संख्या होगी तो ऊपर के श्रेढी का योग शून्य होगा और यदि स—न यह सम संख्या होगी तो योग—१ होगा। इसी तरह स+न के विषम संख्या होने से दूसरी का योग शून्य और सम होने से —१ के तुल्य होगा। इस पर से यह एक सिद्धान्त उत्पन्न होता है कि यदि विषम, और सम के वश से जाति का विचार करें तो कह सक्ते हैं कि यदि न की जाति स से भिन्न हो तो दोनों योग शून्य और एक हो तो —१ होंगे। परन्तु संख्याओं के सिद्धान्त से यदि स—न विषम तो स+न भी विषम होगा और यदि स—न सम तो स+न भी सम होगा इस लिये यदि न,स के समान न हो अर्थात् स से भिन्न हो तो $\text{आ}_{\text{न}}$ का गुणक शून्य होगा।

यदि न=स तो $\text{आ}_{\text{न}}$ का गुणक

$$\text{ज्या}^{२}\text{सष} + \text{ज्या}^{२}\text{२सष} + \cdots + \text{ज्या}^{२}\text{मसष}$$

$$= \frac{\text{म}}{२} - \frac{१}{२}\left\{\text{कोज्या२सष} + \text{कोज्या४सष} + \cdots + \text{कोज्या२मसष}\right\}$$

यह होगा जहां ऊपर की युक्ति से कोटिज्याओं का योग —१ के बराबर होगा। इसलिये ऐसी दशा में $\text{आ}_{\text{न}}$ का गुणक $\frac{\text{म}+१}{२}$ यह होगा। इस लिये

$$\text{आ}_{\text{न}} = \frac{२}{\text{म}+१}\left\{\text{ज्यासष फ(ष)} + \text{ज्या२सष फ(२ष)} + \cdots + \text{ज्यामसष फ(मष)}\right\}$$

जहां स के स्थान में १, २, ··· म का उत्थापन देने से $\text{आ}_{१}, \text{आ}_{२}, \cdots \text{आ}_{\text{म}}$ इत्यादि स्थिराङ्कों के मान व्यक्त हो जायंगे।

ऊपर $\text{आ}_{\text{न}}$ के मान में यदि म को अनन्त मानें तो श्रेढी के द्वारा जो ४०वें प्रक्रम में चल का स्वरूप दिखलाया है उस से

$\text{आ}_{\text{न}} = \frac{२}{\pi}\int_{0}^{\pi}\text{ज्यानशफ(श)ताश}$ ऐसा होगा और 0 और π के भीतर अनन्त तुल्यान्तर य के मानों में

$\text{फ(य)} = \text{आ}_{१}\,\text{ज्याय} + \text{आ}_{२}\text{ज्या२य} + \text{आ}_{३}\text{ज्या}_{३}\text{य} + \cdots$ इत्यादि यह समीकरण ठीक होगा।

लाघव से ऊपर के समीकरण को

फ(य) $= \frac{२}{\pi}$ यो $_{१}^{\infty}$ ज्यानय $\int_{0}^{\pi}$ ज्यानशफ(श)ताश ऐसा लिखते हैं यहां यो $_{१}^{\infty}$ यह दिखलाता है कि न के स्थान में क्रम से १, २, ··· ∞ का उत्थापन देने से जितने मान होंगे उन का योग कर दिया गया है। इस सिद्धान्त को ल्यागरेञ्ज (Lagrange) ने निकाला है। इस के विषय पर प्वाइशन (Poisson) का विशेष दिखलाते हैं।

२५५। २३३ वें प्रक्रम से विदित है कि

$$\frac{१-\text{च}^{२}}{१-२\,\text{च कोज्या}\frac{\pi(\text{श}-\text{य})}{\text{द}}+\text{च}^{२}} = १+२\text{चकोज्या}\frac{\pi(\text{श}-\text{य})}{\text{द}}$$

$$+\,२\text{च}^{२}\text{कोज्या}\,\frac{२\pi(\text{श}-\text{य})}{\text{द}} + २\text{च}^{३}\text{कोज्या}\,\frac{३\pi(\text{श}-\text{य})}{२} + \cdots\ \cdots \quad (१)$$

जहां च, १ से न्यून है इस लिये श्रेढी का मान सान्त होगा।

(१) के दोनों पक्षों को फ(श) ताश से गुण कर श के वश से चलानयन करो—द, द सीमाओं के भीतर और च को शून्य के समान मान लो तो बायें पक्ष का अंश शून्य होगा इस लिये यदि इस का हर शून्य न हो तो श्रेढी द्वारा चलानयन की जो बिधि है उस से स्पष्ट है कि बायें पक्ष के चल का मान शून्य होगा परन्तु यदि य का मान—द, और द के भीतर हो तो चलानयन के बीच में हर में च कोज्या$\frac{\pi(\text{श}-\text{य})}{\text{द}}$ जो यह भाग है उस का मान १ के बराबर होगा इस लिये ऐसी स्थिति में हर का मान (१—च)^{२} यह होगा तब यह नहीं कह सक्ते कि बायें पक्ष का चल शून्य होगा। ऐसी दशा में इस का मान जानने के लिये कल्पना करो कि श—य=ल और च=१—इ$_{१}$

$$\text{तो} \int \frac{(१-\text{च}^{२})\text{फ(श)ताश}}{१-२\text{चकोज्या}\,\frac{\pi(\text{श}-\text{य})}{\text{द}}+\text{च}^{२}} = \int \frac{\text{इ}_{१}(१+\text{च})\text{फ}(\text{य}+\text{ल})\text{ताल}}{\text{इ}_{१}^{२}+४\,\text{चज्या}^{२}\,\frac{\pi\text{ल}}{२\text{द}}}$$

इस में निश्चय है कि श—य इस का मान धन वा ऋण जब बहुत ही छोटा होगा उसी समय के मान का तो बिचार ही कर रहे हैं इस लिये ज्या चाप का भेद न मानने से और फ(य+ल) = फ(य) कल्पना करने से

$$\int \frac{\text{इ}_{१}(१+\text{च})\text{फ}(\text{य}+\text{ल})\text{ताल}}{\text{इ}_{१}^{२}+४\text{चज्या}^{२}\,\frac{\pi\text{ल}}{२\text{द}}} = \text{इ}_{१}\,(१+\text{च})\text{फ(य)} \int \frac{\text{ताल}}{\text{इ}_{१}^{२}+\frac{\text{च}\pi^{२}\text{ल}^{२}}{\text{द}^{२}}}$$

$$= २ ह_१ फ(य) \int \frac{ताल}{ह_१^२ + \frac{\pi^२ ल^२}{द^२}} = \frac{२दफ(य)}{\pi} स्प^{-१} \frac{\pi ल}{ह_१ द}$$

इस में माना कि ल की सीमा $अ_१$, और $-क_१$ है तो मान

$$\frac{२दफ(य)}{\pi} \left\{ स्प^{-१} \frac{\pi अ_१}{ह_१ द} + स्प^{-१} \frac{\pi क_१}{ह_१ द} \right\}$$ ऐसा होगा ।

इस में $ह_१$ को शून्य मान लेने से

२ दफ(य) ऐसा होगा । इस लिये यदि य, —द और द के भीतर हो तो $फ(य) = \frac{१}{२द} \int_{-द}^{द} फ(श)ताश$

$$+ \frac{१}{द} यो_{१}^{\infty} \int_{-द}^{द} फ(श) कोज्या \frac{न\pi(श-य)}{द} ताश \quad \cdots\cdots\cdots \quad (२)$$

यदि य = द वा —द तो बायें पक्ष के चल का मान जब श, द और —द के बहुत ही पास होगा श — य = ल, $\frac{२दफ(य)}{\pi} स्प^{-१} \frac{\pi ल}{ह_१ द}$ इन दोनों समीकरणों से क्रम से द {फ(द) + फ(—द)} यह होगा क्योंकि जब य = द और श = द तब श — य = ल यह समीकरण दिखलाता है कि ल का मान केवल — $क_१$ से ० तक पहुंचेगा और जब श = — द और य = — द तब ल का मान केवल ० से $अ_१$ तक होगा । इस लिये ऐसे समय में (२) का बायां पक्ष $\frac{१}{२}$ {फ(द) + फ(—द)} यह होगा ।

इस प्रकार से द, — द के बीच वा द, — द के तुल्य य के मान में दहने पक्ष का मान निश्चित हो जाता है ।

२५६ । २५५वें प्रक्रम की युक्ति से यदि ० और द के बीच य के मान में सान्तचलानयन करो तो

$$फ(य) = \frac{१}{२द} \int_{०}^{द} फ(श)ताश + \frac{१}{द} यो_{१}^{\infty} \int_{०}^{द} फ(श) कोज्या \frac{न\pi(श-य)}{द} ताश \cdots (१)$$

यह समीकरण ० और द के बीच कोई य के मान में सत्य होगा परन्तु यदि य = ० तो ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से बायां पक्ष $\frac{१}{२}$ फ(०) और जब य = द तो बायां पक्ष $\frac{१}{२}$ फ(द) होगा ।

इसी तरह ।

$$० = \frac{१}{२} \int^{द} फ(श)ताश + \frac{१}{द} यो_{१}^{\infty} \int_{०}^{द} फ(श) कोज्या \frac{न\pi(श+य)}{द} ताश, \cdots (२)$$

यह ० और द के बीच चाहे जो य का मान मानो समीकरण सत्य होगा। परन्तु जब य = ० तो बायां पक्ष $\frac{१}{२}$ फ (०) के तुल्य और जब य = द तो बायां पक्ष $\frac{१}{२}$ फ (द) के तुल्य होगा।

(१) और (२) को जोड़ देने से

$$\text{फ}(\text{य}) = \frac{१}{\text{द}}\int_0^{\text{द}} \text{फ}(\text{श})\,\text{ताश} + \frac{२}{\text{द}}\,\text{यो}_१^\infty \text{कोज्या}\frac{\text{न}\pi\text{य}}{\text{द}}\int_0^{\text{द}} \text{कोज्या}\frac{\text{न}\pi\text{श}}{\text{द}}\,\text{फ}(\text{श})\,\text{ताश} \cdots (३)$$

यह य का मान चाहे ० और द के तुल्य हो वा इन के बीच में हो सर्वत्र सत्य रहेगा।

(१) और (२) के अन्तर से

$$\text{फ}(\text{य}) = \frac{२}{\text{द}}\,\text{यो}_१^\infty \text{ज्या}\frac{\text{न}\pi\text{य}}{\text{द}}\int_0^{\text{द}} \text{ज्या}\frac{\text{न}\pi\text{श}}{\text{द}}\,\text{फ}(\text{श})\,\text{ताश} \cdots (४)$$

यह य का मान यदि ० और द के बीच में हो तब सत्य होगा और जब य = ० और य = द तो बायां पक्ष अवश्य शून्य के समान होगा। यदि देखो तो (४) समीकरण ठीक ठीक ल्याग्राञ्ज के सिद्धान्त से मिल जाता है।

थोड़ा सा परिवर्तन कर देने से (३) से (४) और (४) से (३) समीकरण उत्पन्न हो जाता है।

जैसे यदि (३) में फ(य) के स्थान में यदि ज्या $\frac{\pi\text{य}}{\text{द}}$ फ(य) रख दो तो ज्या $\frac{\pi\text{य}}{\text{द}}$ फ(य) $= \frac{१}{\text{द}}\int_0^{\text{द}} \text{ज्या}\frac{\pi\text{श}}{\text{द}}\,\text{फ}(\text{श})\,\text{ताश}$

$$+ \frac{२}{\text{द}}\,\text{यो}_१^\infty \text{कोज्या}\frac{\text{न}\pi\text{य}}{\text{द}}\int_0^{\text{द}} \text{कोज्या}\frac{\text{न}\pi\text{श}}{\text{द}}\,\text{ज्या}\frac{\pi\text{श}}{\text{द}}\,\text{फ}(\text{श})\,\text{ताश}$$

इस में कोज्या $\frac{\text{न}\pi\text{श}}{\text{द}}$ ज्या $\frac{\pi\text{श}}{\text{द}}$ के स्थान में इस का जो दूसरा $\frac{१}{२}$ ज्या $\frac{(\text{न}+१)\pi\text{श}}{\text{द}} - \frac{१}{२}$ ज्या $\frac{(\text{न}-१)\pi\text{श}}{\text{द}}$ यह रूपान्तर है इसे रख देने से ज्या $\frac{\pi\text{य}}{\text{द}}$ फ(य)

$$= \frac{१}{\text{द}}\,\text{यो}_१^\infty \left\{\text{कोज्या}\frac{(\text{न}-१)\pi\text{य}}{\text{द}} - \text{कोज्या}\frac{(\text{न}+१)\pi\text{य}}{\text{द}}\right\}\int_0^{\text{द}} \text{ज्या}\frac{\text{न}\pi\text{श}}{\text{द}}\,\text{फ}(\text{य})\,\text{ताश}$$

ऐसा हो जाय गा। इस में { } इस के अन्तर्गत दोनों खण्डों का त्रिकोणमिति से २ज्या $\frac{\text{न}\pi\text{य}}{\text{द}}$ ज्या $\frac{\pi\text{य}}{\text{द}}$ ऐसा रूपान्तर कर दोनों पक्षों में ज्या $\frac{\pi\text{य}}{\text{द}}$ का भाग दे देने से (४) उत्पन्न हो जायगा। और ऊपर जो क्रिया दिखलाया है उस के विपरीत से (४) से (३) यह उत्पन्न हो जाय गा।

२५७ । इन ऊपर दिखलाये हुये समीकरण रूपी सिद्धान्तों की व्याप्ति दिखलाने के लिये इस प्रक्रम में कुछ उदाहरण दिखलाते हैं ।

(१) य को ज्या की श्रेढी में ले आना है ।

यहां २५६ प्रक्रम का (४) समीकरण ग्रहण करो और मान लो कि द = π तो यहां फ(य) = य इस लिये फ(श) = श

इस लिये $\int_0^{द}$ ज्या $\frac{न\pi य}{द}$ फ(श) ताश = $\int_0^{\pi}$ शज्यानश ताश = $\frac{\pi}{न}$ यदि न विषम और $-\frac{\pi}{न}$ यदि न सम इस लिये

य = २ $\{$ज्याय $-\frac{1}{2}$ ज्या२य $+\frac{1}{3}$ ज्या३य $-\frac{1}{4}$ ज्या४य $+\cdots\}$

यह य के 0 और π के बीच के मानों में सत्य है और यह भी देख पड़ता है कि यदि य = 0 तब भी ठीक है और ऋण मान में भी देखने से स्पष्ट है कि ठीक है इस लिये $-\pi$, π के बीच में $-\pi, \pi$ को छोड़ और सब मानों में समीकरण ठीक हुआ ।

(२) कोज्याय को ज्या की श्रेढी में ले आना है । यहां भी २५६ का (४) समीकरण लेने से फ(य) = कोज्याय इस लिये फ(श) = कोज्याश इस लिये यदि द = π तो

$\int$ ज्या $\frac{न\pi य}{द}$ फ(श) ताश = $\int$ कोज्याश ज्यानश ताश

$=\frac{1}{2}\int\{$ज्या(न+१) श + ज्या(न−१) श$\}$ ताश

$$= -\frac{1}{2}\left\{\frac{कोज्या(न+1)श}{न+1}+\frac{कोज्या(न-1)श}{न-1}\right\}$$

इस लिये $\int_0^{\pi}$ कोज्याश ज्यानश ताश = 0 यदि न विषम हो

और $=\frac{२न}{न^2-1}$ यदि सम ।

इस लिये

$$कोज्याय=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{४ज्या२य}{२^2-1}+\frac{८ज्या४य}{४^2-1}+\cdots+\frac{1+(-1)^{न}}{न^2-1}\,नज्यानय+\cdots\right\}$$

यह 0 और π के बीच, 0 और π को छोड़ और य के सब मानों में सत्य है ।

(३) (ग) स्थिराङ्क को चाहते हैं कि य की ज्या श्रेढी में ले आवें।

यहां भी २५६ प्रक्रम का (४) समीकरण लेने से और फ(य) = ग, और द = π मान लेने से $\int_0^{\pi}$ ग ज्यानश ताश = ग $\int_0^{\pi}$ ज्यानशताश = $\frac{२ग}{न}$ यदि न विषम, = ०, यदि न सम हो तो

इस लिये

ग = $\frac{४ग}{\pi}$ {ज्याय + $\frac{१}{३}$ ज्या३य + $\frac{१}{५}$ ज्या५य + · · ·}

$\frac{४ग}{\pi}$ का भाग दे देने से

$\frac{\pi}{४}$ = ज्याय + $\frac{१}{३}$ ज्या ३य + $\frac{१}{५}$ ज्या५य + · · ·

यह ० और π के बीच ० और π को छोड़ और य के सब मानों में ठीक होगा। इसी में यदि य के स्थान में $\frac{\pi}{२}$ — र रख लें तो

$\frac{\pi}{४}$ = कोज्यार — $\frac{१}{३}$ कोज्या३र + $\frac{१}{५}$ कोज्या५र — $\frac{१}{७}$ कोज्या७र + · · ·

यह र के — $\frac{\pi}{२}$ और $\frac{\pi}{२}$ के बीच — $\frac{\pi}{२}$ और $\frac{\pi}{२}$ को छोड़ और सब मानों में ठीक होगा।

(४) य को इस की कोटिज्या की श्रेढी में ले आवो।

यहां २५६ प्रक्रम का (३) समीकरण ग्रहण करो। और द = π मानो तो

$$\int शकोज्यानशताश = \frac{शज्यानश}{न} + \frac{कोज्यानश}{न^२}$$

इस लिये $\int_0^{\pi}$ शकोज्यानशताश = — $\frac{२}{न^२}$ यदि न, विषम हो।

और = ० यदि न, सम हो।

और $\int_0^{\pi}$ शताश = $\frac{\pi^२}{२}$

इस लिये

य = $\frac{\pi}{२}$ — $\frac{४}{\pi}$ {कोज्याय + $\frac{१}{३^२}$ कोज्या३य + $\frac{१}{५^२}$ कोज्या५य + ···}

यह य के ० और π मान में और इन के बीच के मान में भी सत्य होगा।

यदि यहां य = $\frac{\pi}{२}$ — र तो र के — $\frac{\pi}{२}$ और $\frac{\pi}{२}$ मान में और इन के बीच के मान में भी र = $\frac{४}{\pi}$ (ज्यार — $\frac{१}{३^२}$ ज्या३र + $\frac{१}{५^२}$ ज्या५र ···) यह

ठीक रहेगा ।

(५) $\text{इ}^{\text{अय}}$ इस को ज्या को श्रेढी में ले आवो ।

यहां २५६ प्रक्रम का (४) समीकरण लेने से य के ० और π को छोड़ इन के बीच के मान में

$$\text{इ}^{\text{अय}} = \frac{२}{\pi}\ \text{यो}\ \sum_{१}^{\infty} \frac{\text{न}}{\text{अ}^{२}+\text{न}^{२}} \left(१ - \text{कोज्यान}\pi \times \text{इ}^{\text{अ}\pi}\right)\ \text{ज्यानय}$$

{१०वें प्रक्रम का (५) वां उदाहरण देखो}

(६) $\text{इ}^{\text{अय}}$ को कोटिज्या की श्रेढी में ले आवो ।

यहां २५६ प्रक्रम का (३) समीकरण लेने से

$$\text{इ}^{\text{अय}} = + \frac{\text{इ}^{\text{अ}\pi}-१}{\text{अ}\pi}\ \frac{२\text{अ}}{\pi}\ \text{यो}\ \sum_{१}^{\infty} \frac{\text{कोज्यान}\pi \times \text{इ}^{\text{अ}\pi}-१}{\text{अ}^{२}+\text{न}^{२}}\ \text{कोज्यानय}$$

यह य के ० और π मान में और इन के बीच के मान भी ठीक होगा ।

(७) ज्याअय को ज्या की श्रेढी में ले आवो। जहां अ $\angle$ १ है

यहां भी २५६ प्रक्रम का (४) समीकरण लेने से

$$\text{ज्याअय} = \frac{२}{\pi}\ \text{ज्याअ}\pi \left\{\frac{\text{ज्याय}}{१^{२}-\text{अ}^{२}} - \frac{२\,\text{ज्या२य}}{२^{२}-\text{अ}^{२}} + \frac{३\,\text{ज्या३य}}{३^{२}-\text{अ}^{२}} - \frac{४\,\text{ज्या४य}}{४^{२}-\text{अ}^{२}} + \cdots\right\}$$

यह य के ० और ० और π के बीच π को छोड़ और सब मानों में ठीक होगा ।

(८) कोज्याअय को कोटिज्या की श्रेढी में ले आवो। जहां अ$\angle$ १

यहां २५६ प्रक्रम का (३) समीकरण लेने से

$$\text{कोज्याअय} = \frac{२}{\pi}\ \text{ज्याअ}\pi \left\{\frac{१}{२\text{अ}} - \frac{\text{अकोज्याय}}{\text{अ}^{२}-१} + \frac{\text{अकोज्या२य}}{\text{अ}^{२}-२^{२}} - \cdots\right\}$$

यह य के ० और π मान में और इनके बीच के मान में भी ठीक होगा ।

(९) $\text{इ}^{\text{अय}} - \text{इ}^{-\text{अय}}$ इस को ज्या की श्रेढी में ले आवो ।

यहां २५६ प्रक्रम का (४) समीकरण लेने से

$$\int_0^\pi (इ^{अय} - इ^{-अय}) ज्यानय ताय = -\frac{न(इ^{अ\pi} - इ^{-अ\pi})}{अ^2+न^2} कोज्यान\pi$$

इस लिये

$$इ^{अय} - इ^{-अय}$$

$$= \frac{२}{\pi}(इ^{अ\pi} - इ^{-अ\pi})\left(\frac{ज्याय}{१^2+अ^2} - \frac{२ज्या२य}{२^2+अ^2} + \frac{३ज्या३य}{३^2+अ^2} - \cdots\right)$$

(१०) $इ^{अ(\pi-य)} + इ^{-अ(\pi-य)}$ इसको कोटिज्या की श्रेढी में ले आवो। यहां २५६ प्रक्रम का (३) समीकरण लेने से

$$\int_0^\pi \left\{इ^{अ(\pi-य)} + इ^{-अ(\pi-य)}\right\} कोज्यानय ताय = \frac{अ(इ^{अ\pi} - इ^{-अ\pi})}{अ^2+न^2}$$

$$और \int_0^\pi \left\{इ^{अ(\pi-य)} + इ^{-अ(\pi-य)}\right\} ताय = \frac{इ^{अ\pi} - इ^{-अ\pi}}{अ}$$

$$इसलिये \frac{\pi}{२}\frac{इ^{अ(\pi-य)} + इ^{-अ(\pi-य)}}{इ^{अ\pi} - इ^{-अ\pi}} = \frac{१}{२अ^2} + \frac{कोज्याय}{१^2+अ^2} + \frac{कोज्या२य}{२^2+अ^2} + \cdots$$

इस प्रकार से हज़ारों उदाहरण सहज में सिद्ध हो जाते हैं।

इन के चलानयन से और भी नये नये चमत्कार उत्पन्न होते चले जाते हैं।

जैसे (२) उदाहरण में जो कोटिज्या का मान ज्या की श्रेढी में आया है उस का यदि ताय से गुण कर चलानयन करो तो।

$$\frac{\pi}{४} ज्याय = स्थिर - \frac{कोज्या२य}{१\cdot३} - \frac{कोज्या४य}{३\cdot५} - \frac{कोज्या६य}{५\cdot७} - \cdots$$

इस में यदि य = ० तो

$$स्थिर = \frac{१}{१\cdot३} + \frac{१}{३\cdot५} + \frac{१}{५\cdot७} + \cdots = \frac{१}{२}$$

(चलनकलन के २०वें अध्याय के ४४वें "अभ्यासार्थ" प्रश्न में न = ∞ मान $\frac{१}{१\cdot३}$ जोड़ देने से।

२५८। यदि २५६ प्रक्रम के (३) समीकरण में, जो कि य के ० और π और इन के बीच के सब मान में सत्य है, यदि य का मान द से

पार हो तब देखना चाहिये कि दहना पक्ष किस के तुल्य होता है। माने कि य का मान द और २द के बीच में है और धन है तो यदि य=२ द—यं ऐसा माने जहां यं, द से न्यून है तो

$$\text{कोज्या}\ \frac{\text{न}_\text{ॡ}\text{य}}{\text{द}} = \text{कोज्या}\ (२\text{न}_\text{ॡ} - \frac{\text{न}_\text{ॡ}\text{यं}}{\text{द}}) = \text{कोज्या}\ \frac{\text{न}_\text{ॡ}\text{यं}}{\text{द}}$$

इस लिये इस स्थिति में दहने पक्ष का मान फ(यं) होगा।

फिर माने कि य, २ द से बड़ा है और २ मद +यं इस के तुल्य है जहां यं, २ द से अल्प है तो

$$\text{कोज्या}\ \frac{\text{न}_\text{ॡ}\text{य}}{\text{द}} = \text{कोज्या}\ \frac{\text{न}_\text{ॡ}\text{यं}}{\text{द}}$$

अर्थात् दहने पक्ष का वही मान हुआ जो कि य के स्थान में यं के रख देने से होता है इस लिये यदि यं ∠ द तो दहने पक्ष का मान फ(यं) होगा और यदि यं 7 द ∠ २द तो दहने पक्ष का फ(२द-यं) यह मान होगा। इसी प्रकार सिद्ध कर सक्ते हो कि य के ऋण मान में भी वही मान होगा जो कि धनमान में होता है।

इसी तरह यदि य धन और २मद+यं इस के तुल्य हो तो २५द प्रक्रम के (४) समीकरण का मान फ(यं) होगा यदि यं ∠ द और यदि यं 7 द तो दहने पक्ष का मान —फ(२द—यं) यह होगा। और य के ऋण मान में वेही मान आवेंगे जो कि य के धनमान में आते हैं केवल धन ऋण चिन्ह बदल जायगा।

२५९। २५द प्रक्रम के (३) और (४) समीकरण में यह कुछ आवश्यकता नहीं कि य का मान ० और द के बीच में लगातार हो किन्तु ० और अ के बीच के य के मान में फ(य) = फ_1(य), अ और क के बीच में य के मान में फ(य) = फ_2 (य), और क और ग के बीच में य के मान में फ(य)=फ_3(य) इसी तरह अन्त में ग और द के बीच में य के मान में फ(य)=फ_4(य) ऐसा मान लें तो भी समीकरण सत्य रहेगा केवल जब य = ०, वा, अ, वा क, वा ग तब व्यभिचरित होगा

उस समय २५६वें प्रक्रम की युक्ति से वास्तव में दहने पक्ष का क्या रूप होगा इसका ज्ञान सहज में हो जायगा। जैसे २५६वें प्रक्रम के (३) समीकरण का दहना पक्ष जब य=अ तब $\frac{१}{२}\{$फ$_१$(अ)+फ$_२$(अ)$\}$ यह होगा।

इस लिये यदि य = अ तब फ$_१$(य)=फ$_२$(य) तो (३) समीकरण जब य=अ तब भी सत्य ठहरेगा।

२६०। ज्या और कोटिज्या के रूप में एक श्रेढी ऐसी बनानी है जिसका योग ग तुल्य हो य के ० और अ के बीच के मानों में और वही योग शून्य के तुल्य हो य के अ और द के बीच के मानों में।

यहां २५६ प्रक्रम का (३) समीकरण लेने से

फ(य)=ग, इस लिये फ(श)=ग, श के ० और अ के बीच के मानों में और फिर उसके बाद श के अ और द के बीच के मानों में फ(श)=०=फ(य)

इस लिये

$$\int_0^{द} \text{कोज्या}\frac{न\pi श}{द}\ \text{फ(श)ताश यह}$$

$$ग\int_0^{अ}\text{कोज्या}\frac{न\pi श}{द}\ \text{ताश}=\frac{गद}{न\pi}\ \text{ज्या}\ \frac{न\pi अ}{द}\ \text{ऐसा होगा}$$

इस लिये अभीष्ट श्रेढी

$$\frac{गअ}{द}+\frac{२ग}{\pi}\Big\{\text{ज्या}\frac{\pi अ}{द}\ \text{कोज्या}\ \frac{\pi य}{द}+\frac{१}{२}\text{ज्या}\ \frac{२\pi अ}{द}\ \text{कोज्या}\frac{२\pi य}{द}$$
$$+\frac{१}{३}\text{ज्या}\ \frac{३\pi अ}{द}\ \text{कोज्या}\ \frac{३\pi य}{द}+\cdots\Big\}$$

इस में जब य=अ तब इसका मान $\frac{ग}{२}$ होगा।

अथवा इसी जगह २५६ प्रक्रम का (४) समीकरण लेने से

$$ग\int_0^{अ}\text{ज्या}\ \frac{नश\pi}{द}\ \text{ताश}=\frac{गद}{न\pi}\left(१-\text{कोज्या}\ \frac{नअ\pi}{द}\right)$$

इस लिये अभीष्ट श्रेढी

$$\frac{२ग}{\pi}\Big\{\text{उज्या}\ \frac{\pi अ}{द}\ \text{ज्या}\ \frac{\pi य}{द}+\frac{१}{२}\ \text{उज्या}\ \frac{२\pi अ}{द}\ \text{ज्या}\ \frac{२\pi य}{द}$$
$$+\frac{१}{३}\text{उज्या}\ \frac{३\pi अ}{द}\ \text{ज्या}\frac{३\pi य}{द}+\cdots\Big\}\ \text{यह होगी}$$

यहां जब य=० तब यह श्रेढी भी शून्य और जब य=अ तब श्रेढी का मान $\frac{ग}{२}$ होगा।

२६१। एक श्रेढी कोटिज्या के रूप में ऐसी बनाओ जिसका योग ज य हो य के ० और $\frac{द}{२}$ के बीच के मान में और जब य, $\frac{द}{२}$ और द के बीच में हो तो वही योग ज(द—य) के तुल्य हो।

यहां २५६ प्रक्रम के (३) समीकरण से ।

$$\int_{\text{०}}^{\text{द}} \text{फ(श) कोज्या}\frac{\text{न}\pi\text{श}}{\text{द}}\text{ताश}$$

$$=\int_{\text{०}}^{\frac{\text{द}}{\text{२}}} \text{ज श कोज्या}\frac{\text{न}\pi\text{श}}{\text{द}}\text{ताश}+\int_{\frac{\text{द}}{\text{२}}}^{\text{द}} \text{ज(द}-\text{श) कोज्या}\left(\frac{\text{न}\pi\text{श}}{\text{द}}\right)\text{ताश}$$

$$=\frac{\text{जद}^{\text{२}}}{\pi}\left\{\frac{\text{१}}{\text{२न}}\text{ज्या}\frac{\text{न}\pi}{\text{२}}+\frac{\text{१}}{\pi\text{न}^{\text{२}}}\text{कोज्या}\frac{\text{न}\pi}{\text{२}}-\frac{\text{१}}{\pi\text{न}^{\text{२}}}\right\}+\frac{\text{जद}^{\text{२}}}{\text{न}\pi}\left(\text{ज्या न}\pi-\text{ज्या}\frac{\text{न}\pi}{\text{२}}\right)$$

$$-\frac{\text{जद}^{\text{२}}}{\pi}\left\{\frac{\text{१}}{\text{न}}\text{ज्या न}\pi-\frac{\text{१}}{\text{२न}}\text{ज्या}\frac{\text{न}\pi}{\text{२}}+\frac{\text{१}}{\pi\text{न}^{\text{२}}}\text{कोज्या न}\pi-\frac{\text{१}}{\pi\text{न}^{\text{२}}}\text{कोज्या}\frac{\text{न}\pi}{\text{२}}\right\}$$

$$=\frac{\text{जद}^{\text{२}}}{\pi^{\text{२}}\text{न}^{\text{२}}}\left\{\text{२ कोज्या}\frac{\text{न}\pi}{\text{२}}-\text{कोज्या न}\pi-\text{१}\right\}$$

यह यदि न=४म+२ ऐसा होगा तो $-\frac{\text{४जद}^{\text{२}}}{\pi^{\text{२}}\text{न}^{\text{२}}}$ इसके तुल्य होगा और सर्वत्र शून्य के तुल्य होगा । और

$$\int_{\text{०}}^{\text{द}}\text{फ(श)ताश}=\text{ज}\int_{\text{०}}^{\frac{\text{द}}{\text{२}}}\text{शताश}+\text{ज}\int_{\frac{\text{द}}{\text{२}}}^{\text{द}}(\text{द}-\text{श})\text{ताश}=\frac{\text{जद}^{\text{२}}}{\text{४}}$$

इसलिये अभीष्ट श्रेढी

$$\frac{\text{जद}}{\text{४}}-\frac{\text{८जद}}{\pi^{\text{२}}}\left\{\frac{\text{१}}{\text{२}^{\text{२}}}\text{कोज्या}\frac{\text{२}\pi\text{य}}{\text{द}}+\frac{\text{१}}{\text{६}^{\text{२}}}\text{कोज्या}\frac{\text{६}\pi\text{य}}{\text{द}}+\frac{\text{१}}{\text{१०}^{\text{२}}}\text{कोज्या}\frac{\text{१०}\pi\text{य}}{\text{द}}+\cdots\right\}$$

इस श्रेढी का मान यदि र रख लें तो य के ० और $\frac{\text{द}}{\text{२}}$ मान और इनके बीच के मानों में भी र=ज य और य के $\frac{\text{द}}{\text{२}}$ और द और इनके बीच के मानों में भी र=ज (द−य) यह होगा । यदि य का मान द से बड़ा हो तो २५८वें प्रक्रम से र का मान फिर फिर यही आवेगा क्योंकि २५८वें प्रक्रम से यदि य=२ द − य′ जहां य′, द से छोटा है तो दहना पक्ष फ(य′) के अर्थात् जहां य, द से छोटा है वहां जो र का मान है वही यहां पर भी हुआ । इस तरह से २५६वें प्रक्रम के (३) और (४) समीकरण से हज़ारों प्रकार के नये सिद्धान्त बना सक्ते हो ।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

१ । सिद्ध करो कि य के $-\pi$ और π और इनके बीच के मानों में

$$\frac{\text{य}^{\text{२}}}{\text{४}}=\frac{\pi^{\text{२}}}{\text{१२}}-\text{कोज्याय}+\frac{\text{कोज्या २य}}{\text{२}^{\text{२}}}-\frac{\text{कोज्या ३य}}{\text{३}^{\text{२}}}+\cdots$$

२ । (१) प्रश्न से सिद्ध करो कि

$$\frac{य^3}{१२}-\frac{\pi^2 य}{१२}=-ज्याय+\frac{ज्या२य}{२^3}-\frac{ज्या३य}{३^3}+\cdots$$

३। सिद्ध करो कि यदि एक श्रेढी ऐसी बनाई जाय जो य के ० और अ के बीच के मानों में शून्य, य के अ और π—अ के बीच के मानों में अ, और फिर य के π—अ और π के बीच के मानों में π—य के तुल्य हो तो $\frac{४}{\pi}\left\{ज्या अ ज्याय+\frac{१}{३^2}ज्या ३ अ ज्या३य+\frac{१}{५^2}ज्या ५ अ ज्या ५ य+\cdots\right\}$

२६२। जिस समीकरण में

$$\frac{तार}{ताय},\frac{ता^2र}{ताय^2},\frac{ता^3र}{ताय^3},\cdots\cdots\frac{ता^नर}{ताय^न}$$ क्रम से रहते हैं

उन्हें क्रम से एक घात, प्रथम सम्बन्ध द्वितीय सम्बन्ध, तृतीय सम्बन्ध, · · · · न सम्बन्ध चलनसमीकरण कहते हैं। एक घात को प्रत्येक सम्बन्ध के साथ मिलाना चाहिये। इसी प्रकार जिस में $\frac{तार}{ताय}$, $\left(\frac{तार}{ताय}\right)^2$, $\left(\frac{तार}{ताय}\right)^3\cdots\left(\frac{तार}{ताय}\right)^न$ ये हों उन्हें एक घात प्रथम सम्बन्ध, द्वितीयघात प्रथम सम्बन्ध, तृतीयघात प्रथम सम्बन्ध, न घात प्रथम सम्बन्ध चलनसमीकरण कहते हैं। और $\left\{\frac{ता^मर}{ताय^म}\right\}^न$ यह जिसमें हो उसे न घात म सम्बन्ध चलन समीकरण कहते हैं।

२६३। यदि एक घात प्रथम सम्बन्ध चलनसमीकरण का रूप

$मा+ना\frac{तार}{ताय}=0$ ऐसा हो जहां मा और ना, य और र के फल हों और फलों में य और र के घात संख्याओं का योग प्रत्येक पद में एक ही हो तो कल्पना करो कि $र=यल \therefore \frac{तार}{ताय}=ल+य\frac{ताल}{ताय}$। समीकरण में ना का भाग दे दो तो

$$\frac{मा}{ना}+\frac{तार}{ताय}=0 \text{ वा } \frac{मा}{ना}+ल+य\frac{ताल}{ताय}=0$$

परन्तु $\frac{मा}{ना}$, $\frac{र}{य}$ वा ल का कोई फल है इस लिये कल्पना करो कि $\frac{मा}{ना}=फ(ल)$ इस लिये $य\frac{ताल}{ताय}=-\{ल+फ(ल)\}$

$\therefore \frac{ताय}{यताल}=-\frac{१}{ल+फ(ल)} \therefore लग\left(\frac{य}{ग}\right)=-\int\frac{ताल}{ल+फ(ल)}$, जहां ग कोई स्थिराङ्क है।

अपने सुभीते के लिये जहां कहीं लाघव जान पड़े तहां य = रल ऐसा मान कर भी ऊपर की क्रिया कर सक्ते हो।

(१) उदाहरण

कल्पना करो कि $य + र = (य - र) \frac{तार}{ताय}$

यहां र = यल मान लो तो $\frac{तार}{ताय} = ल + य \frac{ताल}{ताय}$

$\therefore ल + य \frac{ताल}{ताय} = \frac{य+र}{य-र} = \frac{१+ल}{१-ल} \therefore य \frac{ताल}{ताय} = \frac{१+ल^२}{१-ल}$

$\therefore \frac{ताय}{यताल} = \frac{१-ल}{१+ल^२} = \frac{१}{१+ल^२} - \frac{ल}{१+ल^२}$

इस लिये $ला \left(\frac{य}{ग}\right) = स्प^{-१}ल - \frac{१}{२} ला (१+ल^२)$

वा $ला \left\{ \frac{य}{ग} (१+ल^२)^{\frac{१}{२}} \right\} = ला \frac{\sqrt{(य^२+र^२)}}{ग} = स्प^{-१} \frac{र}{य}$,

(२) एक ऐसा वक्र बतावो जिस के भुज कोटि का योग उसके अवान्तर स्पर्श रेखा के समान हो।

यहां चलनकलन से अवान्तर स्पर्श रेखा $= र \frac{ताय}{तार} = य + र$, और य = रल, मान लो $\therefore \frac{ताय}{तार} = ल + र \frac{ताल}{तार} = \frac{य+र}{र} = ल + १$

$\therefore \frac{तार}{रताल} = १ \therefore ला \left(\frac{र}{ग}\right) = ल = \frac{य}{र}$,

२६४। $\frac{तार}{ताय} + पार = बा \cdots (१)$ इस में र का मान जानना है जहां पा और बा य के कोई फल हैं।

देखो $\frac{ता}{ताय} (र\, इ^{\int पाताय}) = \frac{तार}{ताय} इ^{\int पाताय} + पार\, इ^{\int पाताय}$

$= इ^{\int पाताय} \left(\frac{तार}{ताय} + पार\right)$

इस लिये (१) को $इ^{\int पाताय}$ से गुण देने से

$इ^{\int पाताय} \left(\frac{तार}{ताय} + पार\right) = \frac{ता}{ताय} (र\, इ^{\int पाताय}) = बा\, इ^{\int पाताय}$

इस लिये चलानयन से

$$र\, इ^{\int पाताय} = स्थि + \int बा\, इ^{\int पाताय} ताय$$

और $र = स्थि\, इ^{-\int पाताय} + इ^{-\int पाताय} \int बा\, इ^{\int पाताय} ताय$

(१) उदा० $\frac{तार}{ताय} + र = अय^3$,

यहां $पा = १$, $\int पाताय = य \therefore इ^{\int पाताय} = इ^{य}$ और $बा = अय^3$

$$\therefore र = स्थिइ^{-य} + इ^{-य} \int अय^3 इ^{य} ताय$$

$$= स्थिइ^{-य} + इ^{-य} अ\{य^3 इ^{य} - ३ \int य^2 इ^{य} ताय\}$$

$$= स्थिइ^{-य} + अ\,(य^3 - ३य^2 + ६य - ६)$$

(२) उदा० $(१+य^2)\frac{तार}{ताय} - रय = अ$, वा $\frac{तार}{ताय} - \frac{य}{१+य^2}\, र = \frac{अ}{१+य^2}$

यहां $पा = -\frac{य}{१+य^2}$, $\int पाताय = ला \frac{१}{\sqrt{(१+य^2)}}$ और $इ^{\int पाताय} = \frac{१}{\sqrt{(१+य^2)}}$

$$\therefore र \frac{१}{\sqrt{(१+य^2)}} = अ \int \frac{ताय}{\sqrt{(१+य^2)}} \times \frac{१}{१+य^2} = अ \int \frac{ताय}{(१+य^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{अय}{\sqrt{(१+य^2)}} + स्थि$$

इस लिये $र = अय + स्थि \sqrt{(१+य^2)}$

२६५ । यदि $र^{म-१}\frac{तार}{ताय} + पार^{म} = बा\, र^{न}$ ऐसा समीकरण हो तो दोनों पक्षों में $र^{न}$ का भाग दे कर $र^{म-न} = (म-न)\, ल$ मान लो तो $र^{म-न-१}\frac{तार}{ताय} + पार^{म-न} = बा$

$$और\ र^{म-न-१}\frac{तार}{ताय} = \frac{ताल}{ताय}$$

$$\therefore \frac{ताल}{ताय} + (म-न)\, पाल = बा$$

यह अब ठीक २६४वें प्रक्रम के समीकरण ऐसा हो गया ।

(१) उदा० $श \frac{ताश}{ताचा} - \frac{चश^2}{चा} = -\frac{म}{चा^2}$

यहां मान लो कि $श^2 = २ल \therefore श \frac{ताश}{ताचा} = \frac{ताल}{ताचा}$

$$\therefore \frac{ताल}{ताचा} - \frac{२चल}{चा} = - \frac{म}{चा^२}$$

अब इस में $पा = -\frac{२च}{चा}$ $\therefore \int पाताचा = -२$ चलाचा $=$ ला $\frac{१}{चा^{२च}}$

$\therefore इ^{\int पाताचा} = \frac{१}{चा^{२च}}$ $\therefore$ ल $चा^{-२च} = -$ म $\int चा^{-(२च+२)}ताचा$

$= स्थि + \frac{मचा^{-(२च+१)}}{२च+१}$ $\therefore ल = \frac{श^२}{२} =$ स्थि $चा^{२च} + \frac{म}{(२च+१)चा}$

(२) उदा॰ $यर^२$ तार$+र^३$ ताय$= \frac{अताय}{य}$, यहां भी

ऊपर की क्रिया करने से

$$र^३ = \frac{३अ}{२य} + \frac{स्थि}{य^३}$$

२६६ । मा ताय+ना तार=० यह समीकरण $\int$फ(यर)=ग इस का तात्कालिक चलन सर्वदा नहीं हो सक्ता क्यों कि सम्भव है कि $\int$फ(यर) इस के तात्कालिक चलन में जो कि शून्य के तुल्य होगा किसी गुणक का अपवर्त्तन दे दिया गया हो अथवा कोई स्थिराङ्क का लोप हो गया हो मूल समीकरण के वश से । परन्तु जिस स्थान में इस का पूरा रूप हो अर्थात् गुणक का अपवर्त्तन न दिया गया हो वा स्थिराङ्क का लोप मूल समीकरण के वश से न किया गया हो तो चलनकलन की युक्ति से $\frac{ता^२स}{ताय\ तार} = \frac{ता^२स}{तार\ ताय}$ इस नियम से र का मान जान सक्ते हो क्योंकि यहां

मा$= \frac{तास}{ताय}$ और ना$= \frac{तास}{तार}$। यहां दोनों खण्ड तात्कालिक सम्बन्ध हैं अर्थात् पहले में र को दूसरे में य को स्थिर मान कर सम्बन्ध निकाला गया है ।

इस लिये स$= \int$मा ताय$+फ_१$ (र)

र के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{तास}{तार} = \frac{ता\int माताय}{तार} + \frac{ता\ फ_१\ (र)}{तार}$$

$$\text{परन्तु}\quad \frac{\text{तास}}{\text{तार}} = \text{ना} \therefore \frac{\text{ताफ}_1(\text{र})}{\text{तार}} = \text{ना} - \frac{\text{ता}\int \text{माताय}}{\text{तार}}$$

$$\text{और}\quad \text{फ}_1(\text{र}) = \int \left(\text{ना} - \frac{\text{ता}\int \text{माताय}}{\text{तार}}\right)\text{तार}$$

$$\text{इस लिये स} = \int \text{मा ताय} + \int \left(\text{ना} - \frac{\text{ता}\int \text{मा ताय}}{\text{तार}}\right) \text{तार} + \text{स्थि}$$

(१) उदा॰ कल्पना करो कि $\text{तास} = \frac{\text{२ ताय}}{\sqrt{(\text{य}^2 - \text{र}^2)}} - \frac{\text{२ य तार}}{\text{र}\sqrt{(\text{य}^2 - \text{र}^2)}}$

$$\text{यहां}\quad \text{मा} = \frac{\text{२}}{\sqrt{(\text{य}^2 - \text{र}^2)}},\ \text{ना} = \frac{-\text{२ य}}{\text{र}\sqrt{(\text{य}^2 - \text{र}^2)}}$$

$$\text{इस लिये}\ \frac{\text{तामा}}{\text{तार}} = \frac{\text{२र}}{(\text{य}^2 - \text{र}^2)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{\text{ताना}}{\text{ताय}} = \frac{-\text{२}}{\text{र}}\left(\frac{-\text{र}^2}{(\text{य}^2 - \text{र}^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{\text{२र}}{(\text{य}^2 - \text{र}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore \text{स} = \int \text{मा ताय} + \text{फ}_1(\text{र}) = \text{२ ला}\left\{\text{य} + \sqrt{(\text{य}^2 - \text{र}^2)}\right\} + \text{फ}_1(\text{र})$$

$$\frac{\text{तास}}{\text{तार}} = \frac{-\text{२र}}{\{\text{य} + \sqrt{(\text{य}^2 - \text{र}^2)}\}\sqrt{(\text{य}^2 - \text{र}^2)}} + \frac{\text{ताफ}_1(\text{र})}{\text{तार}} = \text{ना} = \frac{-\text{२ य}}{\text{र}\sqrt{(\text{य}^2 - \text{र}^2)}}$$

$$\therefore \frac{\text{ताफ}_1(\text{र})}{\text{तार}} = \frac{\text{२}}{\sqrt{(\text{य}^2 - \text{र}^2)}}\left\{\frac{\text{र}}{\text{य} + \sqrt{(\text{य}^2 - \text{र}^2)}} - \frac{\text{य}}{\text{र}}\right\}$$

$$= \frac{-\text{२}}{\sqrt{(\text{य}^2 - \text{र}^2)}}\left\{\frac{\text{य}^2 - \text{र}^2 + \text{य}\sqrt{(\text{य}^2 - \text{र}^2)}}{\text{रय} + \text{र}\sqrt{(\text{य}^2 - \text{र}^2)}}\right\} = -\frac{\text{२}}{\text{र}}$$

$$\therefore \text{फ}_1(\text{र}) = \text{स्थि} - \text{२ ला र}$$

$$\text{इस लिये स} = \text{ला}\left\{\frac{\text{य} + \sqrt{(\text{य}^2 - \text{र}^2)}}{\text{र}}\right\}^{\text{२}} + \text{स्थि}।$$

जहां गुणक से अपवर्त्तन दे दिया गया हो वहां पर बड़ी कठिनता पड़ेगी और कोई बिधि नहीं है जिस से गुणक का पता लगे, केवल अपने बुद्धि बल से गुणक का पता लगा कर गणित करना चाहिये।

२६७। इस प्रक्रम में चलन समीकरण सम्बन्धि कुछ उदाहरण दिखाते हैं।

(१) एक ऐसे वक्र का पता लगावो जो दिये हुए समीकरण सम्बन्धि वक्रपरम्परा को काटने से निर्दिष्टकोणतुल्य कोण बनावे।

कल्पना करो कि दिये हुये वक्र का भुज=य और कोटि र और साध्य वक्र का भु=$य_१$ और कोटि $र_१$ है और निर्दिष्ट कोण की स्पर्शरेखा=म है

$$\text{तो } स्प^{-१}म = स्प^{-१}\frac{तार}{ताय} - स्प^{-१}\frac{तार_१}{ताय_१} \text{।} \therefore म = \frac{\frac{तार}{ताय} - \frac{तार_१}{ताय_१}}{१ + \frac{तार}{ताय}\,\frac{तार_१}{ताय_१}}$$

सिद्धवक्र के समीकरण पर से $\frac{तार}{ताय}$ का मान य,र के फल रूप में अर्थात् फ (य,र) ऐसा सिद्ध हो जायगा और योग विन्दु पर दोनों वक्र के भुज कोटि एकही होंगे इस लिये $य_१$ के स्थान में य और $र_१$ के स्थान में र को रख सक्ते हैं इन पर से फिर साध्य वक्र का समीकरण भी व्यक्त हो जायगा। ऊपर के समीकरण को

$म\{१+फ(य,र)\frac{तार}{ताय}\} = फ(य,र) - \frac{तार}{ताय}$ ऐसे लिख सक्ते हैं जोकि एकघात प्रक्रम सम्बन्धि चलनसमीकरण के ऐसा होगा।

यदि साध्य वक्र सिद्ध वक्रों को काट कर समकोण बनावे तो $म=\infty$

इस लिये $१+फ(य,र)\frac{तार}{ताय} = ० \;\therefore\; \frac{तार}{ताय} = -\frac{१}{फ(य,र)}$

जैसे उस वक्र को बतावो जो उन परवलयों को काटने से समकोण बनावे जिन में शिरःस्थान और य अक्ष एकही हैं।

कल्पना करो कि परवलय का $र^२=४अय$ यह समीकरण है

$$\therefore फ(य,र) = \frac{तार}{ताय} = \frac{२अ}{र} = \frac{र}{२य}$$

$$\therefore \frac{तार}{ताय} = -\frac{२य}{र} \quad \text{इस लिये } \frac{र^२}{२} = (ग^२ - य^२)$$

यह एक दीर्घवृत्त का समीकरण हुआ जिस का केन्द्र परवलय का शिरःस्थान और बृहद्व्यास य अक्ष पर लम्ब होगा। यहां ग का मान अनिश्चित है इस लिये कोई दीर्घवृत्त जिनके व्यासों में $\sqrt{२}:१$ यह सम्बन्ध हो वे सब परवलयों को समकोण पर काटेंगे।

(२) $\left(\frac{तार}{ताय}\right)^{न} + पा\left(\frac{तार}{ताय}\right)^{न} + बा\left(\frac{तार}{ताय}\right)^{न-२} + \cdots + बा_{न} = 0$ जहां पा, बा, इत्यादि य, र के फल हैं इस में र का मान क्या होगा। इस न घातप्रथमसम्बन्धचलनसमीकरण में साधारण बीजगणित से $\frac{तार}{ताय}$ का न विध मान आवेगा इस लिये न विध र का मान चलानयन से निकलेगा और इनका घातरूप एक और मान आवेगा।

जैसे यदि $\frac{तार^{२}}{ताय^{२}} = अ^{२} \therefore \frac{तार}{ताय} = \pm अ$ इस लिये र=ग±अय वा र=ग-अय ये दोनों दिये समीकरण को ठीक रक्खेंगे और इनका घात (र—ग—अय) (र—ग+अय)=0 यह भी समीकरण को ठीक रक्खेगा।

इस पर से यह एक उदाहरण बनता है कि उस वक्र को बतावो जिसमें चा=अय+कर हो

$$यहां\ \frac{ताचा}{ताय} = \sqrt{\left\{१+\left(\frac{तार}{ताय}\right)^{२}\right\}} = अ + क\frac{तार}{ताय}$$

इस से सिद्ध है कि $\frac{तार}{ताय}$ का मान स्थिर होगा मानो कि $\frac{तार}{ताय}$ =म

तो र=मय+ग यह एक सरलरेखा का समीकरण है

$$\therefore \frac{र-ग}{य} = म = \frac{तार}{ताय}\ इस\ लिये\ \sqrt{\left\{१+\left(\frac{र-ग}{य}\right)^{२}\right\}} = अ+क\left(\frac{र-ग}{य}\right)$$

यह समीकरण हुआ।

(३) $\frac{ता^{न}र}{ताय^{न}}$ =या इस में र का मान क्या होगा जहां या, य का कोई फल है

पहले मानो कि $\frac{ता^{२}र}{ताय^{२}} = या \therefore \frac{ता}{ताय}\left(\frac{तार}{ताय}\right) = या \therefore \frac{तार}{ताय} = \int याताय$

और $र = \int \{\int या\ ताय\}\ ताय$

फिर मान लो कि $\frac{ता^{३}र}{ताय^{३}} = या$, तो, $\frac{ता}{ताय}\left(\frac{ता^{२}र}{ताय^{२}}\right) = या \therefore \frac{ता^{२}र}{ताय^{२}} = \int याताय$

फिर ऊपर के ऐसा दो वार चलानयन करो। यहां स्थिराङ्क को छोड़ दिया है।

(४) $\frac{ता^2 र}{ताय^2}$ =रा यहां (रा,र का कोई फल है) र का मान क्या होगा।

मान लो कि $\frac{तार}{ताय} = प \therefore \frac{ता^2 र}{ताय^2} = \frac{ताप}{ताय} = \frac{ताप}{तार} \frac{तार}{ताय} = प \frac{ताप}{तार}$

$= रा \therefore \frac{प^2}{२} = स्थि + \int रा\, तार$

(५) $\frac{ता^2 र}{ताय^2} + पा \frac{तार}{ताय}$ +बार=० इस में र का मान क्या होगा।

यहां मान लो कि

$$र = इ^{\int शताय} \therefore \frac{तार}{ताय} = श\, इ^{\int शताय}, \frac{ता^2 र}{ताय^2} = \left(\frac{ताश}{ताय} + श^2\right) इ^{\int शताय}$$

$$इस\ लिये\ इ^{\int शताय} \left\{ श + पाश + बा + \frac{ताश}{ताय} \right\} = 0$$

$\therefore \quad श^2 + पाश + बा + \frac{ताश}{ताय} = 0$ इस लिये यदि पा और बा स्थिराङ्क हों तो सहज में श का और श पर से र का ज्ञान हो जायगा। क्यों कि यदि पा=आ और बा= का तो

$$श^2 + आश + का + \frac{ताश}{ताय} = \frac{ताश}{ताय} + (श - अ_1)\ (श - क_1) = 0$$

जहां श²+आश+का=० इस में श का, $अ_1$ और $क_1$ मान हैं। इस में यदि श=$अ_1$ वा श=$क_1$ तो समीकरण ठीक होता है

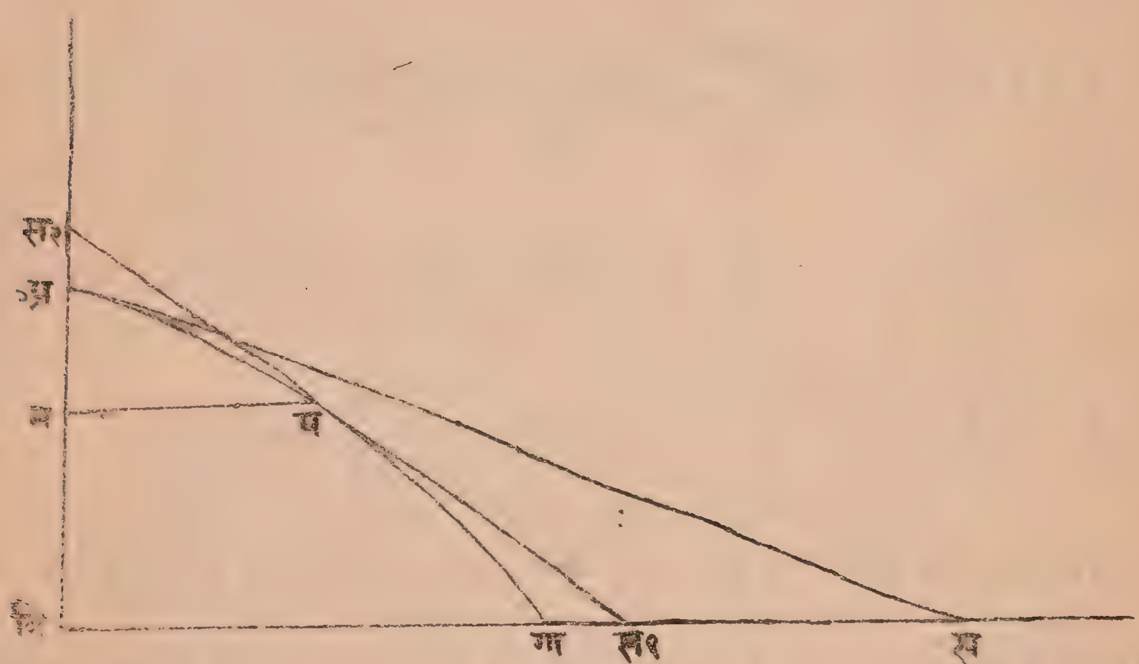
इस लिये $र = इ^{\int अ_1 ताय} = इ^{अ_1 य + ग} = ग_1 इ^{अ_1 य}$ वा $र = ग_2 इ^{क_1 य}$

दोनों के योग तुल्य र मानें तो भी समीकरण ठीक होगा इस लिये

$$र = ग_1 इ^{अ_1 य} \pm ग_2 इ^{क_1 य}$$

अ$_1$ और क$_1$ के सम्भाव्य, असम्भाव्य, और तुल्य होने से इस में कई भेद उत्पन्न होते हैं।

(९) नव हाथ ऊंचे खंभे पर एक मोर बैठा था उसने खंभे की जड़ से २७ हाथ दूरी पर एक सांप को बिल की तरफ़ जो कि खंभे की जड़ में थी आते देख उसके ऊपर झपटा। बतावो खंभे की जड़ से कितनी दूरी पर मोर ने सांप को पकड़ा। इस प्रश्न में इतना हम जानते हैं कि प्रतिक्षण में सांप की गति से दूनी मोर की गति थी।



कल्पना करो कि अवि = खंभा = ९ = अ, विस = सांप बिल का अन्तर = २७ = क, सअ = ग, वि बिल, स, पहले सांप का स्थान। अप गा, वह वक्र है जिस में मोर चला। इस का अय रेखा य अक्ष और अ मूल विन्दु है। प्रतिक्षण में जब सांप ही के सन्मुख मोर चलता है तब स्पष्ट है कि इष्ट स्थान में जहां पर सांप होगा वहां से वक्र पर जो स्पर्शरेखा होगी उस के स्पर्शविन्दु पर मोर होगा। मान लो कि इष्ट समय में सर्प का स्थान स$_1$ और वहां से वक्र स्पर्शरेखा स$_1$प। प, उस समय में मोर का स्थान और उसका भुज = अम = य और कोटि = पम = र हैं। मोर गति और सांप गति का सम्बन्ध = इ$_1$ मान रक्खो तो चलनकलन से।

$$\text{स्प}\angle\,\text{स}_2 = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}},\ \text{स}_2\text{म} = \frac{\text{र ताय}}{\text{तार}},\ \text{स}_2\ \text{वि} = \text{अ} - \text{य} + \frac{\text{र ताय}}{\text{तार}},$$

$$\text{विस}_1 = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}(\text{अ}-\text{य})+\text{र}\ ।\ \text{इस}\ \text{सस}_1 = \text{क} - \text{र}(-\text{अ}-\text{य})\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$$

इस लिये अप चाप=च=इ×सस$_1$=इक−इ$\{\text{र}+(\text{अ}-\text{य})\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$

इस का य के वश तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{\text{ताच}}{\text{ताय}} = \sqrt{\left\{1+\left[\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right]^2\right.} = -\text{इ}_1(\text{अ}-\text{य})\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2} = \text{इ}_1(\text{य}-\text{अ})\frac{\text{ता}}{\text{ताय}}\left[\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right]$$

इस लिये

$$\frac{\text{ताय}}{\text{य}-\text{अ}} = \frac{\text{ता}\left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^2\right\}}} = \frac{-\text{ताय}\ \text{इ}_2}{\text{अ}-\text{य}}\quad \text{यदि}\ \frac{1}{\text{इ}_1} = \text{इ}_2$$

चलानयन करने से

$$\text{स्थि}+\text{ला}(\text{अ}-\text{य})^{\text{इ}_2} = \text{ला}\left[\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}+\sqrt{\left\{1+\left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^2\right\}}\right]$$ (८वें प्रक्रमके (६)वें उदाहरण से)

इस में यदि य = ० तो

$$\text{स्थि}+\text{ला}\ (\text{अ})^{\text{इ}_2} = \text{ला}\left[\text{स्प}\angle\,\text{अ}+\sqrt{\{1+\text{स्प}^2\angle\,\text{अ}\}}\right]$$

$$= \text{ला}\left(\frac{\text{क}}{\text{अ}}+\frac{\text{ग}}{\text{अ}}\right) = \text{ला}\ (\text{क}+\text{ग}) - \text{ला}\ (\text{अ})$$

इस लिये स्थि=ला (क+ग)−ला $(\text{अ})^{\text{इ}+1}$ इस का उत्थापन (१) में देने से

$$\text{ला}\left\{\frac{(\text{अ}-\text{य})^{\text{इ}_2}(\text{क}+\text{ग})}{\text{अ}^{\text{इ}_2+1}}\right\} = \text{ला}\left[\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}+\sqrt{\left\{1+\left[\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right]^2\right\}}\right]$$

लघुरिक्थ को उड़ा देने से

$$\frac{(\text{अ}-\text{य})^{\text{इ}_1}(\text{क}+\text{ग})}{\text{अ}^{\text{इ}_2+1}} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}+\sqrt{\left\{1+\left[\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right]^2\right\}}\ \cdots\cdots\cdots (२)$$

$$\frac{\text{अ}^{\text{इ}_2+1}}{(\text{अ}-\text{य})^{\text{इ}_2}(\text{क}+\text{ग})}=\frac{1}{\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}+\sqrt{\left\{1+\left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^2\right\}}}=\sqrt{\left\{1+\left[\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right]^2\right\}}-\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\cdots(3)$$

(२) और (३) के अन्तर से

$$\frac{2\text{तार}}{\text{ताय}}=\left[\frac{\text{अ}-\text{य}}{\text{अ}}\right]^{\text{इ}_2}\left[\frac{\text{क}+\text{ग}}{\text{अ}}\right]-\left[\frac{\text{अ}}{\text{अ}-\text{य}}\right]^{\text{इ}^2}\left[\frac{\text{अ}}{\text{क}+\text{ग}}\right]$$

इस लिये चलानयन से

$$2\text{र}+\text{स्थि}=\frac{\text{अ}^{\text{इ}_2}}{1-\text{इ}_2}\left[\frac{\text{अ}}{\text{क}+\text{ग}}\right](\text{अ}-\text{य})^{1-\text{इ}_2}$$
$$-\frac{1}{\text{अ}^{\text{इ}_2}(1+\text{इ}_2)}\left[\frac{\text{क}+\text{ग}}{\text{अ}}\right](\text{अ}-\text{य})^{1+\text{इ}_2}$$

इस में य=0 तो

$$\text{स्थि}=\frac{\text{अ}}{1-\text{इ}_2}\,\frac{\text{अ}}{\text{क}+\text{ग}}-\frac{\text{अ}}{1+\text{इ}_2}\left(\frac{\text{क}+\text{ग}}{\text{अ}}\right)=\frac{-\text{क}+\text{ग}}{1-\text{इ}_2}-\frac{\text{क}+\text{ग}}{1+\text{इ}_2}$$
$$=\frac{-\text{क}-\text{इ}_2\text{क}+\text{ग}+\text{गइ}_2-\text{क}+\text{इ}_2\text{क}-\text{ग}+\text{इ}_2\text{ग}}{1-\text{इ}_2^2}=\frac{2\text{इ}_2\text{ग}-2\text{क}}{1-\text{इ}_2^2}$$

इस का उत्थापन देकर समशोधनादि से

$$\text{र}=\frac{\text{अ}^{\text{इ}_2}}{2(1-\text{इ}_2)}\left[\frac{\text{अ}}{\text{क}+\text{ग}}\right](\text{अ}-\text{य})^{1-\text{इ}_2}-\frac{\text{अ}^{-\text{इ}_2}}{2(1+\text{इ}_2)}\left[\frac{\text{क}+\text{ग}}{\text{अ}}\right](\text{अ}-\text{य})^{+1\text{इ}_2}$$
$$-\frac{-\text{क}+\text{इ}_2\text{ग}}{1-\text{इ}_2^2}\cdots(4)$$

इस में यदि य=अ तो बिल से सांप और मोर का योग

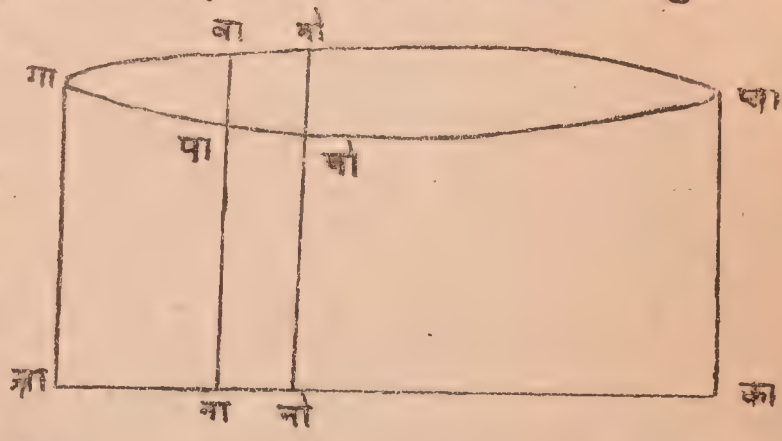
$$=\frac{-\text{क}+\text{इ}_2\text{ग}}{1-\text{इ}_2^2}=\frac{-\text{क}+\frac{\text{ग}}{\text{इ}_1}}{1-\frac{1}{\text{इ}_1^2}}=-\frac{-\text{कइ}_1^2+\text{इ}_1\text{ग}}{\text{इ}_1^2-1}$$

$$=\frac{\text{इ}_1^2\text{क}-\text{इ}_1\text{ग}}{\text{इ}_1^2-1}$$ इतने अन्तर पर हुआ ।

इस पर से यदि संख्यात्मक मान निकालो तो १७·०३ इतना होगा। भास्कराचार्य ने जो अपनी लीलावती के क्षेत्र व्यवहार में मोर और सांप का प्रश्न लिखा है उस में दोनों की गति तुल्य माना है इस लिये $इ_1=1$ इस पर से ऊपर की क्रिया करो तो बिल से अनन्त दूर पर भिन्न दिशा में योग आता है इस लिये भास्कर का उदाहरण अशुद्ध है। भास्कराचार्य ने जो त्रिभुजगणित की युक्ति से अपने उदाहरण का उत्तर निकाला है वह ठीक नहीं क्योंकि मयूर कोई देवता नहीं कि उसे पहले से मालूम हो जाय कि मैं इस सरल मार्ग से चलकर जब तक पृथ्वी के जिस स्थान पर पहुंचूंगा तब तक सांप भी चल कर उसी स्थान पर पहुंच जायगा।

वैशेषिक कलन।

२९८। यदि य का फल ज्ञात हो तो चलनकलन की युक्ति से उसके महत्तम और न्यूनतम मान का प्रमाण भी मालूम हो जाता है परन्तु बहुत से ऐसे प्रश्न हैं जिनमें य के फल ही का पता लगाना पड़ता है जिस में महत्तम वा न्यूनतम का धर्म्म हो। जैसे दो दिये हुये विन्दुओं के बीच में परमाल्प अन्तर जानना है तो यहां न्यूनतम अन्तर जानने के लिये उस वक्र का पता लगाना पड़ेगा जिसका चाप दोनों विन्दुओं के अन्तर्गत परमाल्प हो। यदि गा घा दो निर्दिष्ट विन्दु हों तो यहां दोनों विन्दुओं पर गये गापाघा, गावाघा इत्यादि वक्रों में से एक ऐसे वक्र को चुनना चाहिये जिस का चाप औरों के चाप से छोटा हो। ऐसे वक्र का क्या समीकरण होगा इसके लिये एक वक्र के पा विन्दु से दूसरे वक्र के वा विन्दु का पता लगाना पड़ेगा। इस पा और वा विन्दु का जो अन्तर है इसे



पाना कोटि को वैशेषिक गति कहते हैं इस को "वै" से प्रकाश करेंगे । जैसा गापाघा वक्र के पा विन्दु का भुज=आना=य और कोटि=पाना=र माने तो यदि पावा बहुत ही छोटा हो तो ता और वै में इस प्रकार का भेद है अर्थात् र+तार इस से गापाघा वक्र में पा विन्दु के बहुत ही पास में जो पा′ विन्दु है उसकी कोटि पा′ना′ समझी जाती है और र+वैर इस से दूसरा वक्र जो गावाघा है उस में पा विन्दु के बहुत ही पास जो वा विन्दु है उस की कोटि वाना समझी जाती है ।

२६६ । ऊपर के क्षेत्र में नापा=र ∴ ना′पा′=र+तार और नावा=र+वैर इस लिये ना′वा′=नावा+ ता (नावा)=र+वैर+ता (र+वैर)
और ना′वा′=ना′पा′+वै (ना′पा′)=र+तार+वै(र+तार) इस लिये

र + वैर + ता(र+वैर) = र + वैर + तार + तावैर

= र + तार + वै (र + तार) = र + तार + वैर + वैतार

इस लिये तावैर = वैतार

अर्थात् वैशेषिकगति की तात्कालिकी गति और तात्कालिकी गति की वैशेषिकगति दोनों परस्पर तुल्य हैं ।

इसी प्रकार यदि तार को र मान लो तो

तावैतार = वै ता^{२}र, वा तावैतार = तातावैर = ता^{२}वैर

∴ ता^{२}वैर = वैता^{२}र और इसी तरह ता^{न}वैर = वैता^{न}र ।

यदि र की तात्कालिकी गति = र$_{१}$—र यह हो और र की वैशेषिकगति बहुतही अल्प हो तो ऊपर के सिद्धान्त से

वै तार = वै (र$_{१}$—र) = वैर$_{१}$-वैर = तावैर यह भी सिद्ध कर सक्ते हैं ।

२७० । इसी तरह यदि $\int$ स = स$_{१}$ तो स = तास$_{१}$
∴ वैस = वैतास$_{१}$ = तावैस$_{१}$ इस लिये $\int$ वैस = $\int$ वैतास$_{१}$ = $\int$ तावैस$_{१}$
= वैस$_{१}$ = वै$\int$स और $\int^{२}$वैस = $\int$वै$\int$स = वै$\int\int$स = वै$\int^{२}$स

इसी तरह $\int^{न}$वैस = वै$\int^{न}$स

$\int^{न}$ इस से समझो कि बार बार न बार चलानयन किया गया है

२०१। ऊपर के सिद्धान्तों के देखने से यह स्पष्ट होता है कि तात्कालिक और वैशेषिक के गणितों में केवल ता और वै का भेद है अर्थात् ता के स्थान में वै को रख देने से सब गणित तात्कालिकी गति के ऐसा हो जाता है। जैसे यदि स = $र^{न}$ तो चलनकलन से

$$\text{तास} = \text{नर}^{\text{न}-१}\text{तार}$$

इस में ता के स्थान में वै को रख देने से

$$\text{वैस} = \text{नर}^{\text{न}-१}\text{वैर}$$

इसी तरह यदि स = फ(य,र,प,ब, इ०) जहां प,ब इ० $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}, \frac{\text{ता}^{२}\text{र}}{\text{ताय}^{२}}$ इ० हैं तो चलनकलन से

$$\text{तास} = \frac{\text{तास}}{\text{ताय}}\text{ताय} + \frac{\text{तास}}{\text{तार}}\text{तार} + \frac{\text{तास}}{\text{ताप}}\text{ताप} + \frac{\text{तास}}{\text{ताब}}\text{ताब} + \text{इ०}$$

$$= \text{मा ताय} + \text{ना तार} + \text{पा ताप} + \text{बा ताब} + \text{इ०}$$

$$\text{जहां मा} = \frac{\text{तास}}{\text{ताय}}, \text{ना} = \frac{\text{तास}}{\text{तार}}, \frac{\text{तास}}{\text{ताप}} = \text{पा}, \frac{\text{तास}}{\text{ताब}} = \text{बा}, \text{इ०}$$

इस में ता के स्थान में वै को रख देने से

$$\text{वैस} = \text{मा वैय} + \text{ना वैर} + \text{पा वैप} + \text{बा वैब} + \text{इ०}$$

२०२। वै$\int$स, वा $\int$वैस इस का मान यदि जानना हो जहां स, य र, और इन के तात्कालिकी गति का कोई फल हो और य, र, ट चलराशि का फल हों तो

$$\text{तास} = \text{मा ताय} + \text{ना ता}^{२}\text{य} + \text{पाता}^{३}\text{य} + \text{बा ता}^{४}\text{य} + \cdots$$
$$+ \text{मतार} + \text{न ता}^{२}\text{र} + \text{प ता}^{३}\text{र} + \text{व ता}^{४}\text{र} + \cdots$$

परन्तु $\text{ता}^{२}\text{य} = \text{ता ताय}, \text{ता}^{३}\text{य} = \text{ता ता}^{२}\text{य}$

इस लिये ता के स्थान में वै को रख देने से

$$\text{वैस} = \text{मा वैय} + \text{ना वैताय} + \text{पा वैता}^{२}\text{य} + \text{बा वैता}^{३}\text{य} + \cdots$$
$$+ \text{म वैर} + \text{न वैतार} + \text{प वैता}^{२}\text{र} + \text{ब वैता}^{३}\text{र} + \cdots$$

इस लिये $\int \text{वैस} = \int (\text{मावैय} + \text{नावैताय} + \text{पावैता}^{2}\text{य} + \text{बावैता}^{3}\text{य} + \cdots)$
$+ \int (\text{मवैर} + \text{नवैतार} + \text{पवैता}^{2}\text{र} + \text{बवैता}^{3}\text{र} + \cdots)$

परन्तु खण्डचलनयन से

$$\int \text{नावैताय} = \int \text{नातावैय} = \text{नावैय} - \int \text{तानावैय} ।$$

$$\int \text{पावैता}^{2}\text{य} = \int \text{पाता}^{2}\text{वैय} = \text{पातावैय} - \int \text{तापातावैय}$$
$$= \text{पातावैय} - \text{तापावैय} + \int \text{ता}^{2}\text{पावैय} ।$$

$$\int \text{बावैता}^{3}\text{य} = \int \text{बाता}^{3}\text{वैय} = \text{बाता}^{2}\text{वैय} - \int \text{ताबाता}^{2}\text{वैय}$$
$$= \text{बाता}^{2}\text{वैय} - \text{ताबातावैय} + \int \text{ता}^{2}\text{बातावैय}$$
$$= \text{बाता}^{2}\text{वैय} - \text{ताबातावैय} + \text{ता}^{2}\text{बावैय} - \int \text{ता}^{3}\text{बावैय}$$

इ० इ० इ०

इसी तरह

$$\int \text{नवैतार} = \int \text{नतावैर} = \text{नवैर} - \int \text{तानवैर} ।$$

$$\int \text{पवैता}^{2}\text{र} = \int \text{पता}^{2}\text{वैर} = \text{पतावैर} - \text{तापवैर} + \int \text{ता}^{2}\text{पवैर} ।$$

$$\int \text{बवैता}^{3}\text{र} = \text{बता}^{2}\text{वैर} - \text{ताबतावैर} + \text{ता}^{2}\text{बवैर} - \int \text{ता}^{3}\text{बवैर} ।$$

इन सब का उत्थापन $\int$ वैस में देने से

$$\int \text{वैस} = (\text{ना} - \text{तापा} + \text{ता}^{2}\text{बा} - \text{इ०})\,\text{वैय} + (\text{न} - \text{ताप} + \text{ता}^{2}\text{ब} - \text{इ०})\,\text{वैर}$$
$$+ (\text{पा} - \text{ताबा} + \text{इ०})\,\text{तावैय} + (\text{प} - \text{ताब} + \text{इ})\,\text{तावैर}$$
$$+ (\text{बा} - \text{ताभा} + \text{इ०})\,\text{ता}^{2}\text{वैय} + (\text{ब} - \text{ताभ} + \text{इ०})\,\text{ता}^{2}\text{वैर}$$
$$+ \int (\text{मा} - \text{ताना} + \text{ता}^{2}\text{पा} - \text{ता}^{3}\text{बा} + \text{इ०})\,\text{वैय}$$
$$+ \int (\text{म} - \text{तान} + \text{ता}^{2}\text{प} - \text{ता}^{3}\text{ब} + \text{इ०})\,\text{वैर}$$

इस के देखने से स्पष्ट होता है कि वैय, तावैय, इत्यादि के और वैर, तावैर इत्यादि के गुणकों में साजात्य धर्म है। इस लिये एक चल स के मान में ल को और मानें तो इस के वश से $\int$वैस में उसी चाल के और खण्ड होंगे जैसा कि वैय और वैर के वश से उत्पन्न हुए हैं।

२०३। यदि स=शाताय जहां $\int$शाताय इस के वैशेषिक का ज्ञान करना हो तो कल्पना करो कि

$$ताशा = माताय + नातार + पाताप + बाताब + भाताभ + इ०$$

जहां $प = \frac{तार}{ताय}, ब = \frac{ता^2र}{ताय^2}, भ = \frac{ता^3र}{ताय^3}$ । इ०

और $मा = \frac{ताशा}{ताय}, ना = \frac{ताशा}{तार}, पा = \frac{ताशा}{ताय}$, इ०

इस लिये

$$वेशा = मावेय + नावेर + पावेप + बा वेब + भा वेभ + इ०$$

अब $वे\int शाताय = \int वे(शाताय) = \int (शा वेताय + ताय वेशा)$

$= \int (शा तावेय + तायवेशा) = \int शा तावेय + \int तायवेशा$

$= शावेय + \int (तायवेशा - वेयताशा)$

परन्तु $\int (तायवेशा - वेयताशा) = \int ताय (मावेय + नावेर + पावेप + \cdots)$

$- \int वेय (माताय + नातार + पाताप + \cdots)$

$= \int ना(वेर - पवेय)ताय + \int पा(वेप - ब वेय)ताय + \int बा(वेब - भवेय)ताय + \cdots$

अब यहां $प = \frac{तार}{ताय}, ब = \frac{ताप}{ताय}, भ = \frac{ताब}{ताय}$

इस लिये

$$वेप = \frac{तायवेतार - तारवेताय}{ताय^2} = \frac{वेतार - पवेताय}{ताय}$$

$$\therefore वेप - बवेय = \frac{वेतार - पतावेय - तापवेय}{ताय} = \frac{ता}{ताय}(वेर - पवेय)$$

$$और\ वेब = \frac{तायवेताप - तापवेताय}{ताय^2} = \frac{तावेप - बतावेय}{ताय}$$

$$\therefore वेब - भवेय \frac{तावेप - बतावेय - ताब वेय}{ताय} = \frac{ता}{ताय}(वेप - बवेय)$$

और कल्पना करो कि

$$\text{वेर} - \text{पवेय} = \text{ह} \therefore \text{वेप} - \text{ब वेय} = \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}} \text{। वेब} - \text{भ वेय} = \frac{\text{ता}^2\text{ह}}{\text{ताय}^2} \text{ इ०}$$

इस लिये

$$\text{वे}\int\text{शाताय} = \text{शावेय} + \int\text{नाहताय} + \int\text{पा}\frac{\text{ताह}}{\text{ताय}}\text{ताय} + \int\text{बा}\frac{\text{ता}^2\text{ह}}{\text{ताय}^2}\text{ताय} + \cdots$$

$$\text{परन्तु} \int \text{पा}\frac{\text{ताह}}{\text{ताय}}\text{ताय} = \text{पाह} - \int\text{ह}\frac{\text{तापा}}{\text{ताय}}\text{ताय}$$

$$\int \text{बा}\frac{\text{ता}^2\text{ह}}{\text{ताय}^2}\text{ताय} = \text{बा}\frac{\text{ताह}}{\text{ताय}} - \int\frac{\text{ताबा}}{\text{ताय}}\frac{\text{ताह}}{\text{ताय}}\text{ताय}$$

$$= \text{बा}\frac{\text{ताह}}{\text{ताय}} - \text{ह}\frac{\text{ताबा}}{\text{ताय}} + \int\text{ह}\frac{\text{ता}^2\text{बा}}{\text{ताय}^2}\text{ताय}$$

$$\text{और} \int \text{भा}\frac{\text{ता}^3\text{ह}}{\text{ताय}^3}\text{ताय} = \text{भा}\frac{\text{ता}^2\text{ह}}{\text{ताय}^2} - \frac{\text{ताभा}}{\text{ताय}}\frac{\text{ताह}}{\text{ताय}} + \text{ह}\frac{\text{ता}^2\text{भा}}{\text{ताय}^2}$$

$$-\int\text{ह}\frac{\text{ता}^3\text{भा}}{\text{ताय}^3}\text{ताय}$$

$$\text{इस लिये} \quad \text{वे}\int\text{शाताय} = \text{शावेय} + \left(\text{पा} - \frac{\text{ताबा}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ता}^2\text{भा}}{\text{ताय}^2} - \text{इ०}\right)\text{ह}$$

$$+ \left(\text{बा} - \frac{\text{ताभा}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ता}^2\text{भा}_1}{\text{ताय}^2} - \text{इ०}\right)\frac{\text{ताह}}{\text{ताय}}$$

$$+ \left(\text{भा} - \frac{\text{ताभा}_1}{\text{ताय}} + \text{इ०}\right)\frac{\text{ता}^2\text{ह}}{\text{ताय}^2} + \text{इ०}$$

$$+ \int\left(\text{ना} - \frac{\text{तापा}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ता}^2\text{बा}}{\text{ताय}^2} - \frac{\text{ता}^3\text{भा}}{\text{ताय}^3} + \text{इ०}\right)\text{ह ताय}$$

इस तरह से स्पष्ट देख पड़ता है कि $\int$ शाताय इस के वैशेषिक गति में दो भाग हैं एक चल चिन्ह के अन्तर्गत और दूसरा चल चिन्ह रहित

इस में जब $य_1$ और $र_1$ तब शा, पा आदि का मान $शा_1$, $पा_1$ इत्यादि और जब $य_2$ और $र_2$ तब शा, पा आदि का मान $शा_2$, $पा_2$ इत्यादि मानो तो $य_2$, और $य_1$ सीमा के भीतर, $वै\int शाताय$, इस का मान

$$शा_2 वैय_2 - शा_1 वैय_1 + \left(पा_2 - \frac{ता बा_2}{ताय_2} + \frac{ता^2 भा_2}{ताय^2} - इ०\right) ह_2 ``$$

$$- \left(पा_1 - \frac{ता बा_1}{ताय_1} + \frac{ता^2 भा_1}{ताय_1^2} - इ० \right) ह_1 + इ०$$

$$+ \int_{य_1}^{य_2} \left(ना - \frac{तापा}{ताय} + \frac{ता^2 बा}{ताय^2} - इ०\right) ह\, ताय ।$$

२०४। यदि स = फ (य,र,ल) जहां य का र और ल फल हैं तो यहां भी ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से कल्पना कर सक्ते हो कि

$$ताशा = मा\, ताय + ना\, तार + पा\, ता\, प + बा\, ता\, ब + इ०$$

$$+ बा'\, ताला + पा'\, ताया + न बा'\, ताब' + इ०$$

इस लिये

$$वैशा = मा\, वैय + ना\, वैर + पावैप + बावैब + इ०$$

$$+ ना'\, वैल + पा'\, वै\, प' + बा'\, वैब' + इ०$$

यहां ना', पा' इत्यादि उसी चाल के हैं जैसे कि ना, पा इ० हैं अर्थात् र के स्थान में ल को रख देने से ना' पा' इ० हो जायगे।

यहां भी यदि वैल — प' वैय = ह' तो ऊपर ही की युक्ति से

$$वै\int शाताय = शावैय + \left(पा - \frac{ताबा}{ताय} + \frac{ता^2 भा}{ताय^2} - इ०\right) ह$$

$$+ \left(पा' - \frac{ता\, बा'}{ताय} + \frac{ता^2 भा'}{ताय^2} - इ०\right) ह'$$

$$+ \left(बा - \frac{ताभा}{ताय} + इ०\right) \frac{ताह}{ताय}$$

$$+ \left(\text{बां} - \frac{\text{ताभां}}{\text{ताय}} + \text{इ}_0 \right) \frac{\text{ताह}'}{\text{ताय}} + \text{इ}_0$$

$$+ \int \left(\text{ना} - \frac{\text{तापा}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ता}^2\text{बा}}{\text{ताय}^2} - \text{इ}_0 \right) \text{ह ताय}$$

$$+ \int \left(\text{नां} - \frac{\text{तापां}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ता}^2\text{बां}}{\text{ताय}^2} - \text{इ}_0 \right) \text{हं ताय} ।$$

२०५। जिस युक्ति से चलनकलन में सिद्ध है कि यदि $\text{र} = \text{फ}(\text{य})$ और र का महत्तम वा न्यूनतम मान हो तो तार=0 उसी युक्ति से जिस समय $\int_{\text{य}_1}^{\text{य}_2}$ शाताय इस का मान महत्तम वा न्यूनतम होगा उस समय वे $\int_{\text{य}_1}^{\text{य}_2}$ शा ताय = ० ऐसा होगा। परन्तु जब वे इस का मान ऐसे समय में सर्वदा शून्य होगा तब कह सक्ते हैं कि २०३वें प्रक्रम में वैशेषिक का मान जो दो खण्ड में एक चलचिन्हान्तर्गत और दूसरा चलचिन्ह रहित में सिद्ध हुआ है वे दोनों पृथक् पृथक् शून्य के तुल्य होंगे जैसे।

(१) उदाहरण, दो विन्दुओं का परमाल्प अन्तर जानना है यहां

$$\int \text{शाताय} = \int \sqrt{\left(1 + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}\right)} \text{ ताय} = \int \sqrt{(1 + \text{प}^2)} \text{ ताय}$$

$$\text{इस लिये शा} = \sqrt{(1 + \text{प}^2)} \therefore \text{ ताशा} = \frac{\text{प}}{\sqrt{(1+\text{प}^2)}} \text{ ताप}$$

यहां स्पष्ट देख पड़ता है कि यदि इसे २०३वें प्रक्रम में ताशा का जो रूप है उस के साथ तुलना करो तो

$$\text{मा} = 0, \text{ ना} = 0, \text{ पा} = \frac{\text{प}}{\sqrt{(1+\text{प}^2)}}, \text{ बा} = 0,$$

ओर चल चिन्हान्तर्गत मान को शून्य के तुल्य करने से

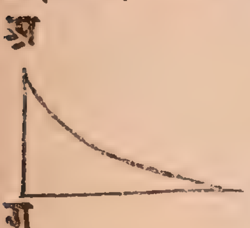
$$ना - \frac{तापा}{ताय} = 0 \;\therefore\; \frac{तापा}{ताय} = 0 \;\therefore\; पा = स्थिराङ्क = ग = \frac{प}{\sqrt{(१+प^{२})}}$$

$$तब\;\; ग^{२} = \frac{प^{२}}{१+प^{२}} \;\therefore\; १ - ग^{२} = \frac{१}{१+प^{२}}\; और\; प = \frac{ग}{\sqrt{(१-ग^{२})}} = अ$$

इस लिये

$\frac{तार}{ताय} = अ$ तब $र = अय + क$ अर्थात् दोनों विन्दुओं में परमाल्प अन्तर उस वक्र का चाप होगा जिस का समीकरण $अय + क = र$ यह अर्थात् सरलरेखारूप होगा।

(२) दो विन्दुओं के बीच में एक ऐसा वक्र बनावो जिस में ऊपर के विन्दु से कोई पिण्ड पृथ्वी के आकर्षण से उस के चाप में चल कर परमाल्प काल में नीचे की विन्दु पर पहुंचे। यहां चाप का प्रमाण चा॥



$अग = र$, $कग = य \angle$ अ गक = समकोण, पृथ्वी के आकर्षण का बल = वे मानो तो गति विद्या से अ से क तक चाप की राह से पिण्ड के आने में काल

$$सेकण्ड\; में = \int \frac{\frac{ताचा}{ताय}}{\sqrt{२वेर}}\, ताय = \frac{१}{\sqrt{२वे}} \int \frac{\sqrt{(१+प^{२})}}{\sqrt{र}}\, ताय = \frac{१}{\sqrt{२वे}} \int शा\; ताय$$

$$\therefore शा = \frac{\sqrt{(१+प^{२})}}{\sqrt{र}}\;\; और\;\; ताशा = -\frac{\sqrt{(१+प^{२})}}{२र^{\frac{३}{२}}}\, तार + \frac{प}{\sqrt{र}\sqrt{(१+प^{२})}}\, ताप$$

इस लिये

$$मा = 0,\; ना = -\frac{\sqrt{(१+प^{२})}}{२र^{\frac{३}{२}}},\; पा = \frac{प}{\sqrt{र}\sqrt{(१+प^{२})}},\; बा = 0$$

और $\text{ना} - \frac{\text{तापा}}{\text{ताय}} = 0 \therefore \text{ना} = \frac{\text{तापा}}{\text{ताय}}$ इस लिये इस का उत्थापन ताशा में देने से

$$\text{ताशा} = \text{तापा}\ \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \text{पा}\ \ \text{ताप} = \text{तापाप} + \text{पा ताप} = \text{ता}\ (\text{प}\times\text{पा})$$

इस लिये $\text{शा} = \text{पा}\times\text{प} + \text{ग}$ जहां ग कोई स्थिराङ्क है।

$$\text{अब}\quad \text{शा} = \text{पाप} + \text{ग} = \frac{\sqrt{(1+\text{प}^2)}}{\sqrt{\text{र}}} = \frac{\text{प}^2}{\sqrt{\text{र}}\sqrt{(1+\text{प}^2)}} + \text{ग}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{\text{र}}\sqrt{(1+\text{प}^2)}} = \text{ग} = \frac{1}{\sqrt{2\text{अ}}} \therefore \sqrt{(1+\text{प}^2)} = \sqrt{\frac{2\text{अ}}{\text{र}}}\ \text{और}$$

$\text{प} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \sqrt{\frac{2\text{अ}-\text{र}}{\text{र}}}$ यह एक चक्राल्द का समीकरण है (चलनकलन देखो)

(३) उदाहरण। दो वक्रों के बीच में परमाल्प अन्तर निकालो अर्थात् दोनों वक्रों में एक एक ऐसी विन्दु ठहरावो जिन में परमाल्प अन्तर हो।

यहां (१) उदाहरण से दो विन्दुओं में परमाल्प अन्तर का समीकरण $\text{र} = \text{अय} + \text{क}$ और $\text{शा} = \sqrt{(1+\text{प}^2)}$ जहां प = कोई स्थिराङ्क।

मान लो कि दोनों दिये हुये वक्रों में $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{म}, \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{न}$ और जिन विन्दुओं को परमाल्प अन्तररूप सरलरेखा दोनों वक्रों में काटती है उन विन्दुओं के क्रम से भुज कोटि $\text{र}_1, \text{य}_1$ और $\text{र}_2, \text{य}_2$ हैं तो

$$\frac{\text{वैर}_1}{\text{वैय}_1} = \frac{\text{तार}_1}{\text{ताय}_1} = \text{म}\ \text{और}\ \frac{\text{वैर}_2}{\text{वैय}_2} = \frac{\text{तार}_2}{\text{ताय}_2} = \text{न}$$

परन्तु २७३ प्रक्रम में महत्तम और न्यूनतम मान में

$$\text{शा}_2\text{वैय}_2 - \text{शा}_1\text{वैय}_1 + \text{पा}_2\ \text{ह}_2 - \text{पा}_1\ \text{ह}_1 = 0$$

परन्तु अन्तिम विन्दुओं का वैशेषिक गमन भी शून्य होगा

इस लिये $शा_1 वेय_1 + पा_1 ह_1 = 0$, $शा_2 वेय_2 + पा_2 ह_2 = 0$

$ह_1$ और $ह_2$ का मान २०३वें प्रक्रम में जो है उस का उत्थापन देने से

$$शा_1 वेय_1 + पा_1 (वेर_1 - प_1 वेय_1) = 0 \cdots \cdots \cdots \cdots (1)$$

$$शा_2 वेय_2 + पा_2 (वेर_2 - प_1 वेय_2 = 0 \cdots \cdots \cdots \cdots (2)$$

(१) से $शा_1 + पा_1 म - पा_1 प_1 = 0 \therefore म = प_1 - \frac{शा_1}{पा_1} = - \frac{1}{प_1} = - \frac{1}{ग}$

(२) से $शा_2 + पा_2 न - पा_2 प_2 = 0 \therefore न = प_2 - \frac{शा_2}{पा_2} = - \frac{1}{प_2} = - \frac{1}{ग}$

$$\therefore 1 + ग म = 0 \text{ और } 1 + ग न = 0 \text{ ।}$$

यह दोनों समीकरण दिखलाते हैं कि सरलरेखा दोनों वक्रों को काटने से समकोण बनाती है। और दोनों विन्दुओं पर गई हुई सरलरेखा का समीकरण $र - र_1 = \frac{र_2 - र_1}{य_2 - य_1} (य - य_1) \therefore ग = \frac{र_2 - र_1}{य_2 - य_1}$ इस का उत्थापन $1 + गम$ और $1 + गन$ में देने से दो समीकरण होंगे और वक्रों के समीकरण पर से $य_2$ और $य_1$ के फल के वश से $र_2$, $र_1$ के जानने के लिये दो समीकरण और होंगे इस तरह से चारो समीकरणों पर से $य_2$, $य_1$, $र_2$, $र_1$ चारो के मान व्यक्त हो जायगे।

(४) ऐसा वक्र बतावो जिस के चाप, अवलूत के चाप, और वक्र जातीय व्यासार्द्ध से उत्पन्न क्षेत्रफल न्यूनतम हो। यहां १३१वें प्रक्रम से यदि फल का मान आ मानो तो

$$\frac{ताआ}{ताय} = \frac{वि}{2} \frac{तावा}{ताय} = \frac{(1+प^2)^{\frac{3}{2}}}{-2ब} \sqrt{(1+प^2)} = \frac{(1+प^2)^2}{-2ब} \text{ (चलनकलन से)}$$

इस लिये $शा = \frac{(1+प^2)^2}{ब}$ यहां शा के मान में केवल प और ब हैं

इस लिये २०३वें प्रक्रम से ताशा = पाताप + बाताब

$$\text{और } \frac{ता^2 बा}{ताय^2} - \frac{तापा}{ताय} = 0 \therefore पा = \frac{ताबा}{ताय} - गा_1$$

$$\text{इस लिये } ताशा = \frac{ता बा ता प}{ताय} + ताप\, गा_1 + बाताब$$

$$= ताबाब + बाताब + तापगा_1$$

$$\text{इस लिये } शा = बा\, ब + प\, गा_1 + गा_2 = \frac{(1+प^2)^2}{ब} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

जहां $गा_1$ और $गा_2$ कोई स्थिराङ्क हैं ।

$$\text{परन्तु } शा = \frac{(1+प^2)^2}{ब} \therefore ता\, शा = \frac{4\, प(1+प^2) ताप}{ब} - \frac{(1+प^2)^2}{ब^2} ताब$$

$$\text{इस लिये २०३वें प्रक्रम से } बा = -\frac{(1+प^2)^2}{ब^2} \text{ इस का उत्थापन (1) में देने}$$

$$\text{से } \frac{(1+प^2)^2}{ब} = -\frac{(1+प^2)^2}{ब^2} ब + प\, गा_1 + गा_2$$

$$\text{इस लिये } \frac{ब(गा_1\, प + गा_2)}{(1+प^2)^2} = 2$$

चलानयन से

$$गा_2\, स्प^{-1} प + \frac{गा_2 प - गा_1}{(1+प^2)} = 4\, य + गा_3, \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\text{और } \frac{ब(गा_1 प^2 + गा_2\, प)}{(1+प^2)^2} = 2\, प$$

चलानयन से

$$गा_1\, स्प^{-1} प - \frac{प \times गा_1 + गा_2}{1+प^2} = 4\, र + \text{स्थिराङ्क}$$

इस में $गा_2$ जोड़ देने से

$$गा_1 स्प^{-1} प + \frac{प(गा_2 प — गा_1)}{1+प^2} = 4 र + गा_4, \cdots\cdots (3)$$

(२) और (३) से $स्प^{-1}प$ को लोप कर देने से

$$\frac{(गा_2 प — गा_1)^2}{(1+प^2)} = 4 गा_2 र - 4 गा_1 य + गा_2 गा_4 — गा_1 गा_3$$

$$इस लिये \sqrt{(1+प^2)} = \frac{गा_2 प — गा_1}{2\sqrt{(गा_2 र — गा_1 य + का)}}$$

जहां $4 का = गा_2 गा_4 — गा_1 गा_3$

कल्पना करो कि एक स्थिर विन्दु से गणना करने से वक्र के चाप का प्रमाण चा है तो चलनयन से $चा + गा = \sqrt{(गा_2 र — गा_1 य + का)}$ ··(४)

मूल विन्दु और अक्षों के परिवर्त्तन से (४) का रूप

$चा = \sqrt{८ अ य + स्थिराङ्क}$ ऐसा हो सक्ता है जो कि ७१वें प्रक्रम से चक्राभ का समीकरण है।

(५) आकाश में दो विन्दुओं का परमाल्प अन्तर क्या होगा।

दोनों विन्दुओं का अन्तर चा मानो तो

$$ताचा = \sqrt{\{ताय^2 + तार^2 + ताल^2\}} = स$$

इस लिये २७२वें प्रक्रम से खण्ड तात्कालिकी गति पर से

$$\frac{तास}{ताय} = \frac{ता^2य\ ताय}{स} = \frac{ताय}{स} ता ताय, \frac{तास}{तार} = \frac{तार}{स} ता तार \text{ और } \frac{तास}{ताल} = \frac{ताल}{स} ताताल$$

$$इस लिये वै \int स = \int वैस = \int वैताचा = \int \frac{ताय}{ताचा} वैताय + \int \frac{तार}{ताचा} वैतार + \int \frac{ताल}{ताचा} वै ताल$$

$$= \frac{ताय}{ताचा} वैय + \frac{र}{ताचा} वैर + \frac{ताल}{ताचा} वैल - \int \{ ता(\frac{ताय}{ताचा}) वैय - ता(\frac{तार}{ताचा}) वैर + ता(\frac{ताल}{ताचा}) वैल$$

इस लिये मा=०, म=० मा́=०, (क्योंकि न्यूनतम मान में सब पृथक् पृथक् शून्य के तुल्य होंगे)

$$ना = \frac{ताय}{ताचा}, न = \frac{तार}{ताचा}, ना́ = \frac{ताल}{ताचा}, ताना = 0 = तान = ताना́$$

$$\therefore \frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} = \text{अ}, \frac{\text{तार}}{\text{ताचा}} = \text{क}, \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}} = \text{ग},$$

$$\text{और } \frac{\text{ताय}^2}{\text{ताचा}^2} + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताचा}^2} + \frac{\text{ताल}^2}{\text{ताचा}^2} = 1 = \text{अ}^2 + \text{क}^2 + \text{ग}^2$$

$$\text{और } \frac{\text{ताय}}{\text{ताल}} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}}, \frac{\text{तार}}{\text{ताल}} = \frac{\text{क}}{\text{ग}} \therefore \text{य} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}} \text{ल} + \text{ग}', \text{र} = \frac{\text{क}}{\text{ग}} \text{ल} + \text{ग}''$$

यह इष्ट धरातल में एक सरल रेखा को पतित करने से जो सरल रेखा होती है उसका समीकरण है।

(६) जिस घनक्षेत्र के पृष्ठ का समीकरण दिया है उसके पृष्ठ पर दिये हुये दो विन्दुओं के बीच में परमाल्प रेखा का प्रमाण क्या होगा।

कल्पना करो कि दिये हुये पृष्ठ के समीकरण पर से

ताल=प ताय +बा तार ऐसा समीकरण बनता है जहां प, और ब, य,र के फल हैं। तो वैल=प वै य+ब वैर ऐसा होगा इस का उत्थापन (५)वें उदाहरण में देने से

$$\text{वै}\int\text{ताचा} = \left[\frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} + \text{प}\frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}}\right]\text{वैय} + \left[\frac{\text{तार}}{\text{ताचा}} + \text{ब}\frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}}\right]\text{वैर}$$

$$-\int\left\{\left[\text{ता}\frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} + \text{प ता}\frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}}\right]\text{वैय} + \left[\text{ता}\frac{\text{तार}}{\text{ताचा}} + \text{ब ता}\frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}}\right]\text{वैर}\right\}$$

इस लिये परमाल्प अन्तर में

$$\text{ता}\left[\frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}}\right] + \text{प ता}\left[\frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}}\right] = 0, \text{ और ता}\frac{\text{तार}}{\text{ताचा}} + \text{ब ता}\left[\frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}}\right] = 0. \quad (1)$$

पृष्ठ के समीकरण पर से प और ब का मान निकाल फिर जो रेखा परमाल्प अन्तर रूप होगी उसका समीकरण (१) के बल से निकाल सकते हो। जैसे

यदि पृष्ठ का समीकरण ल=फ (य²+र²) ऐसा हो तो

यहां $\text{प}=२\,\text{य फं}(\text{य}^2+\text{र}^2)$, $\text{ब}=२\text{र फं}(\text{य}^2+\text{र}^2)$ और मान लो कि चा स्वतन्त्र राशि है तो (१) से

$$\frac{\text{ता}^2\text{य}}{\text{ताचा}^2}+\text{प}\frac{\text{ता}^2\text{ल}}{\text{ताचा}^2}=\frac{\text{ता}^2\text{य}}{\text{ताचा}^2}+२\,\text{यफं}(\text{य}^2+\text{र}^2)\frac{\text{ता}^2\text{ल}}{\text{ताचा}^2}=0,\;\cdots(२)$$

$$\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताचा}^2}+\text{ब}\frac{\text{ता}^2\text{ल}}{\text{ताचा}^2}=\frac{\text{ता}^2\text{य}}{\text{ताचा}^2}+२\text{र फं}(\text{य}^2+\text{र}^2)\frac{\text{ता}^2\text{ल}}{\text{ताचा}^2}=0,\;\cdots(३)$$

(२) को र से और (३) को य से गुण कर अन्तर करने से

$\text{र}\frac{\text{ता}^2\text{य}}{\text{ताचा}^2}=\text{य}\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताचा}^2}$, यहां यदि $\text{स्रु}^2=\text{य}^2+\text{र}^2$ और $\text{प}=\text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{य}}{\text{स्रु}}$

तो $\text{र ता}^2\text{य}-\text{य ता}^2\text{र}=\text{ता}(\text{स्रु}^2\,\text{ताप})=0$

$$\therefore\ \text{स्रु}^2\frac{\text{ताप}}{\text{ताचा}}=\text{स्थिराङ्क}=\text{ग}\ \text{और}\ \text{स्रु}\cdot\frac{\text{ताप}}{\text{ताचा}}=\frac{\text{ग}}{\text{स्रु}}$$

परन्तु $\text{स्रु}\frac{\text{ताप}}{\text{ताचा}}$ यह उस कोण की ज्या है जो कि परमाल्प रेखा उस वक्र को काट कर उत्पन्न करती है जो वक्र कि स्वयं घूम कर घन का पृष्ठ बनाया है। इस लिये इस कोण को यदि भ कहो तो

$$\text{ज्याभ}=\frac{\text{ग}}{\text{स्रु}}=\frac{\text{ग}}{\sqrt{(\text{य}^2+\text{र}^2)}}\ ।$$

अथ वा जब $\text{स्रु}^2\frac{\text{ताप}}{\text{ताचा}}=\text{ग}$

इस लिये

$$\text{स्रु}^4\frac{\text{ताप}^2}{\text{तास्रु}^2}=\text{ग}^2\frac{\text{ताचा}^2}{\text{तास्रु}^2}=\text{ग}^2\left(१+\text{स्रु}^2\frac{\text{ताप}^2}{\text{तास्रु}^2}+\frac{\text{ताल}^2}{\text{तास्रु}^2}\right)$$

(७५वां और ८८वां प्रक्रम देखो)

समशोधन से $\text{स्रु}^2(\text{स्रु}^2-\text{ग}^2)\frac{\text{ताप}^2}{\text{तास्रु}^2}=\text{ग}^2\left[\,१+\text{फं}\{\text{र}^2\}\right.$

इस लिये $\frac{ताय}{ताभु} = \frac{ग}{भु} \sqrt{\left\{\frac{१+फं (र^{२})}{भु^{२}—ग^{२}}\right\}}$ .. .. .. (४)

कल्पना करो कि घनक्षेत्र गोल है और यह याम्योत्तर वृत्त के घूमने से बना है प्राक् कपाल में क्षितिज के ऊपर कहीं रविकेन्द्र और चन्द्र केन्द्र दो दत्त विन्दु हैं इन दोनों के भीतर गोलपृष्ठ पर परमाल्प रेखा खींचना है । कल्पना करो कि परमाल्प रेखा याम्योत्तर वृत्त के साथ भ कोण बनाती है ।

ल अन गोल में जहां लगा है वहां से परमाल्प रेखा और याम्योत्तर वृत्त के सम्पात तक एक महद्वृत्त अ अंश, और गोल का व्यासार्द्ध चि तो यहां यदि त्रिकोणमिति से १ व्यासार्द्ध में जैसा कि सर्वत्र इस ग्रन्थ भर में है ज्यासाधन करो तो $भु = चिज्याअ$,

और ऊपर की युक्ति से $ज्याभ = \frac{ग}{भु} = \frac{ग}{चिज्याअ}$ $\therefore ज्याभ \times ज्याअ = \frac{ग}{चि}$

अर्थात् दोनों जीवाओं का घात सर्वदा स्थिर है जो कि महद्वृत्त में धर्म्म पाया जाता है इस लिये दोनों विन्दुओं में हो कर जो महद्वृत्त जायगा उस में दोनों विन्दुओं के भीतर जो चाप होगा वही परमाल्प अन्तर होगा ।

२०९। वहुत से प्रश्न ऐसे हैं जिन्हें कि साम्बन्धिक महत्तम और न्यूनतम कहते हैं । समझो कि दो सीमाओं के भीतर किसी फल का चलानयन करने से ऐसा मान $\int स$ जानना है जो महत्तम वा न्यूनतम हो इस नियम से कि उन्हीं चलराशिओं के दूसरे फल का उन्हीं सीमाओं के भीतर चलमान $\int स_{१}$ एक दिये हुये स्थिर संख्या के तुल्य हो । जैसे वक्र के परिधि का मान स्थिर ग के तुल्य हो और फल महत्तम हो इस नियम से पता लगावो कि कौन सा वक्र है ।

ऐसे प्रश्नों के उत्तर करने में $\int स_{१}$ को एक स्थिर संख्या अ से गुण कर $\int स$ में जोड़ देते हैं फिर इस के वैशेषिक को शून्य के समान

करते हैं क्यों कि महत्तम वा न्यूनतम मान में

$$\text{वै}\left(\int \text{स} + \text{अ}\int \text{स}_1\right)\text{ताय} = \text{वै}\int \text{सताय} + \text{अ वै}\int \text{स}_1\text{ताय} = 0 + 0$$

क्यों कि प्रश्न के अनुसार $\int$सताय यह महत्तम वा न्यूनतम है इस लिये वै $\int$सताय=0 और $\int$स$_1$ ताय=ग=स्थिराङ्क इस लिये वै $\int$स$_1$ ताय=0। इसी तरह प्रश्न में यदि यह नियम हो कि $\int$सताय महत्तम वा न्यूनतम और $\int$स$_1$ताय और $\int$स$_2$ताय स्थिराङ्क तो $\int$स$_2$ताय को दूसरे स्थिराङ्क क से गुण कर ऊपर के योग में जोड़ कर इस के वैशेषिक को शून्य के समान करो अर्थात्

$$\text{वै}\left\{\int \text{सताय} + \text{अ}\int \text{स}_1\text{ताय} + \text{क}\int \text{स}_2\text{ताय}\right\} = 0$$

फिर प्रश्न के वश से अ,क स्थिराङ्क का ज्ञान भी हो जायगा।

(१) उदाहरण। बहुत से वक्र हैं जिन सभों का परिधि मान स्थिर ग के तुल्य है तो बतावो कि किस का क्षेत्रफल सब से बड़ा होगा।

यहां प्रश्न की बोली से $\int \text{स}_1\text{ताय} = \int \sqrt{(1+\text{य}^2}\text{ताय} = \text{ग},$
$\int \text{स ताय} = \int \text{र ताय}$

इस लिये $\int \text{शा ताय} = \int \left\{\text{र} + \text{अ}\sqrt{(1+\text{प}^2)}\right\}\text{ताय}$ और शा=र $+\text{अ}\sqrt{(1+\text{प}^2)}$ फिर २०३वें प्रक्रम और २०५वें प्रक्रम से

$$\text{ताशा} = \text{तार} + \frac{\text{अप}}{\sqrt{(1+\text{प}^2)}}\text{ताय} \quad \text{और, ना}=1\ \text{पा} = \frac{\text{अप}}{\sqrt{(1+\text{प}^2}}\Big)\ \text{बा}=0$$

$$\text{इस लिये}\quad \text{शा}=\text{पाप}+\text{स्थि और र}+\text{अ}\sqrt{(1+\text{प})^2} = \frac{\text{अप}^2}{\sqrt{(+\text{प}^2)}} + \text{ग}_1$$

$$\text{समशोधन से र}-\text{ग}_1 = -\frac{\text{अ}}{\sqrt{(1+\text{प}^2)}}\ \text{इस लिये प} = \frac{\sqrt{\{\text{अ}^2-(\text{र}-\text{ग}_1)^2\}}}{\text{र}-\text{ग}_1} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$$

$$\text{और}\quad \text{ताय} = \frac{(\text{र}-\text{ग}_1)\,\text{तार}}{\sqrt{\{\text{अ}^2-(\text{र}-\text{ग}_1)^2\}}}\ \text{चलानयन से}$$

$$\text{य}-\text{ग}_2 = -\sqrt{\{\text{अ}^2-(\text{र}-\text{ग}_1)^2\}}$$

इस लिये $(\text{य}-\text{ग}_2)^2 + (\text{र}-\text{ग}_1)^2 = \text{अ}^2$ परन्तु यह वृत्त का समीकरण है इस लिये सब से बड़ा वृत्त फल का होगा।

यह प्रश्न और २७५ प्रक्रम का (२) प्रश्न दोनों सन् १६९६ ई० में जान बर्नेली (John Bernoulli) के निकाले हुये हैं और जान बर्नेली ने इन के उत्तर को भी वैशेषिक कलन की रीति से निकाला। वैशेषिककलन के प्रचार के जड़ भी यही दोनों प्रश्न हैं।

२७५ प्रक्रम का (२) जो प्रश्न है उसे ऐसे भी कह सक्ते हो कि एक ऐसी पतली कांच की टेढ़ी पोली नली जिस के दोनों शिरे खुले हों बनावो जिस के ऊपर के शिरे पर यदि एक गुरु परमाणु पदार्थ छोड़ दें तो वह परमाल्प काल में नीचे के शिरे पर पहुंच जाय।

इस प्रश्न को अङ्गरेज़ी में ब्र्याचिस्टोक्रोन प्रश्न का (Problem of the brachistochrone) कहते हैं।

(२) उदाहरण। य अक्ष के चारो ओर एक वक्र को घुमा कर एक ऐसा घनक्षेत्र बनाया चाहते हैं जो य अक्षगत नियत दो बिन्दुओं पर जाय और जिस का पृष्ठफल स्थिर ग के तुल्य और घनफल महत्तम हो तो उस वक्र का समीकरण बतावो।

यहां पृष्ठफल $=२\pi\int र\sqrt{(१+प^२)}\,ताय=ग$ और घनफल $=\pi\int र^२ ताय$

इस लिये ऊपर की युक्ति से

$$\pi\int र^२ ताय + २\pi अ\int र\sqrt{(१+प^२)}\,ताय \quad \text{यह}$$

$$\text{वा}\quad \int र^२\,ताय + २\,अ\int र\sqrt{(१+प^२)}\,ताय = \int शाताय$$

यह महत्तम होगा

इस लिये $शा = र^२ + २अ\,र\sqrt{१+प^२)}$ और

$$ताशा = २र\;तार + २अतार\sqrt{((१+प^२)} + \frac{२\,अ\,र\,प}{\sqrt{(१+प^२)}}\;ताय$$

इस लिये $मा = 0$, $ना = २र + २\,अ\sqrt{(१+प^२)}$ और

$$पा = \frac{२अरप}{\sqrt{(१+प^२)}}$$

इस लिये $मा = 0$, $ना = २र + २अ\sqrt{(१+प^2)}$ और $पा = \frac{२अरप}{\sqrt{(१+प^2)}}$

इस लिये $शा = पा \times प + स्थि = \frac{२अरप^2}{\sqrt{(१+प^2)}} + ग_१$

$$= र^2 + २अर\sqrt{(१+प^2)}$$

$$ग_१ - र^2 = २अर\left\{\sqrt{(१+प^2)} - \frac{प^2}{\sqrt{(१+प^2)}}\right\} = \frac{२अर}{\sqrt{(१+प^2)}} \cdots\cdots(१)$$

यहां प्रश्न के अनुसार वक्र य अक्ष को दो विन्दुओं पर काटता है इस लिये उन स्थानों में $र = 0$ इस का उत्थापन (१) में देने से $ग_१ = 0$ इस लिये

$$\frac{२अर}{\sqrt{(१+प^2)}} + र^2 = र\left\{र + \frac{२अ}{\sqrt{(१+प^2)}}\right\} = 0$$

इस में यदि $र + \frac{२अ}{\sqrt{(१+प^2)}} = 0$ तो $\frac{४अ^2}{१+प^2} = र^2 \therefore प^2 + १$

$$= \frac{४अ^2}{र^2} \text{ इस लिये } प = \frac{\sqrt{४अ^2 - र^2}}{र} = \frac{तार}{ताय}$$

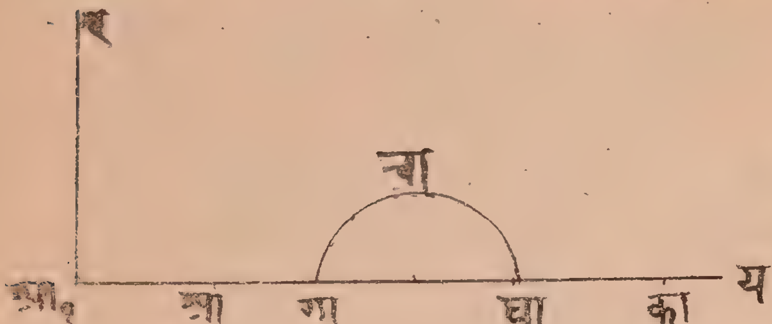
इस लिये $\frac{र}{\sqrt{(४अ^2 - र^2)}} = \frac{ताय}{तार} \therefore \frac{र\ तार}{\sqrt{(४अ^2 - र^2)}} = ताय$

$$-\sqrt{(४अ^2 - र^2)} = य - ग_२ \therefore र^2 + (य - ग_२)^2 = ४अ^2$$

यह एक वृत्त का समीकरण है जिस का केन्द्र य अक्ष पर और व्यासार्द्ध $= -२अ$ है।

कल्पना करो कि य अक्ष में आ, और का विन्दु नियत हैं जिनके ऊपर हो कर प्रश्न के अनुसार वक्र को जाना चाहिये। तो यदि आ, का के व्यास मान कर एक गोल बनाया जाय और प्रश्न में दिया हुआ स्थिर पृष्ठफल इस गोल के पृष्ठफल के बराबर हो तो इस गोल में प्रश्नोक्त सब आलाप घट जायंगे परन्तु यदि दिया हुआ पृष्ठफल इस गोल के पृष्ठफल के बराबर न हो किन्तु य अक्ष में गा, और घा बिन्दु जो हैं उन के अन्तर को व्यास मान कर जो गोल होगा उस के पृष्ठ

फल के बराबर हो तो ऐसी स्थिति में ऐसा समझना चाहिये कि आग, य अक्ष का भाग, गाघा व्यास पर बना गाचाघा वृत्तार्द्ध और य अक्ष



का घाका भाग इन तीनों को एक में मिला देने से आगाचाघा का यह जो आ और का दो नियत विन्दुओं पर गया हुआ यर धरातल में एक वक्र है य अक्ष के चारो ओर उस के घूमने से अभीष्ट घनक्षेत्र होगा जिसका पृष्ठफल दिये हुये पृष्ठफल के समान और घनफल महत्तम होगा।

इसी तरह यदि आका से गाघा बड़ा हो तो भी समझ लेना चाहिये। ऊपर का समीकरण भी दिखलाता है कि जब

$$\text{र}\left\{\text{र}+\frac{\text{२अ}}{\sqrt{(१+\text{प}^{२})}}\right\}=0$$ तो र $=0$ यह भी एक वक्र का समीकरण

होगा जो कि यहां पर आगा और घाका सरल रेखा के समान होगा।

इस प्रकार से बुद्धिमान को चाहिये कि इस ग्रन्थ में दिखलाये गये जो सिद्धान्त हैं उनके अभ्यास से नाना प्रकार की कल्पना अपने बुद्धि-बल से करे।

अभ्यास के लिये प्रश्न।

१। $\int_0^{\frac{\pi}{२}}\int_0^{\text{२अकोज्या ष}} \text{फ}(\text{स्रु},\text{ष})\,\text{स्रु ता स्रु ता ष}$ इस में क्रम को बदलो

उत्तर $\int_0^{\text{२अ}}\int_0^{\text{कोज्या}^{-१}\frac{\text{स्रु}}{\text{२अ}}} \text{फ}(\text{स्रु},\text{ष})\,\text{स्रु ता ष ता र}$

२। $\int_0^{१}\int_{\text{य}}^{\text{य}(२-\text{य})} \text{फ}(\text{य},\text{र})\,\text{ता र ता य}$ इस में क्रम को बदल देना है।

उ० $\int_0^{१}\int_{१-\sqrt{(१-\text{र})}}^{\text{र}} \text{फ}(\text{य},\text{र})\,\text{ता य ता र}$

३। $\int_0^{\text{२अ}}\int_{\frac{\text{य}^{२}}{\text{४अ}}}^{\text{३अ}-\text{य}} \text{फ}(\text{य},\text{र})\,\text{ता र ता य}$ इस में क्रम को बदलना है।

उ० $\int_0^{\text{अ}}\int_0^{२\sqrt{(\text{अर})}} \text{फ}(\text{य},\text{र})\,\text{ता य ता र} + \int_{\text{अ}}^{\text{३अ}}\int_0^{\text{३अ}-\text{र}} \text{फ}(\text{य},\text{र})\,\text{ता य ता र}$

४ । $\int_{0}^{अ}\int_{\sqrt{(अ^2-य^2)}}^{य+२अ}$ फ(य,र) तार ताय इस का क्रम बदलने से कैसा रूप होगा ।

उ० $\int_{0}^{अ}\int_{\sqrt{(अ^2-र^2)}}^{अ}$ फ(य,र) ताय तार $+\int_{अ}^{२अ}\int_{0}^{अ}$ फ(य,र) तायतार

$+\int_{२अ}^{३अ}\int_{र-२अ}^{अ}$ फ(य,र) ताय तार

५ । यदि य = अज्याष ज्याष$_१$ और र = क कोज्याष ज्याष$_१$ तो सिद्ध करो कि बदलने से $\int\int$ तार ताय इस द्विगुण चल का $\pm\int\int$ अक ज्याष$_१$ कोज्याष$_१$ ताष ताष$_१$ ऐसा रूप होगा ।

६ । यदि य = वज्याअ$_१$ + श कोज्याअ$_१$ और र = वकोज्याअ$_१$ — शज्याअ$_१$ तो सिद्ध करो कि

$$\int\int फ(य,र)\,\frac{तार\ ताय}{\sqrt{(१-य^2-र^2)}}=\int\int फ_१(व,श)\,\frac{ताश\ ताव}{\sqrt{(१-व^2-श^2)}}$$

७ । सिद्ध करो कि

$$\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} फ(अ^2य^2+क^2र^2)\ तार\ ताय=\frac{\pi}{४अक}\int_{0}^{\infty} फ(य)ताय$$

८ । $\int\int इ^{-(य^2+२यरकोज्याअ_१+र^2)}$तार ताय इस को अत्तीय भुज युग्म के रूप में बदलो और तब दिखलावो कि यदि य और र की सीमा ० और ∞ हों तो द्विगुण चल का मान $\frac{अ_१}{२ज्याअ_१}$ होगा ।

९ । सिद्ध करो कि

$$\int_{0}^{अ}\int_{0}^{क}\frac{तार\ ताय}{(ग^2+य^2+र^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{१}{ग}स्प^{-१}\frac{अक}{ग\sqrt{(अ^2+क^2+ग^2)}}$$

१० । अत्तीय भुजयुग्म के रूप में बदल कर सिद्ध करो कि

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{अ\ तार\ ताय}{(य^2+र^2+अ^2)^{\frac{3}{2}}(य^2+र^2+अ'^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{२\pi}{अ+अ'}$$

११। यदि य = ग्रुकोज्याष + अज्याष और र = ग्रुज्याष + अकोज्याष। तो ∫∫फ(य,र)तार ताय इसको बदलनेसे कैसा रूप होगा।
उ० ∫∫फ(ग्रुकोज्याष+अज्याष, ग्रुज्याष+अकोज्याष)(अज्या२ष−ग्रु)तारताष

१२। सिद्ध करो कि $\iint \frac{\sqrt{(१-\text{य}^२-\text{र}^२)}}{\sqrt{(१+\text{य}^२+\text{र}^२)}}$ तार ताय $=\frac{\pi}{४}\left(\frac{\pi}{२}-१\right)$

यहां चलानयन य, और र के सब धनमानों के भीतर किया गया है और $\text{य}^२+\text{र}^२ \angle १$।

१३। सिद्ध करो कि

$$\iiint\cdots\frac{\text{ताय तार ताल}\cdots}{\sqrt{(१-\text{य}^२-\text{र}^२-\text{ल}^२-\cdots)}}=\frac{\pi^{\frac{\text{न}+१}{२}}}{२^{\text{न}}\text{गा}\left(\frac{\text{न}+१}{२}\right)}$$

जहां चलराशियों की संख्या न हैं और चलानयन सब धन मान के भीतर किया गया है जो कि $\text{य}^२+\text{र}^२+\text{ल}^२+\cdots\angle १$ इस नियम से सिद्ध होते हैं।

१४। सिद्ध करो कि

$$\text{ज्या}\,\tfrac{१}{२}\,\text{य}=\frac{८}{\pi}\left(\frac{\text{ज्याय}}{२^२-१}-\frac{२\text{ज्या}२\text{य}}{२^२\cdot२^२-१}+\frac{३\text{ज्या}३\text{य}}{२^२\cdot३^२-१}-\frac{४\text{ज्या}४\text{य}}{२^२\cdot४^२-१}+\cdots\right)$$

१५। सिद्ध करो कि

$$\text{कोज्या}\,\tfrac{१}{२}\,\text{य}=\frac{८}{\pi}\left\{१+\frac{१}{२}\frac{\text{कोज्याय}}{२^२-१}-\frac{१}{२}\frac{\text{कोज्या}२\text{य}}{२^२\cdot२^२-१}+\cdots\right\}$$

१६। एक मनुष्य से ३० हाथ के अन्तर पर दक्षिण और उस का पोसा तीतर था जैसे ही मनुष्य पूर्व की ओर चलने लगा वैसे ही तीतर भी मनुष्य के पास पहुंचने के लिये चला तो बतावो कि प्रथम स्थान से पूर्व की ओर कितनी दूरी पर मनुष्य और तीतर से भेंट हुई। इस प्रश्न में इतना जानते हैं कि प्रतिक्षण में मनुष्य से दूना तीतर चलता था।

उ० २० हाथ।

१७। सेा हाथ ऊंचे एक तालवृक्ष के ऊपर एक कौआ बैठा था उसने पेड़ की जड़ से दक्षिण ओर २५ हाथ के अन्तर पर दक्षिण ही की ओर जाता एक मूसे को देख कर उस की दूनी गति से पकड़ने के लिये झपटा तेा बतावो कि पेड़ की जड़ से कितने हाथ पर कौए ने मूसे को पकड़ा।

उ० १८३ $\frac{१}{३}$ हाथ।

१८। पृथ्वी से १०,००० हाथ ऊंचे पर जा कर एक कबूतर ने पृथ्वी पर ठीक अपने पैर के नीचे चावलेां को देख कर एक पल में २०० हाथ की गति से उतरने लगा परन्तु उस समय पूर्व की वायु एक चाल से बहती थी जिसके कारण एक पल की गति कबूतर की पूर्व की ओर भी १०० हाथ हो गई तो बतावो कि कितने पल में वह कबूतर पृथ्वी पर पहुंचा।

उ० ६६ $\frac{२}{३}$ पल

१९। २६७ प्रक्रम के (६)वें प्रश्न में मेार और सांप के येाग से जेा वक्र चिवाहु होगा उस का क्षेत्रफल क्या होगा। उ०, फल $= \frac{(२इ_१^२क-इ_१ग)अ}{४गु^२-१}$

२०। १६वें प्रश्न में मनुष्य और तीतर के येाग से जेा वक्र चिवाहु होगा उस का फल क्या होगा उ० फल=१२०

२१। १७वें प्रश्न में काक और मूस के येाग से जेा वक्र चिवाहु होगा उस का फल बतवेा। उ० फल $= \frac{कोटि\ (२\ गु^२ \times भुज + गु \times कर्ण)}{४\ गु^२-२}$

$$यहां \quad गु = \frac{काक\ गति}{मूस\ की\ गति}$$

२२। १८वें प्रश्न में कपेात जिस वक्र में पृथ्वी पर उतरेगा उस से और कपेात की उंचाई १०,००० से जेा चापक्षेत्र होगा उस का क्या फल होगा।

उ० फल $= \frac{२(१०,०००)^२}{३}$

२३। एक वक्र ऐसा बतावो जिस में $\int \frac{प^३र}{१+प^२}$ ताय इस का मान न्यूनतम हो।

$$उ० \quad र = \frac{ग(१+प^२)^२}{प^३}, \; य = ग_१ + ग \left(\frac{३}{४प^४} + \frac{१+प^२}{प^२} + ला\, प\right)$$

२४। जिन सूच्याकार शङ्कु के पृष्ठ का $ल = इ\sqrt{(य^२+र^२)} = इ\, स्रु$ यह समीकरण है उस के पृष्ठ पर दो दिये हुये विन्दुओं के बीच में जो परमाल्प रेखा होगी उस का समीकरण बतावो। उ० $स्रु = गछे \left\{ \frac{ष+ग_१}{\sqrt{(१+इ^२)}} \right\}$

२५। वक्र का चाप और फल स्थिर है और यह वक्र य अक्ष के चारो ओर घूम कर ऐसा घनक्षेत्र बनाता है जिस का घनफल महत्तम है तो वक्र का पता लगावो। उ० यहां $शा = \pi र^२ + कर + अ\sqrt{(१+प^२)}$ ऐसा होगा फिर इस पर से २०६ प्रक्रम की क्रिया कर वक्र का समीकरण जानो।

२६। सब वक्रों में क्षेत्रफल स्थिर है बतावो किस की परिधि सब से छोटी होगी। उ० वृत्त की।

२७। वक्र का चाप स्थिर है और यह य अक्ष के चारो ओर घूम कर एक ऐसा घनक्षेत्र बनाता है जिसका न्यूनतम पृष्ठफल है तो बतावो वह कौन सा वक्र है। उ० कातन्वली (Catenary)

२८। एक नींब में जड़ से दो शाखा फूटी थीं जिन का झुकाव ३०° था। पहली शाखा पर जड़ से ८ हाथ के अन्तर पर एक मैना बैठीथी और दूसरी शाखा पर जड़ से $३+४\sqrt{३}$ हाथ के अन्तर पर एक कीड़ा बैठा था। यह जैसे ही शाखा के ऊपर की ओर चलने लगा वैसे ही इस पर मैना झपटी तो बतावो कि पहले स्थान से कितनी दूर जाने पर मैना ने उस कीड़े को पकड़ लिया। इस प्रश्न में इतना हम जानते हैं कि कीड़े से मैना दूनी चलती थी।

उ० $४\frac{१}{३}$ हाथ

२६ । एक महाजन ने एक ज्योतिषी से प्रसन्न हो कर कहा कि कल आप एक पीतर का डब्बा किसी से बनवा कर लेते आइयेगा जो कि ठीक मेरी रूमाल से चारो ओर बंध जाय तो मैं उस डब्बे को अशर्फ़ियों से भर कर आपको सङ्कल्प करूंगा । बतावो ज्योतिषी कैसा डब्बा बनावे जिस में उसे बहुत अशर्फ़ियां मिलें ! इतना यहां पर हम जानते हैं कि उस धनी के रूमाल की लम्बाई साढ़ेपांच हाथ और चौड़ाई पौने दो हाथ थी ।

उ० यदि व्यास परिधि का सम्बन्ध $\frac{22}{7}$ हो तो पौने दो हाथ के व्यास का जो एक गोलाकार डब्बा बनेगा उस में सब से अधिक अशर्फ़ियां भरेंगी ।

हरिगीत ।

रखि हैं कृपालुद्विवेदिसुतकृत सुकृतिजन मन लाय के ।
चलराशिकलन वरासि कल नवराशि चरम मिलाय के ॥
धरि शान जौं बुद्धिबल गरवदलि सकल खलहि हिलाय के ।
धन धान मान महान लहि हैं होय प्रिय नृप राय के ॥

इतिश्रीकृपालुदत्तसुतश्रीसुधाकरद्विवेदिकृतंचलराशिकलनं सम्पूर्णम् ॥

सित सावन शनि तेरस बरस विरोधि ।
पूरन कियेउ सुधाकर सब विधि शोधि ॥